Chapitre 12

# Suites de fonctions

Dans ce chapitre, on considère $X$ un espace métrique muni d'une distance $d$, $E$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel normé muni d'une norme $\|.\|$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $X$ dans $E$.

## I Convergence simple et uniforme

### 1. Premières définitions

**Définition I.1.**

Soit $f$ une fonction de $X$ dans $E$. On dit que la suite $(f_n)$ converge simplement vers $f$ lorsque pour tout $x \in X$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$. Dans ce cas, on appelle $f$ la limite simple de la suite $(f_n)$.

**Remarque :** Bien évidement, une formulation équivalente de cette définition découlant de la définition de la limite est

$$\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$$

**Exercice I.2.**

Déterminer la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)$ de $\mathbb{R}$ (muni de la distance $(x, y) \longmapsto |x - y|$) dans $\mathbb{R}$ (muni de la norme $|.|$) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{1 - x^{2n}}{1 + x^{2n}}$$

**Définition I.3.**

Soit $f$ une fonction de $X$ dans $E$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \forall x \in X,\ \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$
2. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \sup\limits_{x\in X} \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$
3. $f_n - f$ est bornée à partir d'un certain rang et $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Lorsque ces propositions sont vérifiées, on dit que la suite $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $X$. Dans ce cas, on appelle $f$ la limite uniforme de $(f_n)$.

**Remarques :**

→ Bien entendu, si $(f_n)$ converge uniformément vers $f$, alors $(f_n)$ converge simplement vers $f$.

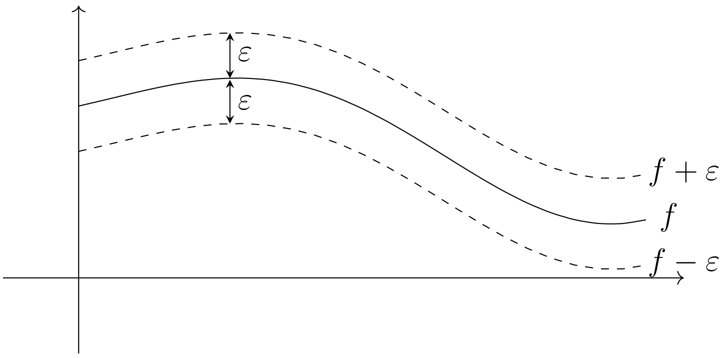
→ En pratique, pour trouver la limite uniforme d'une suite $(f_n)$, on commence par trouver sa limite simple si elle existe en étudiant la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout $x \in X$ et voir ensuite s'il s'agit d'une limite uniforme.

→ La négation de la convergence uniforme vers $f$ s'écrit

$$\sup_{x\in X} \|f_n(x) - f(x)\| \nrightarrow 0 \quad \text{i.e.} \quad \exists \delta > 0,\ \sup_{x\in X} \|f_n(x) - f(x)\| \geq \delta \text{ pour une infinité de } n.$$

$$\text{i.e.} \quad \exists \delta > 0,\ \exists (x_n) \in X^{\mathbb{N}},\ \|f_n(x_n) - f(x_n)\| \geq \delta \text{ pour une infinité de } n.$$

→ L'interprétation de la convergence uniforme lorsque $X = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}$ est la suivante : si $(f_n)$ converge uniformément vers $f$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que toutes les fonctions $f_n$ d'indice $n \geq N$ sont comprises dans le tube de largeur $2\varepsilon$ autour de $f$.




**Exercice I.4.**

Soit $(f_n) \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$. Montrer que si $(f_n)$ converge uniformément vers une fonction $f$, alors $f$ et bornée et $\sup\limits_{x\in[0,1]} f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sup\limits_{x\in[0,1]} f(x)$.

## 2. Opérations simples

**Proposition I.5.**

Soit $f$ une fonction de $X$ dans $(E, +, \ . \ , \times)$ une algèbre munie d'une norme d'algèbre $\|.\|$. Les propositions suivantes sont vraies.

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(A_k)_{k\in[\![1;p]\!]}$ $p$ parties de $X$. Si la suite $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $A_k$ pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, alors $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $A_1 \cup \cdots \cup A_p$.
2. Si $(f_n)$ converge uniformément vers une fonction $f$ et $(g_n)$ est une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction $g$, alors pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha f_n + \beta g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\alpha f + \beta g$.
3. Si $g$ est une fonction bornée sur $X$ et $(f_n)$ converge uniformément vers une fonction $f$, alors $(g \times f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $g \times f$.
4. Si $(f_n)$ est une suite de fonctions bornées qui converge uniformément vers $f$, alors $f$ est bornée et la suite $(f_n)$ est uniformément bornée.
5. Si de plus $(g_n)$ est une suite de fonctions bornées, alors la suite $(f_n \times g_n)$ converge uniformément vers $f \times g$.

