CHAPITRE 26

Systèmes linéaires

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $m, n \in \mathbb{N}^*$.

I Généralités

D'une manière générale, un système linéaire s'écrit de la manière suivante.

$$(S) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 & + \cdots + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ & \vdots & & & \\ a_{m,1}x_1 & + \cdots + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{cases} \iff AX = B$$

où $X = (x_1, \ldots, x_n)^T$ sont les inconnus, $A = (a_{i,j})_{\substack{i \in [\![1;m]\!] \\ j \in [\![1;n]\!]}}$ une matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $B = (b_1, \ldots, b_m)^T$ un vecteur de $\mathbb{K}^m$.

Vocabulaire : On appelle rang du système (S) le rang de la matrice A. De plus, on dit que (S) est

→ Compatible lorsque l'ensemble des solutions, noté $\mathcal{S}$, est non vide.

→ Homogène lorsque $B = 0$.

On notera $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de l'équation $AX = 0$.

Proposition I.1.

1. $\mathcal{S}_0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ de dimension $n - \operatorname{rg} A$.
2. $\mathcal{S}$ est soit vide, soit un sous-espace affine de $\mathbb{K}^n$ parallèle à $\mathcal{S}_0$. En d'autres termes, $\mathcal{S}$ est soit vide, soit $\mathcal{S} = X_0 + \mathcal{S}_0$ pour n'importe quel $X_0 \in \mathcal{S}$
3. $\mathcal{S} \neq \varnothing \iff B \in \operatorname{Im} A$

Preuve :

1. On a $\mathcal{S}_0 = \operatorname{Ker} A$ et donc par la formule du rang,
$$\dim \mathcal{S}_0 = \dim \operatorname{Ker} A = n - \dim \operatorname{Im} A = n - \operatorname{rg} A$$
2. Supposons $\mathcal{S} \neq \varnothing$ et soit $X_0 \in \mathcal{S}$. On a
$$X \in \mathcal{S} \iff AX = B \iff AX = AX_0 \iff A(X - X_0) = 0 \iff X - X_0 \in \mathcal{S}_0$$
3. $\mathcal{S} \neq \varnothing \iff \exists X \in \mathbb{K}^n \ AX = B \iff B \in \operatorname{Im} A$

On aura besoin du lemme assez connu suivant

Exercice I.2.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, alors $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^T$

II Système de Cramer

Dans cette partice, on suppose que $m = n$ et donc $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème II.1.

Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$
2. $\forall B \in \mathbb{K}^n,\ AX = B$ possède exactement une solution.
3. $\forall B \in \mathbb{K}^n,\ AX = B$ possède au moins une solution.
4. La seule solution de $\mathcal{S}_0$ est 0.
5. $\det A \neq 0$.

Si elles sont satisfaites, on dit que (S) est un système de Cramer.

Preuve :

→ (1) ⇒ (2) Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors pour tout $B \in \mathbb{K}^n$ l'unique solution de (S) est $X = A^{-1}B$.

→ (2) ⇒ (3) Clair.

→ (3) ⇒ (4) L'application $f_A : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto AX \end{cases}$ est surjective et donc, par égalité des dimensions finies, est aussi injective et donc son noyau $\mathcal{S}_0 = \{0\}$.

→ (4) ⇒ (5) Si la seule solution de $\mathcal{S}_0$ est 0, alors on a $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ et donc A est inversible, i.e. $\det A \neq 0$.

→ (5) ⇒ (1) Clair.

Proposition (Formule de Cramer) II.2.

