CHAPITRE 28

Réduction d'endomorphisme

Notations

Introduisons tout d'abord quelques notations. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- → Si β est une base de E alors $[u]_\beta$ est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont les coordonnées de l'image de chaque élément de β par u dans la base β.
- → Pour toute base β de $\mathbb{K}^n$, on note $[A]_\beta = PAP^{-1}$ avec P la matrice dont les colonnes sont la représentation des éléments de β dans la base canonique.
- → Pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on écrit $A \simeq B$ s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = PBP^{-1}$.
- → Si F et G sont deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels, on écrit $F \approx G$ s'ils sont isomorphes, i.e. il existe $\phi \in \mathcal{L}(F, G)$ un endomorphisme inversible tel que $\phi(F) = G$.
- → On note $\mathrm{Com}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E),\ v \circ u = u \circ v\}$.
- → On note $\mathrm{Com}(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AB = BA\}$.
- → On note $\mathrm{VP}(u) = \{\lambda \in \mathbb{K},\ \mathrm{Ker}(u - \lambda \,\mathrm{Id}) \neq \{0\}\}$.
- → On note $\mathrm{VP}(A) = \{\lambda \in \mathbb{K},\ \mathrm{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}\}$.
- → Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{T}_a^+(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de taille a.
- → Pour toute famille $(x_1, \dots, x_r)$ de E (resp. $\mathbb{K}^n$) et toute base β de E (resp. $\mathbb{K}^n$), on note $[(x_1, \dots, x_r)]_\beta$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,r(\mathbb{K})}$ dont les colonnes sont les représentations des vecteurs x_i dans la base β.
- → Pour tout $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, on note $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$
- → Pour tout $i, j \in [\![1; n]\!]$, on note $E_{i,j} = (\delta_{i,k}\delta_{j,l})_{k,l \in [\![1;n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- → On note A^T la transposée de A.
- → On note $\langle A \rangle = \{PAP^{-1},\ P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})\}$.
- → Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on note $\langle P \rangle = \{QP,\ Q \in \mathbb{K}[X]\}$.
- → On note $\mathbb{K}[u] = \{P(u),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$.
- → On note $\mathbb{K}[A] = \{P(A),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$.
- → Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on note $Z(P)$ l'ensemble des racines de P.

Préambule : sommes directes et bases adaptées

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $F_1, \dots, F_r$ des sous espaces vectoriel de E.
On considère l'application

$$j : \begin{cases} F_1 \times \cdots \times F_r & \longrightarrow E \\ (x_1, \dots, x_r) & \longmapsto x_1 + \cdots + x_r \end{cases}$$

Par définition, $\mathrm{Im}\, j = F_1 + \cdots + F_r$. Cette somme est dite directe lorsque j est injective.

Proposition .1.

Supposons que E est de dimension finie. On considère pour tout $k \in [\![1;r]\!]$, $(e_{k,1},\dots,e_{k,n_k})$ une base de F_k.

1. $F_1 \times \cdots \times F_r$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $\dim F_1 \times \cdots \times F_r = \sum_{k=1}^{r} \dim F_k$.
2. Si les F_j sont en somme directe, alors $\dim \bigoplus_{k=1}^{r} F_k = \sum_{k=1}^{r} \dim F_k$
3. Si les F_j sont en somme directe, alors $(e_{1,1},\dots,e_{1,n_1},\dots,e_{r,1},\dots,e_{r,n_r})$ est une base de $\bigoplus_{k=1}^{r} F_k$.

Preuve :

1. On considère la famille $\mathcal{B} = \{(0,\dots,0,e_{k,l},0,\dots,0),\ k \in [\![1;r]\!],\ l \in [\![1;n_k]\!]\}$. $\mathcal{B}$ est une base de $F_1 \times \cdots \times F_r$ et $|\mathcal{B}| = \sum_{k=1}^{r} n_k = \sum_{k=1}^{r} \dim F_k$. D'où le résultat.
2. j est un morphisme injectif, donc
$$\sum_{k=1}^{r} \dim F_r = \dim F_1 \times \cdots \times F_r = \dim j(F_1 \times \cdots \times F_r) = \dim \bigoplus_{k=1}^{r} F_k$$
3. Posons $\mathcal{B}' = (e_{1,1},\dots,e_{1,n_1},\dots,e_{r,1},\dots,e_{r,n_r})$. On a
$$\begin{aligned}\mathrm{Vect}(\mathcal{B}') &= \mathrm{Vect}(e_{1,1},\dots,e_{1,n_1}) + \cdots + \mathrm{Vect}(e_{r,n_r},\dots,e_{r,n_r}) \\ &= F_1 \oplus \cdots \oplus F_r\end{aligned}$$
Donc $\mathcal{B}'$ est une famille génératrice (de $\bigoplus_{k=1}^{r} F_k$) de taille $n_1 + \cdots + n_r = \sum_{k=1}^{r} \dim F_k = \dim \bigoplus_{k=1}^{r} F_k$, et alors $\mathcal{B}'$ est une base de $\bigoplus_{k=1}^{r} F_k$.

Objectif du chapitre : Pour une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E)$ ou matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donnée, on souhaite trouver une base β ou une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ où la matrice de u (resp. $P^{-1}AP$) est simple

$$P^{-1}AP = [u]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ ou } P^{-1}AP = [u]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_1,\dots,\lambda_r \in \mathbb{K}$. Ou alors si u est nilpotente,

$$P^{-1}AP = [u]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

Ou alors

$$P^{-1}AP = [u]_\beta = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k \end{pmatrix}$$

avec pour tout $k \in [\![1;r]\!]$, J_k un bloc de Jordan, i.e.

$$J_k = \begin{pmatrix} a_k & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & a_k \end{pmatrix}$$

avec $a_k \in \mathbb{K}$. Ou alors sous forme de matrice compagnon

$$P^{-1}AP = [u]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

avec $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$.

I Stabilité

Dans cette partie, on considère u un endormorphisme de E.

Définition I.1.

Une sous-espace vectoriel F de E est stable par u si $u(F) \subset F$.

Proposition I.2.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Si F et G sont stables par u, alors $F + G$ et $F \cap G$ le sont aussi.
2. Si F est de dimension finie, est stable par u et $F \cap \operatorname{Ker} u = \{0\}$, alors $u(F) = F$.
3. u est une homothétie $\iff$ u laisse stable tout sous-espace de E

Preuve

1. Supposons que F et G sont stables par u et soient $x, y \in E$.
   → Supposons que $x \in F$ et $y \in G$. Montrons que $u(x+y) \in F + G$.
   Par stabilité de F et G, on a $u(x) \in F$ et $u(y) \in G$ donc $u(x+y) = u(x) + u(y) \in F + G$, donc $F + G$ est stable par u.
   → Supposons que $x \in F \cap G$.
   On a $x \in F$ et $x \in G$, donc $u(x) \in F$ et $u(x) \in G$ et alors $u(x) \in F \cap G$. On en déduit que $F \cap G$ est stable par u.
2. On considère l'application $\tilde{u} : \begin{cases} F & \longrightarrow F \\ x & \longmapsto u(x) \end{cases}$. On a $\operatorname{Ker} \tilde{u} = \operatorname{Ker} u \cap F$ et en utilisant le théorème du rang, on a
   $$\dim \operatorname{Ker} \tilde{u} + \operatorname{rg} \tilde{u} = \dim F$$
   donc
   $$\dim \operatorname{Ker} u \cap F + \dim u(F) = \dim F$$
   et finalement
   $$\dim u(F) = \dim F$$
   De plus, $u(F) \subset F$, donc $u(F) = F$.