**Preuve :**

1. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $A_k$. Il existe donc $N_k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in A_k$ et $n \geq N_k$, $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$. On en déduit donc qu'en posant $N = \max(N_1, \ldots, N_p)$, pour tout $x \in A_1 \cup \cdots \cup A_p$ et $n \geq N$, $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$ et alors $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $A_1 \cup \cdots \cup A_p$.
2. Si $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$, le résultat est évident. Supposons donc que $\alpha$ et $\beta$ sont non nuls. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$ et $x \in X$, $\|g_n(x) - g(x)\| < \dfrac{\varepsilon}{2\,|\beta|}$. De même, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$ et $x \in X$, $\|f_n(x) - f(x)\| < \dfrac{\varepsilon}{2\,|\alpha|}$. On en déduit alors que pour

tout $n \geq \max(N_1, N_2)$ et $x \in X$,

$$\begin{aligned}\|\alpha f_n(x) + \beta g_n(x) - \alpha f(x) - \beta g(x)\| &\leq |\alpha| \, \|f_n(x) - f(x)\| + |\beta| \, \|g_n(x) - g(x)\| \\ &< |\alpha| \frac{\varepsilon}{2|\alpha|} + |\beta| \frac{\varepsilon}{2|\beta|} = \varepsilon\end{aligned}$$

On en déduit donc que la suite de fonctions $(\alpha f_n + \beta g_n)$ converge bien uniformément vers $(\alpha f + \beta g)$

3. Soit $M > 0$ un majorant de $|g|$. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et $x \in X$, $\|f_n(x) - f(x)\| < \dfrac{\varepsilon}{M}$. On a alors pour tout $n \geq N$ et $x \in X$,

$$\|g(x)f_n(x) - g(x)f(x)\| \leq \|g(x)\| \, \|f_n(x) - f(x)\| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

et donc la suite de fonctions $(g \times f_n)$ converge bien uniformément vers $g \times f$.

4. $(f_n)$ converge uniformément vers $f$, donc en utilisant la définition de l'uniforme convergence pour $\varepsilon = 1$, on obtient

$$\exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N \ \forall x \in X, \ \|f_n(x) - f(x)\| < 1$$

On en déduit donc qu'en considérant $N \in \mathbb{N}$ vérifiant la propriété ci-dessus, on a

$$\|f(x)\| \leq \|f(x) - f_N(x)\| + \|f_N(x)\| \leq 1 + A$$

où $A$ est un majorant de $\|f_N\|$. $f$ est donc bien bornée. Montrons maintenant que $(f_n)$ est uniformément bornée. Soit $M_1, \ldots, M_N$ des majorants respectifs de $\|f_1\|, \ldots, \|f_N\|$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in X$

$$\|f_n(x)\| \leq \max(\|f_n(x) - f(x)\| + \|f(x)\|, M_1, \ldots, M_N) \leq \max(2 + A, M_1, \ldots, M_N)$$

et alors la suite de fonctions $(f_n)$ est bien uniformément bornée.

5. D'après le point précédent, les deux fonctions $f$ et $g$ sont bornées. Considérons alors $M$ un majorant strictement positif de $\|f\|$. On sait également d'après le point précédent que la suite $(g_n)$ est uniformément bornée, ce qui nous permet de considérer $A$ un majorant strictement positif de $(\|g_n\|)$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$ et $x \in X$, $\|f_n(x) - f(x)\| < \dfrac{\varepsilon}{2A}$. Considérons également $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$ et $x \in X$, $\|g_n(x) - g(x)\| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$. On a alors pour tout $n \geq \max(N_1, N_2)$ et $x \in X$,

$$\begin{aligned}\|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)\| &= \|f_n(x)g_n(x) - f(x)g_n(x) + f(x)g_n(x) - f(x)g(x)\| \\ &\leq \|g_n(x)\| \, \|f_n(x) - f(x)\| + \|f(x)\| \, \|g_n(x) - g(x)\| \\ &< A\frac{\varepsilon}{2A} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon\end{aligned}$$

La suite $(f_n \times g_n)$ converge donc bien uniformément vers $f \times g$.

**Exercice I.6.**

Étudier la convergence simple puis la convergence uniforme des suites de fonctions réelles définies de la manière suivante.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in [0,1], \ f_n(x) = n^a x^n (1 - x)$ avec $a \in \mathbb{R}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \mathbb{R}^+, \ f_n(x) = n^a x e^{-nx}$ avec $a \in \mathbb{R}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!} e^{-x}$

# II Transfert

## 1. Convergence simple

**Proposition II.1.**

Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $(f_n)$ converge simplement vers $f$. Les propositions suivantes sont vraies.

1. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ est croissante, alors $f$ est croissante.
2. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ est convexe, alors $f$ est convexe.

**Preuve :**

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq y$, on a $f_n(x) \leq f_n(y)$. En passant à la limite lorsque $n$ tends vers l'infini des deux côtés, on obtient $f(x) \leq f(y)$ ce qui signifie que $f$ est croissante.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0,1]$, on a $f_n(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f_n(x) + (1-\lambda) f_n(y)$. En passant à la limite lorsque $n$ tends vers l'infini des deux côtés de l'inégalité, on obtient que $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$. On en déduit donc que $f$ est bien convexe.

**Remarque :** Bien entendu les deux propositions ci-dessous restent vraies lorsqu'on remplace croissance par décroissance et convexité par concavité.

**Théorème (Premier théorème de Dini) II.2.**

Supposons que $(f_n)$ est une suite de fonctions continues de $X$ dans $\mathbb{R}$ et $X$ est **compact**. Soit $f$ une fonction continue de $X$ dans $\mathbb{R}$. Supposons de plus que pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))$ est croissante convergente vers $f(x)$, alors $(f_n)$ converge uniformément vers $f$.

**Preuve :** Ce résultat a été prouvé au chapitre 11.5 (Compacité). Il s'agit du corollaire VII.4.

## 2. Convergence uniforme

### a) Continuité

**Proposition II.3.**

Soit $f$ une fonction de $X$ dans $E$ et $a \in X$. Si les propriétés suivantes sont vérifiées,

→ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ est continue en $a$.

→ Il existe $U$ un voisinage de $a$ tel que $(f_n|_U)$ converge uniformément vers $f|_U$ sur $U$.

alors $f$ est continue en $a$.