Supposons que (S) est de Cramer et posons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A et $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ l'unique solution de (S). On a nécessairement

$$\forall k \in [\![1;n]\!],\ x_k = \frac{\det(C_1, \dots, C_{k-1}, B, C_{k+1}, \dots, C_n)}{\det A}$$

Preuve : On a $B = AX = x_1C_1 + \cdots + x_nC_n$ et alors pour tout $k \in [\![1;n]\!]$

$$\begin{aligned}\frac{\det(C_1, \dots, C_{k-1}, B, C_{k+1}, \dots, C_n)}{\det A} &= \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\det(C_1, \dots, C_{k-1}, C_i, C_{k+1}, \dots, C_n)}{\det A} \\ &= x_k \frac{\det(C_1, \dots, C_{k-1}, C_k, C_{k+1}, \dots, C_n)}{\det A} = x_k\end{aligned}$$

Exemple : Lorsque $n = 2$, on peut écrire (S) sous la forme suivante

$$(S) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

(S) est de cramer si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0$ et dans ce cas, la seule solution de (S) est

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b} \text{ et } y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$$

La propriété exposée dans cet exercice est essentielle et est utilisée dans le chapitre de réduction d'endomorphismes.

Exercice (Lemme d'Hadamard) II.3.

Soit $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1;n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $|a_{i,i}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{i,j}|$. Montrer que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Remarque : En transposant, on obtient un énoncé similaire mais en sommant sur la même colonne.

III Valeurs propres et systèmes homogènes

Vocabulaire : On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est un valeur propre de A s'il existe $X \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tel que $AX = \lambda X$.

Proposition III.1.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f_A : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \to \mathbb{K}^n \\ X & \mapsto AX \end{cases}$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. λ valeur propre de A
2. $\mathrm{Ker}(f_A - \lambda \,\mathrm{Id}) \neq \{0\}$
3. $\det(A - \lambda I_n) = 0$
4. Le système $(A - \lambda I_n)X = 0$ a une solution $X \neq 0$.

Preuve : Il s'agit d'une conséquence directe de ce qui précède.

Exercice III.2.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les valeurs propres complexes de A appartiennent à

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_f\left(a_{i,i}, \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{i,j}|\right)$$

Remarque : on peut améliorer cette borne en considérant aussi la transposée de A.

IV Matrices de permutation

Définition IV.1.

Pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on pose $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{i,j \in [\![1;n]\!]}$. On appelle cette matrice la matrice de permutation associée à σ.

On présente ces propriétés qu'on utilisera dans la suite comme exercice.

Exercice IV.2.

Soit $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n$.

1. Calculer $\det P_\sigma$.
2. Montrer que $P_\sigma P_{\sigma'} = P_{\sigma\circ\sigma'}$ et en déduire que $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$.
3. En déduire que $G = \{P_\sigma,\ \sigma \in \mathcal{S}_n\}$ muni du produit matriciel est isomorphe à $\mathcal{S}_n$.
4. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j\in[\![1;n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $X = (x_i)_{i\in[\![1;n]\!]} \in \mathbb{K}^n$. Calculer $P_\sigma A$, AP_σ et $P_\sigma X$.

V Comment déterminer $\operatorname{Ker} A$ en pratique ?

1. Explication de l'algorithme

Le but de cette partie est de répondre à la question suivante : Étant donnée $A = (a_{i,j})_{i,j\in[\![1;n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, comment déterminer $\operatorname{Ker} A$? Cette question est équivalente à déterminer l'ensemble des solutions du système $AX = 0$. Posons alors $r = \operatorname{rg} A$. Bien entendu, la réponse est claire lorsque $r = n$ car il s'agit d'un système de Cramer, on suppose donc que $r < n$.

$r \in [\![1; n-1]\!]$ donc il existe r lignes (qui forment une famille libre) de A telles que les $n-r$ lignes restantes sont combinaison linéaire de ces r lignes. Quitte à permuter les lignes de A, supposons que ces lignes sont les r premières. Écrivons alors le système $AX = 0$.