3. Montrons le résultat par double implication. Remarquons tout d'abord que si $E = \{0\}$, alors le résultat est évident. Supposons donc que $E \neq \{0\}$.

   → ($\Rightarrow$) Le sens direct est une conséquence de la stabilité de F par multiplication par un scalaire.

   → ($\Leftarrow$) Supposons que u laisse stable tout sous-espace de E.
   Pour tout $x, y \in E \setminus \{0\}$, u laisse stable $\mathrm{Vect}(x)$ et $\mathrm{Vect}(y)$, donc il existe $\lambda_x, \lambda_y \in \mathbb{K}$ vérifiant
   $$u(x) = \lambda_x x \text{ et } u(y) = \lambda_y y$$
   u laisse aussi $\mathrm{Vect}(x+y)$ stable, donc il existe λ_{x+y} vérifiant $u(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y)$. On a alors
   $$\lambda_{x+y}(x+y) = u(x+y) = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$$
   et alors
   $$(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0$$

   - Si (x, y) est libre, alors $\lambda_{x+y} - \lambda_x = 0$ et $\lambda_{x+y} - \lambda_y = 0$, et alors $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$.
   - Si (x, y) est liée, i.e. il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda y$, alors
   $$\lambda_y y = u(y) = \lambda u(x) = \lambda\lambda_x x = \lambda_x y$$
   et donc, puisque $y \neq 0$, $\lambda_x = \lambda_y$.

   On a alors $x \longmapsto \lambda_x$ est constante sur $\mathbb{E} \setminus \{0\}$, il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $u(x) = \lambda x$. Cette propriété est en particulier vraie pour $x = 0$, donc pour tout $x \in E$, $u(x) = \lambda x$, i.e. u est une homothétie.

Exemple : Les sous espaces $\{0\}$, $\mathrm{Im}\, u^k$ et $\mathrm{Ker}\, u^k$ avec $k \in \mathbb{N}$ sont stables par u.

Proposition I.3.

Soit v un endomorphisme de E. Si u et v commutent, alors v laisse $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Im}\, u$ stables.
Plus généralement, $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $\mathrm{Ker}\, P(u)$ et $\mathrm{Im}\, P(u)$ sont stables par v.

Preuve : Supposons que u et v commutent.

→ Si $x \in \mathrm{Ker}\, u$, alors $u(v(x)) = u \circ v(x) = v \circ u(x) = v(0) = 0$, donc $v(x) \in \ker u$.

→ Si $y = u(x) \in \mathrm{Im}\, u$ alors $v(y) = u(v(x))$ donc $v(y) \in \mathrm{Im}\, u$.

→ Étant donné que u et v commutent, une récurrence simple permet de montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, u^k et v commutent également. Tout polynôme P en u est une combinaison linéaire des u^k qui commutent tous avec v, donc $P(u)$ et v commutent, et alors le point précédent nous permet d'affirmer que v laisse $\mathrm{Ker}\, P(u)$ et $\mathrm{Im}\, P(u)$ stables.

Remarque La réciproque est fausse en général. Prenons un contre-exemple. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On définit u et v comme suit :

$$\begin{cases} u(e_1) = 0 \\ u(e_2) = e_3 \\ u(e_3) = e_3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v(e_1) = e_1 \\ v(e_2) = 0 \\ v(e_3) = e_3 \end{cases}$$

On peut facilement voir que v laisse stable $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Im}\, u$, mais

$$\begin{cases} u \circ v(e_2) = 0 \\ v \circ u(e_2) = e_3 \end{cases}$$

Proposition I.4.

Soit F un sous-espace vectoriel de E, β_1 une base de F et β_2 une base d'un supplémentaire de F. En posant $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ la concaténation des deux bases et $p = \dim F = |\beta_1|$, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on a équivalence entre les propositions suivantes.

1. u laisse stable F.
2. $\exists (A, B, C) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}),\ [u]_\beta = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$

Preuve

→ (1) ⇒ (2) Supposons que u laisse stable F. Pour tout $e \in \beta_1$, $u(e) \in F = \mathrm{Vect}(\beta_1)$ car u stabilise F, donc les coefficients dans la famille β_2 de e sont nuls.

→ (2) ⇒ (1) Pour tout $e \in \beta_1$, $[u(e)]_\beta$ a des coefficients nuls dans les $|\beta_2|$ dernières coordonnées, donc $u(e) \in \mathrm{Vect}(\beta_1) = F$ pour tout $e \in \beta_1$. Par combinaison linéaire, on peut conclure que $u(F) \subset F$.

Proposition I.5.

Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $F_1, \ldots, F_r$ des sous-espaces vectoriels de E non réduits à $\{0\}$ de dimensions respectives $n_1, \ldots, n_r$. On suppose que $E = \bigoplus_{k=1}^{r} F_k$. Pour tout $j \in [\![1; r]\!]$, on considère β_j une base de F_j. Soit $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_r)$ la concaténation des β_j. On a alors pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on a équivalence entre les deux propositions suivantes.

1. u laisse stable F_j pour tout j.
2. $\exists (A_1, \ldots, A_r) \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{K}) \times \cdots \times \mathcal{M}_{n_r}(\mathbb{K}),\ [u]_\beta = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r \end{pmatrix}$

Preuve

→ (1) ⇒ (2) Soit $k \in [\![1; r]\!]$. Pour tout $e \in \beta_k$, $u(e) \in \mathrm{Vect}(\beta_k)$, donc la sous-matrice de $[u]_\beta$ contenant des colonnes de rang entre $|\beta_1| + \cdots + |\beta_{k-1}| + 1$ et $|\beta_1| + \cdots + |\beta_k|$, i.e. la représentation de l'image de la base β_k par u dans la base β s'écrit $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $A_k \in \mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{K})$. On en déduit donc directement que la matrice de u dans la base β s'écrit comme $\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r \end{pmatrix}$ avec $(A_1, \ldots, A_r) \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{K}) \times \cdots \times \mathcal{M}_{n_r}(\mathbb{K})$.

→ (2) ⇒ (1) De la même manière, pour tout $k \in [\![1; r]\!]$, pour tout $e \in \beta_k$, étant donné la forme de la matrice, on voit que tous les coefficients de $u(e)$ dans $\beta \setminus \beta_k$ sont nuls, donc $u(e) \in \mathrm{Vect}(F_k)$ et donc finalement $u(\mathrm{Vect}(\beta_k)) \subset F_k$ i.e. $u(F_k) \subset F_k$.

II Éléments propres

Définition II.1.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Une vecteur $x \in E$ est appelé vecteur propre de u lorsque $x \neq 0$ et qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Un tel scalaire λ est unique et est appelé valeur propre de u.