**Preuve :** Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et $x \in U$, $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$. $f_N$ est continue en $a$, on peut donc considérer $\eta > 0$ tel que $B(a, \eta) \subset U$ et pour tout $x \in B(a, \eta)$, $\|f_N(x) - f_N(a)\| < \varepsilon$. On a alors pour tout $x \in B(a, \eta)$

$$\|f(x) - f(a)\| \leq \|f(x) - f_N(x)\| + \|f_N(x) - f_N(a)\| + \|f_N(a) - f(a)\| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

On en déduit donc que $f$ est bien continue en $a$.

**Remarque :** Une conséquence directe de cette proposition est la suivante. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ est continue et si $(f_n)$ converge uniformément dans $X$ vers une fonction $f$, alors $f$ est continue.

### b) Interversion de limites

**Rappel II.4.**

Soit $A$ une partie de $X$, $a \in \overline{A}$ et $\lambda \in E$. On dit que $f(x)$ tend vers $\lambda$ lorsque $x$ tends vers $a$ selon $A$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A,\ d(x,a) < \eta \Longrightarrow \|f(x) - \lambda\| < \varepsilon$$

Dans ce cas, on écrit $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} \lambda$.

**Proposition II.5.**

Soit $A$ une partie de $X$, $f$ une fonction de $X$ dans $E$ et $a \in \overline{A}$. Supposons que $E$ est complet et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\lambda_n \in E$ tel que $f_n(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} \lambda_n$. Supposons de plus que $(f_n)$ converge uniformément dans $A$ vers $f$. Il existe $\lambda \in E$ tel que

$$\lambda_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \lambda \text{ et } f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} \lambda$$

**Preuve :** Écrivons la définition de la convergence uniforme de $(f_n)$ vers $f$.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \forall x \in X,\ \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$$

On en déduit donc que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq N,\ \forall x \in A,\ \|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \|f_n(x) - f(x)\| + \|f_m(x) - f(x)\| < 2\varepsilon$$

En faisant tendre $x$ vers $a$, cette proposition devient

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall m, n \geq N,\ \|\lambda_n - \lambda_m\| \leq 2\varepsilon$$

On en déduit alors que la suite $(\lambda_n)$ est de Cauchy. $E$ étant complet, on peut affirmer que $(\lambda_n)$ converge vers un élément $\lambda$ de $E$. Montrons alors que $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} \lambda$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\|\lambda_n - \lambda\| < \varepsilon$ et $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in A \cap B(a, \eta)$, $\|f_N(x) - \lambda_N\| < \varepsilon$. On a alors pour tout $x \in B(a, \eta) \cap A$,

$$\|f(x) - \lambda\| \leq \|f(x) - f_N(x)\| + \|f_N(x) - \lambda_N(x)\| + \|\lambda_N - \lambda\| \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

On en déduit donc qu'on a bien $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ a \in A}}{\longrightarrow} \lambda$.

**Remarques :**

→ Dans le cas général, on utilisera cette propriété dans le cas $X = A = \mathbb{R}$ ou alors $X = \mathbb{R}$ et $A$ un voisinage de $a$. On pourra dans ce cas tout simplement écrire $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \lambda$ au lieu de $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ a \in A}}{\longrightarrow} \lambda$.

→ Cette proposition montre qu'on peut faire l'inversion de limites suivante.

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \lim_{\substack{x \longrightarrow a \\ x \in A}} f_n(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \lambda_n = \lambda = \lim_{\substack{x \longrightarrow a \\ x \in A}} f(x) = \lim_{\substack{x \longrightarrow a \\ x \in A}} \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x)$$

→ On peut étendre de la même manière cette propriété au cas $a = +\infty$. Le lecteur est encouragé à essayer de le faire.

### c) Intégration

**Proposition II.6.**

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$ est continue par morceaux et $(f_n)$ converge uniformément vers une fonction $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$ de $X$ dans $E$ continue par morceaux, alors

$$\int_a^b f_n(x)dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)dx \text{ et } \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

**Preuve :** On a

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| \, dx \leq (b-a) \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

De la même manière, on a également

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx \leq (b-a) \|f_n - f\|_\infty^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

**Remarque :**

→ On peut également montrer cette propriété dans le cas où on remplace $[a,b]$ par une union finie d'intervalles bornée.

→ Attention, cette propriété est en général fausse lorsque $I$ n'est pas borné. En effet, considérons le cas où $I = [0, +\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$. On a $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{+\infty} x^{n+1}e^{-x}dx = \underbrace{\left[-x^{n+1}e^{-x}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + (n+1)\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx = \cdots = (n+1)!\int_0^{+\infty} e^{-x} = (n+1)!$$

On en déduit alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{n!}e^{-x} = 1$$

De plus, on sait d'après l'exercice I.6 que $(f_n)$ converge uniformément vers 0. On en déduit donc qu'on a

$$\begin{cases} f_n \text{ converge uniformément vers } 0 \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \end{cases}$$

ce qui montre que l'énoncé de la proposition II.6 pour $I = [0, +\infty[$ est faux.

**Notation :** On note pour toute union finie d'intervalles $I$, $\mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux de $I$ dans $\mathbb{C}$.

**Théorème (Théorème de convergence dominée) II.7.**

Soit $I$ un intervalle et $(f_n) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{C})^{\mathbb{N}}$. Si $(f_n)$ vérifie les propriétés suivantes,

→ $(f_n)$ converge simplement vers une fonction $f$ continue par morceaux sur $I$.