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & +\cdots+ & a_{1,n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & & & \\ a_{r,1}x_1 & +\cdots+ & a_{r,n}x_n & = & 0 \\ a_{r+1,1}x_1 & +\cdots+ & a_{r+1,n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & & & \\ a_{m,1}x_1 & +\cdots+ & a_{m,n}x_n & = & 0 \end{cases}$$

Il est facile de voir que si les r premières équations sont satisfaites, alors les $n-r$ suivantes aussi, donc il faut et il suffit de résoudre le système suivant.

$$(S) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 & +\cdots+ & a_{1,n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & & & \\ a_{r,1}x_1 & +\cdots+ & a_{r,n}x_n & = & 0 \end{cases}$$

C'est à dire en posant $B = (a_{i,j})_{i\in[\![1;r]\!],j\in[\![1;n]\!]}$, le système devient équivalent à $BX = 0$. Les lignes de B forment une famille libre, donc $\operatorname{rg} B = r$ et alors quitte à permuter les colonnes de B, on peut affirmer que les r premières colonnes de B forment une famille libre, et donc que la matrice $B' = (a_{i,j})_{i,j\in[\![1;r]\!]}$ est inversible. Posons alors $B'' = (a_{i,j})_{i\in[\![1;r]\!],j\in[\![n-r;n]\!]}$. En posant pour tout $X \in \mathbb{K}^n$, $X = \begin{pmatrix} X' \\ X'' \end{pmatrix}$ avec $X' \in \mathbb{K}^r$ et $X'' \in \mathbb{K}^{n-r}$, on peut écrire

$$(S) \iff BX = 0 \iff \begin{pmatrix} B' & B'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X' \\ X'' \end{pmatrix} = 0 \iff B'X' + B''X'' = 0 \iff X' = -B'^{-1}B''X''$$

Remarquons qu'étant donné X'', le système $B'X' = -B''X''$ est de Cramer et admet donc une unique solution $-B'^{-1}B''X''$. On en déduit alors que pour tout $X = \begin{pmatrix} X' \\ X'' \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$,

$$X \in \operatorname{Ker} A \iff X' = -B'^{-1}B''X'' \text{ et alors } \operatorname{Ker} A = \left\{ \begin{pmatrix} -B'^{-1}B''X'' \\ X'' \end{pmatrix},\ X'' \in \mathbb{K}^{n-r} \right\}$$

Ensuite, en notant pour tout $j \in [\![1; n-r]\!]$, $E_j = (\delta_{i,j})_{i \in [\![1;n-r]\!]}$ le $j-$ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^{n-r}$ on peut voir facilement que la famille

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -B'^{-1}B''E_1 \\ E_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -B'^{-1}B''E_{n-r} \\ E_{n-r} \end{pmatrix} \right\}$$

est une base de $\operatorname{Ker} A$ (nous conseillons au lecteur de le montrer à titre d'exercice). En pratique, les vecteurs de cette base peuvent être retrouvés en résolvant les systèmes

$$B'X' = -B''E_1,\ \dots\ , B'X' = -B''E_{n-r}$$

qui permettent de retrouver respectivement les vecteurs $-B'^{-1}B''E_1, \dots, -B'^{-1}B''E_{n-r}$ en utilisant le pivot de Gauss. On en déduit donc que finalement

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}\left(\left\{ \begin{pmatrix} -B'^{-1}B''E_1 \\ E_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -B'^{-1}B''E_{n-r} \\ E_{n-r} \end{pmatrix} \right\} \right)$$

Remarques :

→ Ici, on a supposé que les r première lignes de A forment une famille libre. Cette propriété est en général fausse. En pratique, après avoir trouvé des indices $i_1, \dots, i_r$ tels que les lignes de A d'indices $i_1, \dots, i_r$ forment une famille libre, la matrice B qu'on considérera sera égale à $\begin{pmatrix} L_{i_1} \\ \vdots \\ L_{i_r} \end{pmatrix}$ où $L_1, \dots, L_n$ sont les lignes de A.