Proposition II.2.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a l'équivalence suivance

$$\lambda \text{ valeur propre de } u \iff \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}) \neq \{0\}$$

Preuve : La preuve de ce résultat ne présente pas de difficulté et est laissée comme exercice au lecteur.

Vocabulaire : Lorsque $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $E_{\lambda,u} = \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id})$ est appelé espace propre de u associé à λ. Lorsqu'il n'y a pas ambiguïté sur l'endomorphisme associé à cet espace, on notera simplement $E_{\lambda,u} = E_\lambda$.

Proposition II.3.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

1. Soit $x \in E \setminus \{0\}$. On a l'équivalence

$$x \text{ est un vecteur propre de } u \iff \text{La droite } \mathbb{K}x \text{ est stable par } u$$

2. Pour tout $x \in E$ l'application $\tilde{u} : \begin{cases} E_{\lambda,u} & \longrightarrow E_{\lambda,u} \\ x & \longmapsto \lambda x \end{cases}$ commute avec tout élément de $\mathcal{L}(E_{\lambda,u})$.

Preuve : Même chose pour ces deux propositions.

Proposition II.4.

Si E est de dimension finie non réduit à $\{0\}$ et que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors u possède au moins une valeur propre.

Preuve : Soit β une base de E. En posant $[u]_\beta = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1;n]\!]}$, on a

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ est une valeur propre de } u &\iff \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}) \neq \{0\} \\
&\iff \det([u]_\beta - \lambda I) = 0 \\
&\iff \begin{vmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} - \lambda \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}$$

L'application $\lambda \longmapsto \det([u]_\beta - \lambda I)$ est donc une application polynômiale dans $\mathbb{C}$ de degré n, elle admet donc au moins une racine λ, donc il existe au moins un $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifiant $\operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}) \neq \{0\}$, i.e. λ est une valeur propre.

Exercice II.5.

Supposons que $\mathbb{K}$ soit égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $n \geq 2$. Existe-t-il un plan P de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ tel que $P \setminus \{0\} \subset \mathrm{GL}(\mathbb{K})$?

Notation : Pour tout $u, v \in \mathcal{L}(E)$, on note $[u, v] = u \circ v - v \circ u$.

Proposition II.6.

Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $[u, v] = 0$. Si λ est une valeur propre de u, alors v laisse stable $E_{\lambda,u} = \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id})$.

Preuve : On a $[u, v] = 0$, donc $[u - \lambda\,\mathrm{Id}, v] = 0$, i.e. $u - \lambda\,\mathrm{Id}$ et v commutent, donc d'après la proposition I.3, v laisse stable $\mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id})$.

Exercice II.7.

On dit qu'une partie L de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ est irréductible lorsque les seuls sous-espaces vectoriels de E qui sont stables par tous les éléments de L sont $\{0\}$ et E. Soit L une partie irréductible de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ et u un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ qui commute avec tous les éléments de L. Montrer que u est une homothétie.

Proposition II.8.

Supposons que E est un espace vectoriel muni de $\|.\|$ et $u \in \mathcal{L}_c(E)$. Pour toute valeur propre λ de u, on a $|\lambda| \leq |||u|||$.

Preuve : Soit λ une valeur propre de u et x un vecteur propre pour λ, i.e. $u(x) = \lambda x$ et $x \neq 0$. On a alors

$$|\lambda|\,\|x\| = \|u(x)\| \leq |||u||| \times \|x\|$$

x est non nul, on peut donc simplifier par $\|x\|$ pour obtenir $|\lambda| \leq |||u|||$.

Remarque : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. Si F est stable par u, en considérant l'endomorphisme $v : \begin{cases} F & \longrightarrow F \\ x & \longmapsto u(x) \end{cases}$, on a $\mathrm{Ker}(v - \lambda\,\mathrm{Id}) = F \cap \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id})$.

III Endomorphismes et matrices diagonalisables

Définition III.1.

On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable lorsqu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1 \ldots \lambda_r \in \mathbb{K}$ tels que $E = E_{\lambda_1,u} + \cdots + E_{\lambda_r,u}$.

Lemme III.2.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $p \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des valeurs propres deux à deux distinctes de u et $x_1, \ldots, x_p \in E$ des vecteurs propres respectivement associés à $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. La famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre.

Preuve : Nous allons montrer ce lemme par récurrence sur p.

→ Pour le cas $p = 1$, $x_1$est un vecteur propre, il est donc non nul et alors la famille (x_1) est libre.

→ Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Supposons que la propriété est vraie pour p. Soit $\mu_1, \dots, \mu_{p+1} \in \mathbb{K}$ tels que

$$\mu_1 x_1 + \cdots + \mu_{p+1} x_{p+1} = 0 \quad (1)$$

En appliquant u est deux côtés, on obtient

$$\mu_1 \lambda_1 x_1 + \cdots + \mu_{p+1} \lambda_{p+1} x_{p+1} = 0 \quad (2)$$

En faisant $(1) \times \lambda_{p+1} - (2)$, on obtient

$$\mu_1(\lambda_{p+1} - \lambda_1)x_1 + \cdots + \mu_p(\lambda_{p+1} - \lambda_p)x_p = 0$$

Par hypothèse de récurrence, on a que la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre, donc pour tout $k \in [\![1; p]\!]$, $\mu_k(\lambda_{p+1} - \lambda_k) = 0$. $\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1}$ sont deux à deux distinctes par hypothèse donc pour tout $k \in [\![1; p]\!]$, $\mu_k = 0$ et alors (1) devient

$$\mu_{p+1} x_{p+1} = 0$$

ce qui finalement implique que pour tout $k \in [\![1; p+1]\!]$, $\mu_k = 0$ i.e. $(x_1, \dots, x_{p+1})$ est libre, d'où le résultat voulu.

Application : La famille $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}} = (x \longmapsto x^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$. En effet, en posant $u : f \longmapsto (x \longmapsto x f'(x))$, (f_α) est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes de u, elle est donc libre. On peut dire la même chose de la famille $(g_\beta)_{\beta \in \mathbb{C}}$, avec pour tout $\beta \in \mathbb{C}$, $g_\beta : x \longmapsto e^{\beta x}$.

Proposition III.3.

On suppose que E est de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes

1. u est diagonalisable.
2. Il existe une base de E composée de vecteurs propres de u.
3. Il existe une base de E telle que $[u]_\beta$ est diagonale.
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} E_{\lambda_k, u} = E$, avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de u.

Preuve

→ (1) ⇒ (2) Prenons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ comme dans la définition III.1. Quitte à éliminer les λ_i tels que $E_{\lambda_i, u} = \{0\}$, on peut supposer sans perte de généralité que $\forall i \in [\![1; p]\!]$ $E_{\lambda_i, u} \neq \{0\}$ et que les λ_i sont distincts. Le lemme III.2 nous permet de dire que toute famille de vecteurs $(x_1, \dots, x_p) \in E_{\lambda_1, u} \times \cdots \times E_{\lambda_p, u}$ est libre et que donc la somme $E = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} E_{\lambda_i, u}$ est directe.
Chacun de ces espaces étant de dimension finie (non nulle), on peut alors prendre, pour chaque i, une base $(b_i^1, \dots, b_i^{p_i})$ de E_i avec $p_i = \dim E_{\lambda_i, u}$. Il est clair que la concaténation de ces bases est une base de $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i, u}$ et que chaque élément de cette dernière est un vecteur propre de u.