→ $\exists \varphi \in L^1(I, \mathbb{C}),\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |f_n(x)| \leq |\varphi(x)|$

alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in L^1(I, \mathbb{C})$, $f \in L^1(I, \mathbb{C})$ et $\displaystyle\int_I f_n(x)dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_I f(x)dx$.

**Preuve :** La preuve de ce résultat a été faite au chapitre 17 (Intégration II).

**Remarque :** Ici, l'intervalle $I$ n'est pas forcément borné.

### d) Dérivation

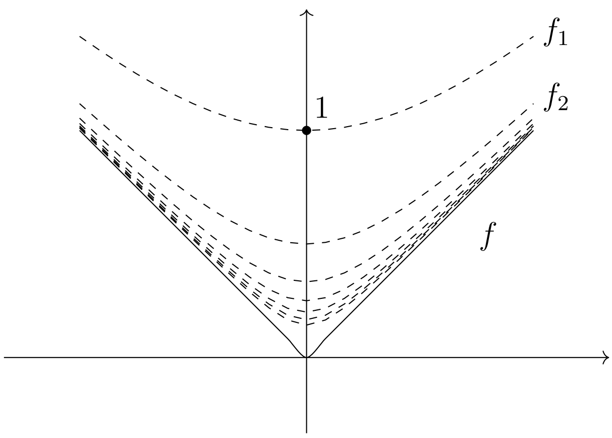
Avant d'énoncer les résultats de cette partie, attirons l'attention du lecteur sur la fait que la convergence uniforme d'une suite de fonctions dérivables n'implique pas forcément que la limite uniforme est dérivable. En effet, en considérant la suite de fonctions $(f_n)$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$$

On a clairement que $(f_n)$ converge uniformément vers $f : x \longmapsto |x|$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq f_n(x) - \sqrt{x^2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{x^2} \underset{(*)}{\leq} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2} - x^2} = \frac{1}{n}$$

L'inégalité $(*)$ peut être facilement démontrée en utilisant le fait que pour tout $a, b \in \mathbb{R}^+$ tels que $a \geq b$, $(a-b)^2 \leq a^2 - b^2$. On en déduit donc que $\|f_n - f\|_\infty \leq \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et donc $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais $f$ n'est pas dérivable en 0.




Dans la figure ci-dessus, les termes de la suite $(f_n)$ sont en pointillés et la fonction valeur absolue est en traits pleins. On voit bien qu'à la limite, un point anguleux se forme en 0 alors que tous les termes de la suite $(f_n)$ sont dérivables (lisses) en 0.

Pour pouvoir obtenir la dérivabilité à partir de la convergence uniforme, il faut ajouter des hypothèses supplémentaires.

**Notation :** Pour toute fonction $f$ de $A$ dans $B$ (où $A$ et $B$ sont deux ensembles quelconques) et $C \subset A$, on note $\|f\|_{\infty,C} = \sup\limits_{x \in C} f(x)$.

**Proposition II.8.**

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $g$ une fonction de $I$ dans $\mathbb{R}$. Supposons que $(f_n) \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$. Si les hypothèses suivantes sont vérifiées,

→ Il existe $a \in I$ tel que la suite $(f_n(a))$ est convergente.

→ Pour tout segment $S \subset I$, $(f_n'|_S)$ converge uniformément vers $g|_S$.

alors $(f_n)$ converge simplement vers $f$ sur $I$ et uniformément sur tout segment inclus dans $I$ où $f$ est une fonction dans $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ telle que $f' = g$.

**Preuve :** On a par hypothèse, pour tout $x \in I$, $(f_n')$ est une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers $g$ sur $[\min(a,x), \max(a,x)]$. On en déduit donc d'après la proposition II.3 que $g$ est continue sur $[\min(a,x), \max(a,x)]$. On a de plus d'après la proposition II.6,

$$\int_a^x f_n'(t)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^x g(t)dt \quad \text{i.e.} \quad f_n(x) - f_n(a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^x g(t)dt$$

On pose alors pour tout $x \in I$, $f(x) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(a) + \displaystyle\int_a^x g(t)dt$. $g$ est continue, donc $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ et $(f_n)$ converge simplement vers $f$. On a de plus, pour tout $c, d \in \mathbb{R}$ tels que $c \leq d$ et $[c,d] \subset I$, pour tout $x \in [c,d]$,

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| f(c) - f_n(c) + \int_c^x (g(t) - f_n'(t))dt \right| \leq |f(c) - f_n(c)| + (d-c)\,\|g - f_n'\|_{\infty,[c,d]}$$

On en déduit donc que

$$\|f_n - f\|_{\infty,[c,d]} \leq |f(c) - f_n(c)| + (d-c)\,\|g - f_n'\|_{\infty,[c,d]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

La suite $(f_n)$ converge donc bien simplement vers $f$ et uniformément vers $f$ sur tout segment inclus dans $I$. Enfin, par construction on a bien que $f' = g$.

**Remarque :** On peut aisément généraliser cette proposition de la manière suivante : soit $p \in \mathbb{N}^*$. Si les propriétés suivantes sont vérifiées

→ $(f_n) \in \mathcal{C}^p(I,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$

→ Il existe $a \in I$ tel que pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, la suite $(f_n^{(k)}(a))$ converge.

→ Pour tout segment $S \subset I$, $(f_n^{(p)}|_S)$ converge uniformément vers $(g|_S)$.

Alors $(f_n)$ converge simplement vers $f$ sur $I$ et uniformément sur tout segment inclus dans $I$ où $f$ est une fonction dans $\mathcal{C}^p(I,\mathbb{R})$ telle que $f^{(p)} = g$. Nous ne démontrerons pas cette généralisation malgré le fait que la démonstration n'est pas très difficile. Le lecteur est encouragé encore une fois à démontrer lui même cette généralisation à partir de la proposition pour $p = 1$.