→ On a également supposé que les r premières colonnes de B forment une famille libre quitte à permuter les colonnes. Pour être un peu plus rigoureux, on doit introduire quelques éléments. Si on pose $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de B, $\sigma : [\![1; n]\!] \longrightarrow [\![1; n]\!]$ une permutation telle que $(C_{\sigma(1)}, \dots, C_{\sigma(r)})$ forment une famille libre et $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{i,j \in [\![1;n]\!]}$. D'après l'exercice IV.2, on a

$$BP_\sigma = \begin{pmatrix} C_{\sigma(1)} & \dots & C_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$$

et alors on voit que le raisonnement ci-dessus est valable si on remplace B par $\tilde{B} = BP_\sigma$, i.e.

$$\tilde{B}X = 0 \iff X \in \operatorname{Vect}\left(\left\{ \begin{pmatrix} -\tilde{B}'^{-1}\tilde{B}''E_1 \\ E_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -\tilde{B}'^{-1}\tilde{B}''E_{n-r} \\ E_{n-r} \end{pmatrix} \right\} \right)$$

et donc on peut écrire

$$\begin{aligned} X \in \operatorname{Ker} A &\iff BX = 0 \iff \tilde{B}P_\sigma^{-1}X = 0 \\ &\iff P_\sigma^{-1}X \in \operatorname{Vect}\left(\left\{ \begin{pmatrix} -\tilde{B}'^{-1}\tilde{B}''E_1 \\ E_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -\tilde{B}'^{-1}\tilde{B}''E_{n-r} \\ E_{n-r} \end{pmatrix} \right\} \right) \\ &\iff X \in \operatorname{Vect}\left(\left\{ P_\sigma \begin{pmatrix} -\tilde{B}'^{-1}\tilde{B}''E_1 \\ E_1 \end{pmatrix}, \dots, P_\sigma \begin{pmatrix} -\tilde{B}'^{-1}\tilde{B}''E_{n-r} \\ E_{n-r} \end{pmatrix} \right\} \right) \end{aligned}$$

et donc en conclusion, on en déduit que

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}\left(\left\{P_\sigma \begin{pmatrix} -\tilde{B}'^{-1}\tilde{B}''E_1 \\ E_1 \end{pmatrix}, \dots, P_\sigma \begin{pmatrix} -\tilde{B}'^{-1}\tilde{B}''E_{n-r} \\ E_{n-r} \end{pmatrix}\right\}\right)$$

→ Dans le cas où A n'est pas carrée, on peut éliminer des lignes comme à l'étape 2 et appliquer exactement le même algorithme.

→ Le raisonnement ci-dessus montre en particulier que $\dim \operatorname{Ker} A = n - r$, c'est à dire la formule du rang $\operatorname{rg} A + \dim \operatorname{Ker} A = n$.

2. Algorithme en pratique

Résumons maintenant les étapes l'algorithme qui permet de trouver $\operatorname{Ker} A$.

→ Trouver le rang r de A (en échelonnant par exemple) et ensuite $L_{i_1}, \dots, L_{i_r}$ r lignes de A formant une famille libre.

→ Poser $B = \begin{pmatrix} L_{i_1} \\ \vdots \\ L_{i_r} \end{pmatrix}$. Trouver des indices $j_1, \dots, j_n$ tels que si $C_1, \dots, C_n$ sont les colonnes de B, alors les colonnes $C_{j_1}, \dots, C_{j_r}$ forment une famille libre et poser

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} C_{j_1} & \dots & C_{j_n} \end{pmatrix},\ \tilde{B}' = \begin{pmatrix} C_{j_1} & \dots & C_{j_r} \end{pmatrix},\ \tilde{B}'' = \begin{pmatrix} C_{j_{r+1}} & \dots & C_{j_n} \end{pmatrix}$$

→ Résoudre les systèmes

$$\tilde{B}'X' = -\tilde{B}''E_1,\ \dots\ , \tilde{B}'X' = -\tilde{B}''E_{n-r}$$

et poser $X_1, \dots, X_{n-r} \in \mathbb{K}^{n-r}$ les solutions de ces systèmes.

→ Poser pour tout $i \in [\![1; n-r]\!]$, $Y_i = \begin{pmatrix} X_i \\ E_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{i,j_1} \\ \vdots \\ y_{i,j_n} \end{pmatrix}$ où $(E_1, \dots, E_{n-r})$ est la base canonique de $\mathbb{K}^{n-r}$.