→ (2) ⇒ (3) Si $(b_1, \dots, b_n)$ est une base de E formée de vecteurs propres de u, et que pour tout $i \in [\![1; p]\!]$, b_i est associé à la valeur propre λ_i, alors la matrice de u dans cette base est la matrice diagonale $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

→ (3) ⇒ (4) Prenons une base $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ qui rend $[u]_\beta$ diagonale. Il est alors clair que pour tout $i \in [\![1; p]\!]$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tel que β_i est un vecteur propre de u, associé à λ_i (les λ_i ne sont pas forcément distincts). On a alors en notant $\mathrm{VP}(u)$ l'ensemble (fini) des valeurs propres de u

$$E = Vect(\beta_1, \dots, \beta_n) \subset Vect(E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_n}) = \sum_{i=1}^{n} E_{\lambda_i} \subset \sum_{\lambda \in \mathrm{VP}(u)} E_\lambda$$

d'où le résultat.

→ (4) ⇒ (1) Direct.

Remarque 1 : Si u possède $n = \dim E$ valeurs propres différentes, alors u est diagonalisable et chaque espace propre est de dimension exactement une.
Ceci étant car, en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ces n valeurs propres différentes, que

$$n \geq \dim\left(\sum_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}\right) \underset{\text{lemme III.2}}{=} \dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_{\lambda_i}) \geq n$$

On a alors $\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}\right) = n = \dim E$, i.e. $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}$ et tous les $E_{\lambda_i,u}$ ne peuvent pas avoir une dimension strictement supérieure à 1 ou égale à 0, ils sont donc de dimension 1. On a donc bien les deux résultats voulus.

Remarque 2 : Lorsque u est diagonalisable, il est facile de retrouver son image et son noyau. En effet, considérons un base de vecteurs propres de u $\beta = (b_1, \dots, b_n)$ puis ordonnons la de manière à ce que les valeurs propres associées à $b_1, \dots, b_p$ soient non nulles et celles associées à $b_{p+1}, \dots, b_n$ soient nulles. Alors $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(b_1, \dots, b_p)$ et $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}(b_{p+1}, \dots, b_n)$.

Preuve
Une matrice diagonale à coefficients diagonaux tous non nulles dans $\mathbb{K}$ est inversible. Ainsi, dans la base β, $[u]_\beta$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} A & 0_{\mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})} \\ 0_{\mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{K})} & 0_{\mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})} \end{pmatrix}$$

Avec A une matrice diagonale à coefficients diagonaux non nuls. On en déduit donc que

$$\mathrm{Ker}(u) = \left\{ a \in E,\ \exists v \in \mathbb{K}^{n-p},\ [a]_\beta = \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{K}^p} \\ v \end{pmatrix},\ \right\} = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$$

$$\mathrm{Im}(u) = \left\{ a \in E,\ \exists v \in \mathbb{K}^{p},\ [a]_\beta = \begin{pmatrix} v \\ 0_{\mathbb{K}^{n-p}} \end{pmatrix},\ \right\} = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$$

Proposition III.4.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $w \in GL(E)$ et $v = w \circ u \circ w^{-1}$

1. $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u si et seulement si c'est une valeur propre de v et $E_{\lambda,v} = w(E_{\lambda,u})$.
2. u est diagonalisable si et seulement si v l'est.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$\begin{aligned} x \in E_{\lambda,v} &\iff w \circ u \circ w^{-1}(x) = \lambda x \\ &\iff u \circ w^{-1}(x) = \lambda w^{-1}(x) \\ &\iff w^{-1}(x) \in E_{\lambda,u} \iff x \in w(E_{\lambda,u}) \end{aligned}$$

D'où $E_{\lambda,v} = w(E_{\lambda,u})$ et donc

$$\lambda \in \mathrm{VP(v)} \iff E_{\lambda,v} = w(E_{\lambda,u}) \neq \{0\} \underset{w\in GL(E)}{\iff} E_{\lambda,u} \neq \{0\} \iff \lambda \in \mathrm{VP}(u)$$

2. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres de u et v. On a alors

$$\begin{aligned} u \text{ est diagonalisable } &\iff \sum_{i=1}^{r} E_{\lambda_i,u} = E \\ &\underset{w\in GL(E)}{\iff} \sum_{i=1}^{r} w(E_{\lambda_i,u}) = \sum_{i=1}^{r} E_{\lambda_i,v} = E \iff v \text{ est diagonalisable} \end{aligned}$$

Exercice III.5.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ ayant n valeurs propres distinctes et v un endomorphisme de E qui commute avec u. Montrer que v est diagonalisable et que v est un polynome en u.

Proposition III.6.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $E = \mathbb{K}^n$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}),\ \exists \Delta \in D_n(\mathbb{K}),\ P^{-1}AP = \Delta$
2. $f_A : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto AX \end{cases}$ est diagonalisable.
3. Il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ et β une base de E tels que u diagonalisable et $[u]_\beta = A$
4. Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ et pour tout β base de E, on a l'implication

$$[u]_\beta = A \Longrightarrow u \text{ est diagonalisable}$$

Preuve

→ (1) ⇒ (2) Soit β la base associée à la matrice P. Alors $[f_A]_\beta = P^{-1}AP = \Delta$ est diagonale.

→ (2) ⇒ (3) Soit $\beta = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et considérons l'application

$$u : \begin{cases} E & \longrightarrow E \\ \sum_{i=1}^{n} x_i e_i & \longmapsto \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \end{cases}$$

où $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = f_A(X)$ avec $X = (x_1, \ldots, x_n)^T$. Une vérification rapide nous permet de voir que $[u]_\beta = A$.

De plus, en considérant $\big((f_{1,i})_{i\in[\![1;n]\!]}, \ldots, (f_{n,i})_{i\in[\![1;n]\!]}\big)$ une base de vecteurs propres de f_A, il est facile de voir que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ telle que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $f_k = f_{k,1}e_1 + \cdots + f_{k,n}e_n$ est une base de vecteurs propres de u, ce qui nous permet d'affirmer que u est diagonalisable.

→ (3) ⇒ (1) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et β une base tel que $[u]_\beta = A$. Soit γ une base de diagonalisation de u et P la matrice de passage de γ à β. On a alors

$$[u]_\gamma = P[u]_\beta P^{-1} = P^{-1}AP$$

On a de plus, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, si e est le $i-$ème vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et b_i estl e $i-$ème vecteur de la base γ, alors il existe $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tel que $u(b_i) = \lambda_i b_i$, i.e., en passant aux matrices dans la base γ, $[u]_\gamma e_i = \lambda e_i$, donc il existe une matrice diagonale Δ telle que $[u]_\gamma = \Delta$. On en déduit donc finalement que $A = P^{-1}\Delta P$.