# III Compléments

## 1. Convergence diagonale

**Proposition III.1.**

Supposons que $(f_n)$ est une suite de fonctions continues sur $X$ qui converge uniformément vers $f \in \mathcal{C}(X,E)$. Si $a \in X$ et $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $X$ vérifiant $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, alors $f_n(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$.

**Preuve :** Soit $\varepsilon > 0$. On considères les éléments suivants.

→ $(f_n)$ converge uniformément vers $f$, on peut donc considérer $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et $x \in X$, $\|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$.

→ La suite de fonctions $(f_n)$ est à valeur dans l'ensemble des fonctions continues, donc d'après la proposition II.3, $f$ est continue et alors on peut considérer $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in B(a, \eta)$, $\|f(x) - f(a)\| < \eta$.

→ $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$, on peut donc considérer $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $d(x_n, a) < \varepsilon$.

On a alors pour tout $n \geq \max(N, N')$,

$$\|f_n(x_n) - f(a)\| \leq \|f_n(x_n) - f(x_n)\| + \|f(x_n) - f(a)\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Ce qui nous permet d'affirmer que $f_n(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(a)$.

**Exercice III.2.**

Soit $K$ un convexe compact de l'espace $E$ vectoriel normé muni d'une norme $\|.\|$ et soit $f : K \longrightarrow K$ une fonction $1-$lipschitzienne. Montrer que $f$ admet un point fixe dans $K$.
*Indication : Utiliser le résultat de l'exercice VI.6 du chapitre 11.5 (Compacité).*

**Remarque :** Lorsque $E$ est de dimension finie, il suffit que $f$ soit finie pour qu'on ait l'existence d'un point fixe. Ce résultat est connu sous le nom de théorème du point fixe de Brower (hors programme).

## 2. Critère de Cauchy uniforme

**Théorème (Critère de Cauchy uniforme) III.3.**

Les propriétés suivantes sont vraies.

1. Si $(f_n)$ converge uniformément, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall m, n \geq N, \ \forall x \in X, \ \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon \quad (*)$$

2. Réciproquement, si $E$ est un espace complet et la condition $(*)$ est vérifiée, alors la suite $(f_n)$ converge uniformément.

**Preuve :**

1. Supposons que $(f_n)$ converge uniformément et soit $f$ la limite uniforme de $(f_n)$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\forall x \in E$, $\|f_n(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}$. On a alors pour tout $m, n \geq N$ et $x \in X$,
$$\|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \|f_n(x) - f(x)\| + \|f_m(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
Ce qui est bien le résultat voulu.

2. Supposons que $E$ est complet et que la condition $(*)$ est vérifiée. Il est clair que pour tout $x \in E$, la suite $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy (voir le chapitre 4 des valeurs d'adhérence et 11.5 sur la compacité) donc elle converge. Posons donc pour tout $x \in X$, $f(x)$ la limite de la suite $(f_n(x))$. $f$ est la limite simple de la suite $(f_n)$ et notre but est de montrer qu'il s'agit d'une limite uniforme.

   Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $m, n \geq N$ et $x \in X$, $\|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon$. En faisant tendre $m$ vers l'infini dans l'inégalité, on obtient que pour tout $n \geq N$ et $x \in X$, $\|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$. $(f_n)$ converge donc bien uniformément (vers $f$).

**Notation :** On note $\mathcal{C}_b(X,E)$ l'ensemble des fonctions continues bornées de $X$ dans $E$

**Remarques :**

- → Lorsqu'une suite de fonctions vérifie la propriété $(*)$, on dit qu'elle vérifie le critère de Cauchy uniforme.

- → Une suite de fonctions bornées $(f_n)$ de $X$ dans $E$ vérifie le critère de Cauchy uniforme si et seulement s'il s'agit d'une suite de Cauchy dans l'espace métrique $\mathcal{C}_b(X,E)$ muni de la distance induite par $\|.\|_\infty$ i.e.
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall m,n \geq N,\ \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$$

- → Une conséquence du théorème ci-dessus est que si $E$ est complet, alors l'espace métrique $\mathcal{C}_b(X,E)$ muni de la distance induite par $\|.\|_\infty$ est complet.

- → La négation du critère de Cauchy uniforme s'écrit de la manière suivante : il existe $\varphi$ et $\psi$ deux extractrices et une suite $(x_n)$ tels que pour tout $\left\|f_{\varphi(n)}(x_n) - f_{\psi(n)}(x_n)\right\| \nrightarrow 0$ ou d'une manière équivalente, quitte à extraire, qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left\|f_{\varphi(n)}(x_n) - f_{\psi(n)}(x_n)\right\| > \delta$.

**Proposition III.4.**

Soit $A$ une partie de $X$. On suppose que $(f_n) \in \mathcal{C}_b(X,E)^{\mathbb{N}}$ et que $E$ est complet. Soit $f$ une fonction continue de $X$ dans $E$. Si $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $A$, alors elle converge uniformément vers $f$ sur $\overline{A}$.