→ En posant pour tout $i \in [\![1; n-r]\!]$, $\tilde{Y}_i = \begin{pmatrix} y_{i,1} \\ \vdots \\ y_{i,n} \end{pmatrix}$ (on réordonne les coordonnées de Y_i en effectuant les opérations inverses appliquées à B), la famille $\mathcal{B} = (\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_{n-r})$ est une base de $\operatorname{Ker} A$.

Remarque : Si on reprend les notations de la remarque précédente, on a pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $j_k = \sigma(k)$ et donc $\tilde{Y}_i = P_\sigma Y_i$ et $\tilde{B} = BP_\sigma$.

Appliquons cet algorithme via l'exemple suivant.

Application : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 5 \\ -1 & -2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$. Trouver $\operatorname{Ker} A$.

→ **Étape 1 :** Trouver le rang r de A (en échelonnant par exemple) et ensuite $L_{i_1}, \dots, L_{i_r}$ r lignes de A formant une famille libre.

On échelonne la matrice A par lignes en effectuant les opérations suivantes.

$$\begin{aligned}
\text{ligne } 2 &\longleftarrow \text{ligne } 2 - \text{ligne } 1\\
\text{ligne } 3 &\longleftarrow \text{ligne } 3 - 2 \times \text{ligne } 1\\
\text{ligne } 4 &\longleftarrow \text{ligne } 4 + \text{ligne } 1\\
\text{ligne } 3 &\longleftarrow \text{ligne } 3 - \text{ligne } 2\\
\text{ligne } 4 &\longleftarrow \text{ligne } 4 - \text{ligne } 2
\end{aligned}$$

On obtient la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ce qui nous premet d'affimer que A est rang 2. De plus, on voit que la première et la deuxième ligne de A forment une famille libre.

→ **Étape 2 :** Poser $B = \begin{pmatrix} L_{i_1}\\ \vdots \\ L_{i_r} \end{pmatrix}$. Trouver des indices $j_1, \dots, j_n$ tels que si $C_1, \dots, C_n$ sont les colonnes de B, alors les colonnes $C_{i_1}, \dots, C_{i_r}$ forment une famille libre et poser

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} C_{j_1} & \dots & C_{j_n} \end{pmatrix}, \ \tilde{B}' = \begin{pmatrix} C_{j_1} & \dots & C_{j_r} \end{pmatrix}, \ \tilde{B}'' = \begin{pmatrix} C_{j_{r+1}} & \dots & C_{j_n} \end{pmatrix}$$

On pose donc

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Les deux premières colonnes de B ne forment pas une famille libre mais les deux dernières si, on permute alors les colonnes pour que les deux premières soient libres de la manière suivante

$$\begin{aligned}
\text{colonne 1 de } \tilde{B} &\longleftarrow \text{colonne 3 de } B\\
\text{colonne 3 de } \tilde{B} &\longleftarrow \text{colonne 1 de } B\\
\text{colonne 2 de } \tilde{B} &\longleftarrow \text{colonne 4 de } B\\
\text{colonne 4 de } \tilde{B} &\longleftarrow \text{colonne 2 de } B
\end{aligned}$$

C'est à dire $j_1 = 3$, $j_2 = 4$, $j_3 = 1$ et $j_4 = 2$. On pose alors

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ \tilde{B}' = \begin{pmatrix} 2 & 3\\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{B}'' = \begin{pmatrix} 1 & 2\\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

→ **Étape 3 :** Résoudre les systèmes

$$\tilde{B}'X' = -\tilde{B}''E_1, \ \dots \ , \tilde{B}'X' = -\tilde{B}''E_{n-r}$$

et poser $X_1, \dots, X_{n-r} \in \mathbb{K}^{n-r}$ les solutions de ces systèmes.