→ (4) ⇔ (1) Laissé comme exercice au lecteur.

Vocabulaire : Lorsque A vérifie l'une de ces propriétés, on dit que A est diagonalisable.

IV Action des polynômes

1. Rappels

L'algèbre des polynomes $\mathbb{K}[X]$ agit naturellement sur $\mathcal{L}(E)$. Plus exactement, si $P = \sum_0^p a_k X^k$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ alors on définit

$$\phi_u : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ P & \longmapsto P(u) = \sum_{k=0}^p a_k u^k \end{cases}$$

ϕ_u est alors un morphisme d'algèbre unitaire. En particulier, $I_u := \mathrm{Ker}(\phi_u)$ est un idéal.

Rappel IV.1.

Soit $(\mathcal{A}, +, .)$ un anneau commutatif. Un sous ensemble I de $\mathcal{A}$ est appelé idéal lorsque

→ $(I, +)$ est un sous groupe de $(\mathcal{A}, +)$.

→ Pour tout $x \in \mathcal{A}$ et $i \in I$, $ix \in I$.

I est dit principal lorsqu'il est engendré par un seul élément i.e. il existe $x \in \mathcal{A}$ tel que $I = \langle x \rangle := x\mathcal{A}$.
Un anneau commutatif $\mathcal{A}$ est dit principal si tout idéal de $\mathcal{A}$ est principal.
On notera en particulier que $\mathbb{K}[X]$ est principal lorsque $\mathbb{K}$ est un corps.

Si ce dernier est non trivial, chose toujours vraie en dimension finie, alors il est engendré par un unique polynome unitaire μ_u, appelé polynome minimal de u. Autrement dit si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $P(u) = 0$, alors $P \in I_u$, c'est à dire qu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X) = Q(X)\mu_u(X)$, i.e. $\mu_u | P$.

$\mathbb{K}[X]$ agit similairement sur les matrices carrées et commute avec les automorphismes interieurs (i.e. les automorphismes de la forme $M \longmapsto PMP^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$) de conjugaison i.e. pour tout $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$, $Q(PAP^{-1}) = PQ(A)P^{-1}$.

Vocabulaire : Un élement de I_u, i.e. un polynôme P tel que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ est appelé un polynôme annulateur de u.

Proposition IV.2.

Soit x un vecteur propre de u de valeur propre associée λ. Les proposition suivantes sont vraies.

1. $\forall P \in \mathbb{K}[X],\ P(u)(x) = P(\lambda)x$
2. Si $P \in I_u$ alors $P(\lambda) = 0$
3. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\mu_u(\lambda) = 0 \iff \lambda$ valeur propre de u.
   En particulier, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il existe $(l_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{VP}(u)} \in {\mathbb{N}^*}^{\mathrm{VP}(u)}$ tel que
$$\mu_u(X) = \prod_{\lambda \in \mathrm{VP}(u)} (X - \lambda)^{l_\lambda}$$

Preuve :

1. On peut montrer par une récurrence rapide que $\forall k \geq 0\ u^k(x) = \lambda^k x$ (avec par convention $0^0 = 1$). Ainsi, si $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, alors $P(u)(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k \cdot u^k(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k \cdot \lambda^k x = P(\lambda)x$.
2. On sait que $0 = P(u)(x) = P(\lambda)x$ et donc $P(\lambda) = 0$ car $x \neq 0$.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$
   → $(\Leftarrow)$ Il suffit d'appliquer le point (2) pour $P = \mu_u$.
   → $(\Rightarrow)$ $\mu_u(\lambda) = 0$, on peut donc écrire $\mu_u(X) = (X - \lambda)Q(X)$. On a alors
   $$0 = \mu_u(u) = (u - \lambda \operatorname{Id}) \circ Q(u)$$
   Si λ n'est pas une valeur propre de u, la proposition II.2 nous permet d'affirmer que $u - \lambda \operatorname{Id}$ est inversible et que donc $Q(u) = 0$, ce qui contredit la minimalité de μ_u. Donc λ est bien une valeur propre de u.

Exemple : Soit p un projecteur different de 0 et Id. On a $\mu_p(X) = X^2 - X$.

Exercice IV.3.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ u = \operatorname{Id}$ et $u \neq \pm \operatorname{Id}$. Montrer que $\mu_u = X^2 - 1$.

2. Décomposition des noyaux

Proposition (Lemme de décomposition des noyaux) IV.4.

Soit $P_1, \ldots, P_r$ des éléments de $\mathbb{K}[X]$, deux à deux premiers entre eux et $u \in \mathcal{L}(E)$. On a $\operatorname{Ker} P_1 \ldots P_r(u) = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker} P_i(u)$. En particulier, en considérant le cas où $P_i(X) = X - \lambda_i$ avec pour tout i, λ_i une valeur propre de u, on retrouve que les espaces propres sont en somme directe.

Preuve : Montrons le résultat pour $r = 2$.
Soit P et Q deux polynômes premiers entre eux et soit $x \in \operatorname{Ker} P(u) \cap \operatorname{Ker} Q(u)$.
P et Q sont premiers entre eux et donc par Bezout, on dispose de $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tel que $AP + BQ = 1$.
On a alors $x = AP(u)(x) + BQ(u)(x) = 0 + 0 = 0$ et alors $\operatorname{Ker} P(u) \cap \operatorname{Ker} Q(u) = \{0\}$. $\operatorname{Ker} P(u)$ et $\operatorname{Ker} Q(u)$ sont donc bien en somme directe.
Montrons à présent que $\operatorname{Ker} PQ(u) = \operatorname{Ker} P(u) \oplus \operatorname{Ker} Q(u)$.

→ $(\supset)$ Si $x \in \operatorname{Ker} P(u) \oplus \operatorname{Ker} Q(u)$, alors en posant $x = x_{\operatorname{Ker} P(u)} + x_{\operatorname{Ker} Q(u)}$ on retrouve

$$PQ(u)(x) = Q(u) \circ P(u)\left(x_{\operatorname{Ker} P(u)}\right) + P(u) \circ Q(u)\left(x_{\operatorname{Ker} Q(u)}\right) = 0$$

→ $(\subset)$ Soit $x \in \operatorname{Ker} PQ(u)$. La relation obtenue via Bezout nous permet d'écrire

$$x = \underbrace{AP(u)(x)}_{\in \operatorname{Ker} Q(u)} + \underbrace{BQ(u)(x)}_{\in \operatorname{Ker} P(u)}$$

Enfin, pour généraliser pour $r \geq 2$, on peut le faire simplement de la manière suivante. Soit $P_1, \ldots, P_r \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux. On a

$$\operatorname{Ker} P_1 \ldots P_r(u) = \operatorname{Ker} P_1(u) \oplus \operatorname{Ker} P_2 \ldots P_r(u) = \cdots = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker} P_i(u)$$

Proposition IV.5.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ (non constant) irréductible et prenons l'unique $l \in \mathbb{N}$ tel que $P^l | \mu_u$ et $P^{l+1} \nmid \mu_u$, alors
$$\operatorname{Ker}(P^0(u)) \subsetneq \operatorname{Ker}(P^1(u)) \subsetneq \cdots \subsetneq \operatorname{Ker}(P^l(u)) = \operatorname{Ker}(P^{l+1}(u)) = \ldots$$

Preuve :
Les inclusions sont faciles à voir et donc c'est surtout le caractère strict ou égal qui nous intéresse. De plus, P peut être supposé unitaire.