**Preuve :** La suite $(f_n)$ converge uniformément, elle vérifie donc le critère de Cauchy uniforme sur $A$, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n,m \geq N,\ \forall x \in A,\ \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n,m \geq N$ et $x \in A$, $\|f_n(x) - f_m(x)\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Pour tout $n,m \geq N$, la fonction $g : x \longmapsto f_n(x) - f_m(x)$ est continue, donc l'ensemble

$$\left\{x \in X,\ \|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\right\} = g^{-1}\left(B_f(0, \varepsilon/2)\right)$$

est fermé car il s'agit de l'image réciproque d'un fermé par une image continue (voie chapitre 11.3 des limites et continuité). On a de plus $A \subset \{x \in X,\ \|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \varepsilon\}$ et l'ensemble de droite est fermé donc

$$\overline{A} \subset \left\{x \in X,\ \|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \subset \{x \in X,\ \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon\}$$

On en déduit que pour tout $n,m \geq N$ et $x \in \overline{A}$, $\|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon$. $(f_n)$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur $\overline{A}$ et $E$ est complet donc converge uniformément sur $\overline{A}$ vers une certaine fonction $g$ continue qui coincide avec $f$ dans $A$. On a alors $(f-g)^{-1}(\{0\}) = \{x \in X, f(x) - g(x) = 0\} \supset A$. $(f-g)^{-1}(\{0\})$ est l'image réciproque d'un fermé par une fonction continue, il s'agit donc d'un fermé. On en déduit alors que

$$(f-g)^{-1}(\{0\}) = \overline{(f-g)^{-1}(\{0\})} \supset \overline{A}$$

On en déduit donc que $f$ et $g$ coïncident également sur $\overline{A}$ et que finalement $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $\overline{A}$.

## 3. Passage de la convergence simple à la convergence uniforme

**Théorème (Deuxième théorème de Dini) III.5.**

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. Si $(f_n)$ est une suite de fonctions croissantes de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction $f$ continue, alors $(f_n)$ converge uniformément vers $f$.

**Preuve :** Soit $\varepsilon > 0$. $f$ est une fonction continue sur le segment $[a, b]$ donc d'après le théorème de Heine (voir chapitre 11.3 sur les limites et continuité) $f$ est uniformément continue sur $[a, b]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $\eta > 0$ tel que

$$\forall s, t \in [a, b],\ |s - t| < \eta \Longrightarrow |f(s) - f(t)| < \varepsilon$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, \ldots, x_p \in [a, b]$ tels que $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_p = b$ et pour tout $i \in [\![0; p-1]\!]$, $|x_i - x_{i+1}| < \eta$. L'ensemble $\mathcal{X} = \{x_0, \ldots, x_p\}$ est fini donc $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $\mathcal{X}$. En effet, la convergence simple de $(f_n)$ vers $f$ sur $[a, b]$ nous permet d'affirmer pour tout $\varepsilon > 0$ l'existence de $N_0, \ldots, N_p \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $i \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \geq N_i$, $|f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$. On en déduit donc que pour tout $n \geq \max(N_0, \ldots, N_p)$ et tout $i \in [\![0; p]\!]$, $|f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$ i.e. $(f_n)$ converge uniformément sur $\mathcal{X}$. On en déduit donc que pour tout $n \geq \max(N_0, \ldots, N_p)$ et $x \in [a, b]$,

- → S'il existe $i \in [\![0; p]\!]$, $x = x_i$, alors on a

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$$

- → Sinon, il existe $i \in [\![0; p-1]\!]$ tel que $x \in ]x_i, x_{i+1}[$ et donc

$$f(x) - 2\varepsilon \underset{(1)}{<} f(x_i) - \varepsilon \underset{(2)}{<} f_n(x_i) \underset{(3)}{\leq} f_n(x) \underset{(4)}{\leq} f_n(x_{i+1}) \underset{(5)}{<} f(x_{i+1}) + \varepsilon \underset{(6)}{<} f(x) + 2\varepsilon$$

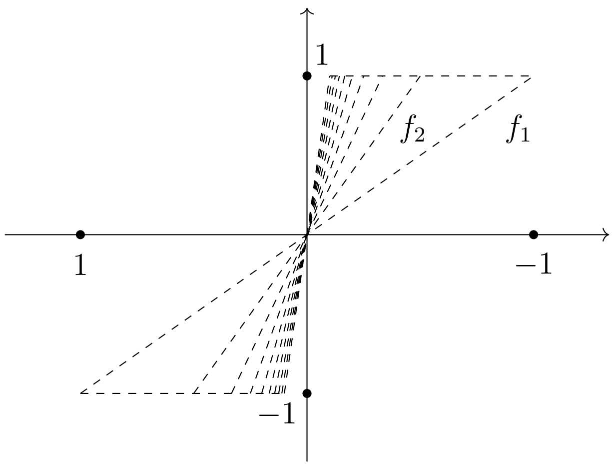
Justifions ces inégalités. Les inégalités (3) et (4) sont vraies par croissance de $f_n$. Les inégalités (2) et (5) sont vraies car $(f_n)$ converge uniformément sur $\mathcal{X}$. Les inégalités (1) et (6) sont vraies car $f$ est uniformément continue sur $[a, b]$ et $|x_i - x| < |x_{i+1} - x_i| < \eta$ et $|x_{i+1} - x| < |x_{i+1} - x_i| < \eta$.

On en déduit donc que $n \geq \max(N_0, \ldots, N_p)$ et $x \in [a, b]$, $|f_n(x) - f(x)| < 2\varepsilon$ et alors $(f_n)$ converge uniformément vers $f$.