Ici, on a deux systèmes

$$\tilde{B}'X' = -\tilde{B}''E_1 \text{ et } \tilde{B}'X' = -\tilde{B}''E_2$$

i.e.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

C'est à dire

$$\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ 3x + 2y = -2 \end{cases}$$

En résolvant ces deux systèmes, on trouve que leurs solutions sont respectivement

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1/5 \\ -1/5 \end{pmatrix} \text{ et } X_2 = \begin{pmatrix} -2/5 \\ -2/5 \end{pmatrix}$$

→ **Étape 4 :** Poser pour tout $i \in [\![1; n-r]\!]$, $Y_i = \begin{pmatrix} X_i \\ E_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{i,j_1} \\ \vdots \\ y_{i,j_n} \end{pmatrix}$ où $(E_1, \ldots, E_{n-r})$ est la base canonique de $\mathbb{K}^{n-r}$.

On pose donc

$$Y_1 = \begin{pmatrix} -1/5 \\ -1/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } Y_2 = \begin{pmatrix} -2/5 \\ -2/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

→ **Étape 5 :** En posant pour tout $i \in [\![1; n-r]\!]$, $\tilde{Y}_i = \begin{pmatrix} y_{i,1} \\ \vdots \\ y_{i,n} \end{pmatrix}$ (on réordonne les coordonnées de Y_i), la famille $\mathcal{B} = (\tilde{Y}_1, \ldots, \tilde{Y}_{n-r})$ est une base de $\operatorname{Ker} A$.

On va effectuer la permutation inverse de celle de l'étape 2 aux lignes des Y_i, c'est à dire

$$\begin{aligned} &\text{ligne 3 de } \tilde{Y}_i \longleftarrow \text{ligne 1 de } Y_i \\ &\text{ligne 1 de } \tilde{Y}_i \longleftarrow \text{ligne 3 de } Y_i \\ &\text{ligne 4 de } \tilde{Y}_i \longleftarrow \text{ligne 2 de } Y_i \\ &\text{ligne 2 de } \tilde{Y}_i \longleftarrow \text{ligne 4 de } Y_i \end{aligned}$$

et donc on a dans ce cas

$$\tilde{Y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/5 \\ -1/5 \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{Y}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2/5 \\ -2/5 \end{pmatrix}$$

et alors on en déduit que

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2/5 \\ -2/5 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

On peut facilement vérifier que ce résultat est bien correct. En effet, les deux vecteurs ci-dessus forment une famille libre et

$$A\tilde{Y_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 5 \\ -1 & -2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/5 \\ -1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } A\tilde{Y_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 5 \\ -1 & -2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2/5 \\ -2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ces deux vecteurs sont donc bien dans $\operatorname{Ker} A$. On sait de plus que $\dim \operatorname{Ker} A = 2$ il est donc clair que $(\tilde{Y_1}, \tilde{Y_2})$ est une base de $\operatorname{Ker} A$ et alors $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}(\tilde{Y_1}, \tilde{Y_2})$.

Remarque culturelle : On a montré que

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}\left(\left\{P_\sigma \begin{pmatrix} -\tilde{B}'^{-1}\tilde{B}''E_1 \\ E_1 \end{pmatrix}, \dots, P_\sigma \begin{pmatrix} -\tilde{B}'^{-1}\tilde{B}''E_{n-r} \\ E_{n-r} \end{pmatrix}\right\}\right)$$

En fait, grâce à ce résultat, en posant pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, $e_j = (\delta_{i,j})_{i\in[\![1;n]\!]}$ le $j-$ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on remarque que le projecteur

$$\pi : \begin{cases} \operatorname{Ker} A & \longrightarrow \operatorname{Vect}(e_{\sigma^{-1}(r+1)}, \dots, e_{\sigma^{-1}(n)}) \\ x_1e_1 + \cdots + x_ne_n & \longmapsto x_{\sigma^{-1}(r+1)}e_{\sigma^{-1}(r+1)} + \cdots + x_{\sigma^{-1}(n)}e_{\sigma^{-1}(n)} \end{cases}$$