- Soit $k \in \mathbb{N}$, si $\operatorname{Ker}(P^k(u)) = \operatorname{Ker}(P^{k+1}(u))$ alors $\forall i \geq k \;\operatorname{Ker}(P^k(u)) = \operatorname{Ker}(P^i(u))$

  En effet, le résultat est vrai pour $i = k; k+1$. Supposons le résultat vrai pour $i-1$ avec $i \geq k+2$ et montrons notre assertion par récurrence.

  Soit $x \in \operatorname{Ker}(P^i(u))$, alors $P^{i-1} \circ P(u)(x) = 0$ et donc
  $$P(u)(x) \in \operatorname{Ker}(P^{i-1}(u)) \underset{H.R.}{=} \operatorname{Ker}(P^k(u))$$

  Ainsi
  $$P^{k+1}(u)(x) = P^k \circ P(u)(x) = 0$$
  et donc $x \in \operatorname{Ker}(P^{k+1}(u)) = \operatorname{Ker}(P^k(u))$

- Avec l'égalité ci-haut en tête, il suffit de vérifier que $\operatorname{Ker}(P^{l-1}(u)) \neq \operatorname{Ker}(P^l(u)) = \operatorname{Ker}(P^{l+1}(u))$

  - Ecrivons $\mu_u = P^l Q$ avec $P \wedge Q = 1$ (P est irréductible). On a alors
    $$E = \operatorname{Ker}(\mu_u(u)) = \operatorname{Ker}(P^l Q(u)) = \operatorname{Ker}(P^l(u)) \bigoplus \operatorname{Ker}(Q(u))$$

    Similairement
    $$E = \operatorname{Ker}(P^{l+1}(u)) \bigoplus \operatorname{Ker}(Q(u))$$

    Ainsi
    $$\operatorname{Ker}(P^l(u)) \bigoplus \operatorname{Ker}(Q(u)) = \operatorname{Ker}(P^{l+1}(u)) \bigoplus \operatorname{Ker}(Q(u))$$

    Ce qui oblige, vu que $\operatorname{Ker}(P^l(u)) \subset \operatorname{Ker}(P^{l+1}(u))$, que $\operatorname{Ker}(P^l(u)) = \operatorname{Ker}(P^{l+1}(u))$

  - Par absurde supposons $\operatorname{Ker}(P^{l-1}(u)) = \operatorname{Ker}(P^l(u))$. Alors
    $$E = \operatorname{Ker}(P^l(u)) \bigoplus \operatorname{Ker}(Q(u)) = \operatorname{Ker}(P^{l-1}(u)) \bigoplus \operatorname{Ker}(Q(u)) = \operatorname{Ker}(P^{l-1}Q(u))$$

    Et donc $P^{l-1}Q(u) = 0$ i.e. $P^l Q = \mu_u | P^{l-1}Q$, ce qui est clairement faux

Remarque : En décomposant P en irréductibles, on obtient comme conséquence la généralisation suivante :
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant et $l \in \mathbb{N}$ le plus petit entier tel que $P^l \wedge \mu_u = P^{l+1} \wedge \mu_u$, alors
$$\operatorname{Ker}(P^0(u)) \subsetneq \operatorname{Ker}(P^1(u)) \subsetneq \cdots \subsetneq \operatorname{Ker}(P^l(u)) = \operatorname{Ker}(P^{l+1}(u)) = \ldots$$

Proposition IV.6.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim E < +\infty$. Les propriétés suivantes sont équivalentes

1. u est diagonalisable.
2. u est annulé par un polynôme scindé à racines simples (dans $\mathbb{K}$)
3. μ_u est scindé à racines simples.

Bien entendu, on possède un théorème similaire pour les matrices.

Proposition IV.7.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. A est diagonalisable.
2. A est annulé par un polynôme scindé à racines simples (dans $\mathbb{K}$).
3. μ_A est scindé à racines simples.

→ (1) ⇒ (2) A est diagonalisable, il existe donc $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que que A est semblable à $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Notons $\delta_1, \ldots, \delta_r$ tous les scalaires λ_i en enlevant les doublons et considérons le polynôme scindé à racines simples $P(x) = \prod_{i=1}^{r}(X - \delta_i)$. On peut facilement vérifier que

$$P(D) = \operatorname{diag}(P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n)) = 0$$

→ (2) ⇒ (3) Soit P un polynôme scincé à racines simples annulant A. On sait que $\mu_A | P$ ($P \neq 0$ et μ_A non constant), donc μ_A est bien scindé à racines simples.

→ (3) ⇒ (1) Écrivons $\mu_A = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)$ avec les λ_i distincts. On a alors d'après le lemme de décomposition des noyaux

$$E = \operatorname{Ker} \mu_u(u) = \bigoplus_{i=1}^{r} Ker(u - \lambda_i \operatorname{Id})$$

Considérons pour tout i, β_i une base de $\operatorname{Ker}(u - \lambda_i \operatorname{Id})$ puis posons $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_r)$ la concaténation de ces bases. β est une base de E. On a alors $[A]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{l_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r I_{l_r} \end{pmatrix}$ et donc A est bien diagonalisable.

Exemple : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $A^m = I_n$ alors A est diagonalisable étant donné que

$$X^m - 1 = \prod_{\omega \in U_m} (X - \omega)$$

est un polynôme annulateur de u scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.

En pratique, pour des corps algébriquement clos tel que $\mathbb{C}$, tout polynôme est scindé, donc dire qu'un polynome P non constant est scindé à racines simples est équivalent à ce que $P \wedge P' = 1$ ou à ne pas avoir de racines multiples i.e. ne pas avoir de racine commune à P et P'. Dans l'exemple précédant, si $m \geq 2$, alors $Z(mX^{m-1}) = \{0\}$ et 0 n'est pas racine de X^{m-1}. De même

$$X^m - 1 \wedge mX^{m-1} = (X^m - 1) \wedge X^{m-1} = (X^m - 1 - X \times X^{m-1}) \wedge X^{m-1} = 1$$

Finalement, la notion de diagonalisabilité passe aux sous-espaces. Plus exactement :

Proposition IV.8.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable et F un sous espace vectoriel de E. Si u stabilise F (i.e. $u(F) \subset F$) alors $v := u|_F^F$ est diagonalisable.

Preuve : Soit P un polynome scindé à racines simples tel que $P(u) = 0$. On a alors $P(v) = 0$, v est annulé par un polynôme scindé à racines simple, c'est donc un endomorphisme diagonalisable.

Remarque : Pour les endomorphismes diagonalisables, les espaces stables et $\mathrm{Com}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E),\ v \circ u = u \circ v\}$ sont faciles à caractériser. On peut voir cela à partir des deux exercices ci-dessous.