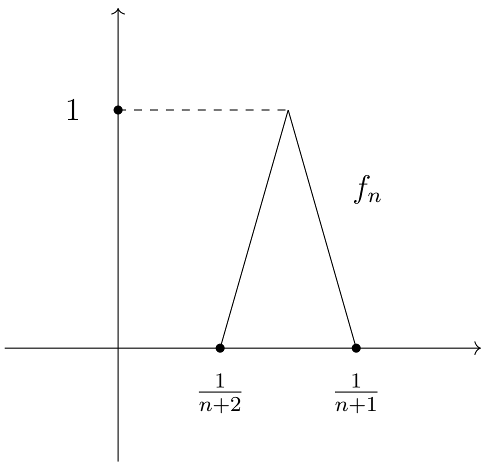
**Remarque :**

- → Ce théorème ne nécessite pas que les termes de la suite $(f_n)$ soient des fonctions continues.
- → Ce résultat est faux en général si on enlève la croissance des termes de la suite $(f_n)$. En effet, si on suppose que $(f_n)$ est définie par

$$\forall x \in [-1, 1],\ f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } x \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \\ 1 & \text{si } x \in \left]\frac{1}{n}, 1\right] \\ -1 & \text{si } x \in \left[-1, -\frac{1}{n}\right[ \end{cases}$$




On voit clairement sur le dessin que $(f_n)$ converge simplement vers la fonction $f$ qui vaut 1 sur $]0, 1]$, 0 en 0 et $-1$ sur $[-1, 0[$ et on peut facilement le montrer. Cependant, $(f_n)$ est une suite de fonctions continues et $f$ n'est pas continue, donc d'après la proposition II.3, $(f_n)$ ne peut pas converger uniformément vers $f$. On peut même trouver un exemple où le résultat est faux lorsqu'on ajoute la continuité de $f$ sans la croissance des $f_n$. En effet, si on considère la suite de fonctions $(f_n)$ définie par le dessin ci-dessus, on peut montrer (et on le voit sur le dessin) qui $(f_n)$ converge simplement vers la fonction nulle mais ne converge clairement pas uniformément.




**Exercice III.6.**

Soit $(g_n) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une suite de fonctions convexes et $g$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $(g_n)$ converge simplement vers $g$ et $(g_n')$ converge simplement vers une fonction continue. Montrer que $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que $(g_n')$ converge simplement vers $g'$.

**Théorème III.7.**

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. tels que $a \leq b$. Supposons que $(f_n) \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$. Soit $f$ une fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Si les deux propriétés suivantes sont vérifiées,

1. Il existe $K \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ est $K-$lipschitzienne.
2. $(f_n)$ converge simplement vers $f$.

Alors $(f_n)$ converge uniformément vers $f$.

**Preuve :** Montrons tout d'abord que $f$ est $K-$lipschitzienne. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x, y \in [a,b]$, $|f_n(x) - f_n(y)| \leq K|x-y|$. En faisant tendre $n$ vers l'infini, on obtient que $|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|$. Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta = \dfrac{\varepsilon}{K+1}$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, \dots, x_p \in [a,b]$ tels que $x_0 = a < x_1 < \dots < x_p = b$ et pour tout $i \in [\![0; p-1]\!]$, $|x_i - x_{i+1}| < \delta$. Par le même raisonnement que dans la preuve du théorème III.6, $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $\mathcal{X} = \{x_0, \dots, x_p\}$. Considérons donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et tout $i \in [\![0; p-1]\!]$, $|f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$. On a alors pour tout $n \geq N$ et $x \in [a,b]$,

→ S'il existe $i \in [\![0; p]\!]$ tel que $x = x_i$, alors

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$$

→ Sinon, il existe $i \in [\![0; p-1]\!]$ tel que $x \in ]x_i, x_{i+1}[$. On a alors

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(x) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| \\ &\leq K|x - x_i| + \varepsilon + K|x_i - x| < 2K\delta + \varepsilon \leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

On en déduit donc que pour tout $n \geq N$ et $x \in [a,b]$, $|f_n(x) - f(x)| \leq 3\varepsilon$ et donc $(f_n)$ converge uniformément vers $f$.

## Correction de l'exercice I.2. :

On commence par trouver la limite simple de $(f_n)$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 1 & \text{si } x \in ]-1,1[ \\ 0 & \text{si } x \in \{-1,1\} \\ -1 & \text{si } x \in ]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[ \end{cases}$$

On en déduit que la limite simple de la suite $(f_n)$ est la fonction $f$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in ]-1,1[ \\ 0 & \text{si } x \in \{-1,1\} \\ -1 & \text{si } x \in ]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[ \end{cases}$$

## Correction de l'exercice I.4. :

Bien entendu, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ est bornée car il s'agit d'une fonction continue sur un segment. Pour montrer que $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} f_n(x)$ converge vers $\|f\|_\infty$, il faut montrer d'abord que $\|f\|_\infty$ est bien définie i.e. que $f$ est bornée. En effet, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|f_n(x) - f(x)| < 1$ et alors $|f(x)| \leq 1 + |f_N(x)| \leq 1 + \|f_N\|_\infty$ donc $f$ est bien bornée. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\|f_n\|_\infty - \|f\|_\infty| \leq \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

## Correction de l'exercice I.6. :

On procède à chaque fois en deux étapes.

1. → **Convergence simple :** On a pour tout $x \in [0,1]$, $f_n(x) = n^a x^n(1-x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $(f_n)$ converge simplement vers la fonction nulle.