est un isomorphisme. En effet, si on pose pour tout $i \in [\![1;n-r]\!]$, $U_i = P_\sigma \begin{pmatrix} -\tilde{B}'^{-1}\tilde{B}''E_i \\ E_i \end{pmatrix}$, on peut facilement voir que pour tout $i \in [\![1;n-r]\!]$,

$$\pi(U_i) = e_{\sigma^{-1}(r+i)}$$

et les deux familles $(U_1, \dots, U_{n-r})$ et $(e_{\sigma^{-1}(r+1)}, \dots, e_{\sigma^{-1}(n)})$ sont toutes les deux des bases de respectivement $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Vect}(e_{\sigma^{-1}(r+1)}, \dots, e_{\sigma^{-1}(n)})$ donc π est bien un isomorphisme.

Ceci signifie que que tout élément de $\operatorname{Ker} A$ peut être identifié d'une manière unique via ses coordonnées d'incdices $\{\sigma^{-1}(r+1), \dots, \sigma^{-1}(n)\}$.

3. Comment résoudre $AX = B$ en pratique ?

On suppose toujours que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^n$ et on pose $r = \operatorname{rg} A$. Lorsque $r = n$, il s'agit d'un système de Cramer qu'on peut résoudre avec le pivot de Gauss par exemple. On sait d'après la proposition I.1 que l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ de l'équation $AX = B$ s'écrit sous forme de $\mathcal{S} = X_0 + \mathcal{S}_0$ avec X_0 une solution de $AX = B$ et $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de l'équation $AX = 0$, i.e. $\mathcal{S}_0 = \operatorname{Ker} A$. Pour déterminer $\operatorname{Ker} A$, il suffit d'appliquer ce qu'on vient de voir dans la section précédente. Il suffit donc de trouver une solution particulière X_0 du système. Nous ne détaillerons pas comment la trouver, mais il suffit de vérifier que $B \in \operatorname{Im} A$ (si ce n'est pas le cas le système n'a pas de solution), d'éliminer $n - r$ lignes, fixer $n - r$ variables et résoudre un système de Cramer de taille r.

Correction de l'exercice I.2. :

Posons $r = \operatorname{rg} A$. On sait qu'il existe $(P, Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ tels que

$$A = P \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}}_{J_r} Q$$

où J_r a r coefficients égaux à 1 sur la diagonale. On a alors $A^T = Q^T J_r^T P^T = Q^T J_r P^T$ et alors $\operatorname{rg} A^T = \operatorname{rg}(Q^T J_r^T P^T) = \operatorname{rg} J_r^T = r$.

Correction de l'exercice II.3. :

Supposons par l'absurde que $A \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Il existe alors $X = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{C}^n$ tel que $AX = 0$. Considérons alors $i_0 \in [\![1; n]\!]$ tel que $0 < |x_{i_0}| = \max\limits_{1 \leq j \leq n} |x_j|$. Le coefficient de position i_0 du vecteur AX est égal à 0, c'est à dire

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} x_j = 0 \quad \text{i.e.} \quad a_{i_0,i_0} x_{i_0} = - \sum_{j=1,\, j \neq i_0}^{n} a_{i_0,j} x_j$$

et alors

$$|a_{i_0,i_0}|\,|x_{i_0}| = \left| \sum_{j=1,\, j \neq i_0}^{n} a_{i_0,j} x_j \right| \leq |x_{i_0}| \sum_{j=1,\, j \neq i_0}^{n} a_{i_0,j}$$

$|x_{i_0}|$ est strictement positif, on peut donc simplifier des deux côtés et obtenir

$$|a_{i_0,i_0}| \leq \sum_{j=1,\, j \neq i_0}^{n} a_{i_0,j}$$

ce qui est en contradiction avec les hypothèses.