Exercice IV.9.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ distinctes. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes

1. $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E stable par u.
2. $F = \bigoplus_{i=1}^{s} F \cap E_{\lambda_i,u}$.
3. Il existe une famille $(F_i)_{i \in [\![1;s]\!]}$ de sous-espaces vectoriels de E telle que pour tout $i \in [\![1;s]\!]$ $F_i \subset E_{\lambda_i,u}$ et $F = \bigoplus_{i=1}^{s} F_i$.

Exercice IV.10.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ distinctes et soit β une base de E telle que $[u]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{l_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_s I_{l_s} \end{pmatrix}$, avec $(l_1, \dots, l_s) \in [\![1;n]\!]$ tel que $l_1 + \dots l_s = n$.
Montrer que

$$\mathrm{Com}(u) = \left\{ v \in \mathcal{L}(E),\ \exists (A_1, \dots, A_s) \in \mathcal{M}_{l_1}(\mathbb{K}) \times \dots \times \mathcal{M}_{l_s}(\mathbb{K}),\ [v]_\beta = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_s \end{pmatrix} \right\}$$

En déduire une autre solution de l'exercice III.5.

3. Compléments : projecteurs spéctraux et codiagonalisation

Proposition IV.11.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ distinctes. Les propositions suivantes sont vraies.

1. $\mu_u = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)$
2. Soit (L_i) les interpolateurs de Lagrange des (λ_i), i.e. pour tout i, L_i est l'unique polynôme de degré $r-1$ tel que pour tout $k \neq i$ $L_i(\lambda_k) = 0$ et $L_i(\lambda_i) = 1$. On a $L_1 + \cdots + L_r = 1$ et $\forall i \neq j,\ \mu_u | L_i L_j$.
3. En posant $p_i = L_i(u)$. Alors p_i est le projecteur sur $E_{\lambda_i,u}$ parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} E_{\lambda_j,u}$.

1. La proprosition IV.5 donne le fait que μ_u est scindé à racines simples car u est diagonalisable. Ainsi, il existe $\delta_1, \ldots, \delta_r \in K$ deux à deux distincts tels que $\mu_u = \prod_{i=1}^{s}(X - \lambda_i)$ où les λ_i sont distincts. De plus, d'après la proposition IV.2
$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \mu_u(\lambda) = 0 \iff \lambda \in \mathrm{VP}(u)$$
et donc finalement $\mu_u = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)$
2. Posons $P = L_1 + \cdots + L_r - 1$. Alors pour tout $i \in [\![1; r]\!]$ $P(\lambda_i) = 1 - 1 = 0$. Ainsi, étant donne que $\mu_u(X) = \prod_{i=1}^{s}(X - \lambda_i)$, $\mu_u | P$ et $\deg P \leq r - 1$ et alors $P = 0$ i.e. $L_1 + \cdots + L_r = 1$. Finalement, pour tous $i \neq j$ et tout $k \in [\![1; r]\!]$, $L_i L_j(\lambda_k) = 0$ et donc pour tous $i \neq j$ et tout $k \in [\![1; r]\!]$, $(X - \lambda_k) | L_i L_j$ i.e. $\mu_u | L_i L_j$ si $i \neq j$.
3. Soit $j \in [\![1; r]\!]$ et $x \in E_{\lambda_j,u}$. On a pour tout $i \in [\![1; r]\!]$, $L_i(u)(x) = L_i(\lambda_j)x = \delta_{i,j}x$. En considérant pour tout $i \in [\![1; r]\!]$, β_i une base de $E_{\lambda_i,u}$, on voit que pour tout $j \in [\![1; r]\!]$, pour tout $i \in [\![1; r]\!]$ et $e \in \beta_j$, $L_i(u)(e) = e$ si $i = j$ et 0 sinon. On a aussi clairement $L_i(u) \circ L_i(u) = L_i(u)$, d'où le résultat.

Exercice IV.12.

Soit $S \subset \mathcal{L}(E)$ un ensemble non vide d'endomorphismes diagonalisables de E. Montrer que les éléments de S sont codiagonalisables (c'est à dire que leurs matrices sont toutes diagonales dans une même base) si et seulement si ils commutent tous deux à deux, i.e.
$$\forall (u, v) \in S^2,\ u \circ v = v \circ u$$

Exercice IV.13.

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique différente de 2 et $m, n \geq 1$. Montrer que s'il existe $\varphi : \mathrm{GL}_m(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ morphisme de groupes injectif alors $m \leq n$. En particulier, si $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sont isomorphes alors $m = n$.

Exercice IV.14.

Dans cet exercice, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que u^2 soit diagonalisable. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, u^2$.

V Polynome caractéristique

1. Généralités

Soit E un espace vectoriel **de dimension finie** $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Proposition V.1.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. λ est une valeur propre de u si et seulement si $\det(u - \lambda \operatorname{Id}) = 0$
2. Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblables, alors $\det(A - XI_n) = \det(B - XI_n)$. En particulier, la quantité $\det([u]_\beta - XI_n)$ est indépendante de la base β. On appelle alors polynôme caractéristique de u le polynôme

$$\chi_u(X) = \det(XI_n - [u]_\beta) = (-1)^n \det([u]_\beta - XI_n)$$

Preuve :

1. $\lambda \in \mathrm{VP}(u) \Longleftrightarrow \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}) \neq \{0\} \underset{\text{dimension finie}}{\Longleftrightarrow} u - \lambda \operatorname{Id} \notin \mathrm{GL}(E) \Longleftrightarrow \det(u - \lambda \operatorname{Id}) = 0$
2. $\det(PAP^{-1} - X \operatorname{Id}) = \det(P(A - \lambda \operatorname{Id})P^{-1}) = \det(P)\det(P^{-1})\det(A - X \operatorname{Id}) = \det(A - X \operatorname{Id})$

Remarque : le point 1 se reformule de la manière suivante

$$\lambda \in \mathbb{K} \text{ est une valeur propre de } u \Longleftrightarrow \chi_u(\lambda) = 0$$

En particulier, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\chi_u(X) = \prod\limits_{\delta \in \mathrm{VP}(u)} (X - \delta)^{l_\delta}$ où $\forall \delta \in \mathrm{VP}(u)$, $l_\delta \geq 1$.

Attention : χ_u peut avoir des racines non contenues dans $\mathbb{K}$. En effet, si on considère une matrice de rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\chi_M(X) = X^2 + 1$. Ce polynôme admet deux racines complexes mais aucune racine réelle.

Astuce utile : Un calcul explicite nous permet d'affirmer que

$$\det(XI_n - A) = X^n - tr(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A$$

En particulier, il est bon de retenir les formules suivantes

→ Lorsque $n = 2$, $\chi_A(X) = X^2 - \operatorname{Tr}(A)X + \det A$

→ Lorsque $n = 3$, $\chi_A(X) = X^3 - \operatorname{Tr}(A)X^2 + C_2(A)X - \det A$
où $C_2(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ lorsque $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1;3]\!]}$.