   → **Convergence uniforme :** $(f_n)$ converge uniformément vers 0 si et seulement si $\|f_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Il faut donc trouver la borne supérieure de $f_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a pour tout $n \geq 2$ et $x \in [0,1]$,

   $$f_n'(x) = 0 \iff n^a x^{n-1}(n-(n+1)x) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{n}{n+1}$$

   On peut alors tracer de tableau de variations de $f_n$.

| $x$ | $0$ | | $\frac{n}{n+1}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_n'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_n(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{n^{a+n}}{(n+1)^{n+1}}$ | $\searrow$ | $0$ |

   On en déduit que pour $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty = \dfrac{n^{a+n}}{(n+1)^{n+1}} = n^{a-1}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^{a-1}}{e}$. On en déduit donc que $\|f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si et seulement si $a < 1$, i.e. que $(f_n)$ converge uniformément vers la fonction nulle si et seulement si $a < 1$.

2. → **Convergence simple :** On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n(x) = n^a x e^{-nx} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $(f_n)$ converge simplement vers la fonction nulle.

→ **Convergence uniforme :** On procède de la même manière que précédemment. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$f_n'(x) = 0 \iff n^a(1-nx)e^{-nx} = 0 \iff x = \frac{1}{n}$$

On peut alors tracer le tableau de variations de $f_n$.

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{n}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_n'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_n(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $n^{a-1}e^{-1}$ | $\searrow$ | $0$ |

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n\|_\infty = n^{a-1}e^{-1}$, donc $\|f_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si et seulement si $a < 1$ i.e. $(f_n)$ converge uniformément vers la fonction nulle si et seulement si $a < 1$.

3. → **Convergence simple :** Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $(u_n) = (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc d'après le critère de d'Alembert, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On en déduit donc que $(f_n)$ converge simplement vers la fonction nulle

→ **Convergence uniforme :** Encore une fois, on procède de la même manière. On a pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \geq 2$

$$f_n'(x) = 0 \iff \frac{(nx^{n-1} - x^n)}{n!}e^{-x} \iff x = 0 \text{ ou } x = n$$

On peut donc tracer le tableau de variations de $f_n$.

| $x$ | $0$ | | $n$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_n'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_n(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{n^n}{n!}e^{-n}$ | $\searrow$ | $0$ |

On a donc pour tout $n \geq 2$, en utilisant la formule de Stirling,

$$\|f_n\|_\infty = f_n(n) = \frac{n^n}{n!}e^{-n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^n}{\sqrt{2n\pi}(n/e)^n}e^{-n} = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On en déduit donc que $(f_n)$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$.

## Correction de l'exercice III.2. :

Le résultat de l'exercice VI.6 du chapitre 11.5 est le suivant.

**Lemme III.8.**

Soit $K$ est un compact non vide de $E$, et $f : K \longrightarrow K$ est une fonction telle que pour tout $x, y \in K$, si $x \neq y$, alors $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$. $f$ admet un unique point fixe de $K$.

La différence entre les hypothèses de l'exercice du lemme et de l'exercice c'est que l'inégalité du lemme est stricte alors que cette de l'exercice résultat de la $1-$lipschitzianité ne l'est pas. Pour pouvoir appliquer le résultat du lemme, on va approcher $f$ par une suite de fonctions qui vérifient l'inégalité stricte.

Soit $a \in K$. On considère la suite de fonctions $(f_n)$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{K},\ f_n(x) = \frac{1}{n} f(a) + \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x)$$

On a pour tous $x, y \in K$ différents et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|f_n(x) - f_n(y)\| = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|f(x) - f(y)\| \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|x - y\| < \|x - y\|$$

On a de plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\|f_n(x) - f(x)\| = \frac{1}{n} \|f(a) - f(x)\| \leq \frac{1}{n} \underbrace{\sup\{\|x - y\|,\ x, y \in K\}}_{\text{fini car } K \text{ borné}}$$

et donc

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{n} \sup\{\|x - y\|,\ x, y \in K\} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$(f_n)$ converge alors uniformément vers $f$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, le lemme III.8 nous permet de dire que $f_n$ admet un unique point fixe $x_n$. $(x_n)$ est une suite à valeurs dans un compact, il existe donc une extractrice $\varphi$ et $x \in K$ tels que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$. $(f_n)$ est une suite de fonctions continues qui converge uniformément, donc on a d'après la proposition III.1, $f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$ et finalement $x = f(x)$. $f$ admet donc bien un point fixe.

## Correction de l'exercice III.6. :

La suite de fonctions $(f_n) = (g'_n)$ est une suite de fonctions croissantes car $(g_n)$ est une suite de fonctions convexes. De plus, $(f_n)$ converge simplement vers une fonction continue donc converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$ d'après le deuxième théorème de Dini. Posons alors $f$ la limite simple de $(f_n)$. On a alors

→ $(g_n)$ converge simplement vers $g$, donc il existe bien $a \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(g_n(a))$ converge.

→ Pour tout segment $S \subset \mathbb{R}$, $(g'_n|_S)$ converge uniformément vers $f|_S$.

donc d'après la proposition II.8 $(g_n)$ converge uniformément vers $g$ sur tout segment $S$ dans $\mathbb{R}$ et $g' = f$. Soit $M > 0$, remarquons maintenant que $g'|_U$ est limite uniforme de la suite de fonctions continues $(g'_n|_U)$ sur l'ouvert $U = ]-M, M[$ ce qui nous permet de dire d'après la proposition II.3 que $g'$ est continue sur $]-M, M[$. Or $\mathbb{R} = \bigcup_{M \in \mathbb{N}^*} ]-M, M[$, on déduit que $g'$ est continue sur $\mathbb{R}$ et que donc $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

* *

*

Document compilé par Omar Bennouna et révisé par Issam Tauil le 10/08/2022 pour cpge-paradise.com.

Si vous repérez une erreur, ou avez des remarques, prière de me contacter via l'adresse contact@cpge-paradise.com.