Correction de l'exercice II.3. :

C'est une application directe du lemme d'Hadamard. En effet, si λ est une valeur propre de A, alors $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible et donc il existe $i \in [\![1; n]\!]$ tel que

$$|a_{i,i} - \lambda| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}| \quad \text{i.e.} \quad \lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} B_f\left(a_{i,i}, \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{i,j}|\right)$$

Correction de l'exercice IV.2. :

1. On a

$$\det P_\sigma = \sum_{\gamma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\gamma) \prod_{i=1}^{n} [P_\sigma]_{\gamma(i),i} = \sum_{\gamma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\gamma) \underbrace{\prod_{i=1}^{n} \delta_{\gamma(i),\sigma(i)}}_{=0 \text{ lorsque } \gamma \neq \sigma} = \varepsilon(\sigma)$$

2. On a pour tout $i, j \in [\![1; n]\!]$,

$$\begin{aligned}[P_\sigma P_{\sigma'}]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} [P_\sigma]_{i,j} \times [P_{\sigma'}]_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma(k)} \delta_{k,\sigma'(j)} \\ &\underset{(1)}{=} \delta_{i,\sigma(\sigma^{-1}(i))} \delta_{\sigma^{-1}(i),\sigma'(j)} = \delta_{\sigma^{-1}(i),\sigma'(j)} \underset{(2)}{=} \delta_{i,\sigma \circ \sigma'(j)} = [P_{\sigma \circ \sigma'}]_{i,j}\end{aligned}$$

L'égalité (1) est vraie car le seul terme à priori non nul dans la somme $\sum_{k=1}^{n} \delta_{\sigma(i),k}\delta_{k,\sigma'(j)}$ est celui d'indice $k = \sigma^{-1}(i)$. L'égalité (2) est vraie car $\sigma^{-1}(i) = \sigma(j) \iff i = \sigma \circ \sigma'(j) = i$.
On en déduit donc qu'on a bien $P_\sigma P_{\sigma'} = P_{\sigma\circ\sigma'}$. En particulier, on a

$$P_\sigma P_{\sigma^{-1}} = P_{\sigma\circ\sigma^{-1}} = P_{\mathrm{Id}} = (\delta_{i,\mathrm{Id}(j)})_{i,j\in[\![1;n]\!]} = I$$

c'est dire que $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$.

3. Il suffit de considérer le morphisme $\psi : \begin{cases} \mathcal{S}_n & \longrightarrow G \\ \sigma & \longmapsto P_\sigma \end{cases}$ et de montrer qu'il est bijectif.

4. On a pour tout $i, j \in [\![1;n]\!]$

$$[AP_\sigma]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k} \times [P_\sigma]_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\delta_{k,\sigma(j)} = a_{i,\sigma(j)}$$

Et donc en posant $A = \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_n \end{pmatrix}$ où $C_1, \dots, C_n$ sont les colonnes de A, on peut voir facilement que

$$AP_\sigma = \begin{pmatrix} C_{\sigma(1)} & \dots & C_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que multiplier A à droite par P_σ revient à permuter les colonnes de A en appliquant σ aux indices.

On a encore une fois, pour tout $i, j \in [\![1;n]\!]$,

$$[P_\sigma A]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} [P_\sigma]_{i,k} \times [A]_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma(k)} a_{k,j} \underset{(1)}{=} a_{\sigma^{-1}(i),j}$$

L'inégalité (1) est vraie car $\delta_{i,\sigma(k)}$ est non nul si et seulement si $i = \sigma(k)$, i.e. $k = \sigma^{-1}(i)$. On en déduit donc que multiplier A à gauche par P_σ revient à permuter les lignes de A en appliquant σ^{-1} aux indices.

On a enfin pour tout $i \in [\![1;n]\!]$,

$$[P_\sigma X]_i = \sum_{k=1}^{n} [P_\sigma]_{i,k} \times x_k = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma(k)} x_k = x_{\sigma^{-1}(i)}$$

On en déduit donc que multiplier X à gauche par P_σ revient à permuter les coordonnées de X en appliquant σ^{-1} aux indices.

*　*
*

Document compilé par Omar Bennouna et Issam Tauil le 06/07/2022 pour cpge-paradise.com. Si vous repérez une erreur, ou avez des remarques, prière de me contacter via l'adresse contact@cpge-paradise.com.