Notation : Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on désigne par $Spec_{\mathbb{K}}(u)$ la liste non ordonnée des valeurs propres de u qui sont contenues dans $\mathbb{K}$ en prenant compte de leurs multiplicité dans χ_u, c'est à dire que $Spec_{\mathbb{K}}(u)$ peut être vu comme un ensemble mais contrairement à un ensemble usuel, un élément peut être compté plus d'une fois et contrairement aux $k - uplets$ l'ordre n'est pas pris en compte. Par exemple, lorsque $Spec_{\mathbb{K}}(u)$ contient deux fois 1 et une fois 2, nous noterons $Spec_{\mathbb{K}}(u) = [1, 1, 2]$.
Parfois, par abus de notation, on pourra voir $Spec_{\mathbb{K}}(u)$ comme un ensemble normal aussi.

Exemple : Si $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ (pas forcément distincts) alors $\chi_A = \prod_1^n (X - \lambda_i)$ et $Spec_{\mathbb{K}}(A) = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$.

Attention : En général, $Spec_{\mathbb{R}}(u) \subsetneq Spec_{\mathbb{C}}(u)$.

Proposition V.2.

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si $Spec_{\mathbb{C}}(A) = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ alors $\operatorname{Tr}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$ et $\det A = \lambda_1 \dots \lambda_n$.

Preuve : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$\chi_A(X) = \det(XI_n - A) = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i) = X^n - \operatorname{Tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$$

En identifiant les coefficients de l'avant dernier terme et du dernier terme, on trouve bien que $\operatorname{Tr}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$ et $\det A = \lambda_1 \dots \lambda_n$.

Exemples :

1. Si $A = (a_{i,j})_{i,j\in[\![1;n]\!]}$ est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) alors
$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - a_{ii})$$
2. Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{K}[X]$ et $C_P = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On a $\chi_{C_P} = P$. On appelle C_P la matrice compagnon de P.

La preuve (classique) de ces deux points se fait par récurrence en développant suivant la première colonne.

Exercice V.3.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En utilisant la base $(E_{k,l})_{k,j\in[\![1;n]\!]} = ((\delta_{i,k}\delta_{j,l})_{i,j\in[\![1;n]\!]})$, trouver le polynome caractéristique de

$$\phi_A : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto XA \end{cases}$$

Proposition V.4.

Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Posons $v = u\big|_F^F$. Montrer que $\chi_v | \chi_u$.

Preuve : Considérons β_1 une base de F qu'on complète en une base $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ de E. On a alors

$$[X\operatorname{Id} - u]_\beta = \begin{pmatrix} [X\operatorname{Id} - v]_{\beta_1} & * \\ 0 & X\operatorname{Id} - B \end{pmatrix}$$

où $B \in \mathcal{M}_{|\beta_2|}(\mathbb{K})$. On a alors $\chi_u(X) = \chi_v(X)\chi_B(X)$ (on rappelle que le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure par bloc est le produit des déterminants des blocs diagonaux). Ceci donne bien le résultat voulu.

2. Caractérisation des endomorphismes diagonalisables

Dans cette sous-partie, nous allons présenter des moyens de dire si un endomorphisme est diagonalisable ou non.

Définition V.5.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in Spec_{\mathbb{K}}(u)$.

1. La multiplicité algébrique de λ est sa multiplicité en tant que racine de χ_u, notée $\alpha_u(\lambda)$.
2. La multiplicité géométrique de λ est $\beta_u(\lambda) := \dim E_{\lambda,u}$

S'il n y a pas d'ambiguïté sur l'endomorphisme u, on pourra les noter $\alpha(\lambda)$ (ou α_λ) et $\beta(\lambda)$ (ou β_λ) respectivement.

Proposition V.6.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont vraies.

1. Pour toute valeur propre λ de u, $\alpha_u(\lambda) \geq \beta_u(\lambda)$.
2. u est diagonalisable $\iff \chi_u$ scindé et $\forall \lambda \in Spec_{\mathbb{K}}(u),\ \alpha_u(\lambda) = \beta_u(\lambda)$

Preuve :

1. $F = \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id})$ est stable par u. Considérons $v = u\Big|_F^F$. $\chi_v = (X - \lambda \operatorname{Id})^{\beta(\lambda)} | \chi_u$ d'où $\beta_\lambda \leq \alpha_\lambda$.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

→ ($\Rightarrow$) Soit β une base de E et $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ deux à deux distincts tels que $[u]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{l_1} & & \\ & \ddots & \\ & & lb_r I_{l_r} \end{pmatrix}$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{N}^*$. On a alors

$$\begin{aligned} \chi_u(X) = \det(XI_n - [u]_\beta) &= \det \begin{pmatrix} (X-\lambda_1)I_{l_1} & & \\ & \ddots & \\ & & (X-\lambda_n)I_{l_r} \end{pmatrix} \\ &= \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{l_i} \end{aligned}$$

De là, on voit bien que χ_u et scindé et pour tout $i \in [\![1; r]\!]$, $l_i = \alpha_u(\lambda_i) = \beta_u(\lambda_i)$.

→ ($\Leftarrow$) On a

$$n = \sum_{\lambda \in \mathrm{VP}(u)} \alpha_u(\lambda) = \sum_{\lambda \in \mathrm{VP}(u)} \beta_u(\lambda) = \dim \left(\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{VP}(u)} E_{\lambda,u} \right)$$

En en déduit donc que $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{VP}(u)} E_{\lambda,u}$, i.e. u est diagonalisable.

Remarque : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si χ_A possède n racines distinctes dans $\mathbb{K}$ alors

→ A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

→ χ_A est scindé à racines simples.

→ $\forall \lambda \in Spec_{\mathbb{K}}(A),\ \alpha_\lambda = \beta_\lambda = 1$

Remarque : En général, Pour deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_A = \chi_B$ n'implique pas forcément que A est semblable à B. Toutefois, si A et B sont toutes les deux diagonalisables alors l'implication devient vraie. Ceci car, dans ce cas,

$$Spec_{\mathbb{K}}(A) = Spec_{\mathbb{K}}(B) = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$$

donc A et B sont toutes deux semblables à $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, A et B sont donc semblables par transitivité de la relation d'équivalence matricielle. Notons aussi que le fait d'avoir la diagonalisabilité pour uniquement une seule d'elles ne suffit pas. En effet, pour le voir, il suffit de prendre $A = 0$ et B une matrice nilpotente non nulle quelconque (par exemple strictement triangulaire supérieure non nulle), ces deux matrices admettent X^n comme polynôme caractéristique mais ne sont clairement pas équivalentes.

Le théorème suivant est l'un des plus utile en algèbre linéaire

Théorème (Cayley-Hamilton) V.7.

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_A(A) = 0$.

Remarque : Le théorème ci-dessus est équivalent à dire que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mu_A | \chi_A$.

Preuve : Plusieurs démonstrations sont possibles, on rencontrera notamment plusieurs dans ce cours. On présentera ici une basée sur le changement de corps. On considérera dans cette démonstration que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on posera $\mathbb{L} := \mathbb{C}$. Noter que cette démonstration est généralisable à d'autres corps si on connaît un peu de théorie d'extension de corps (c.f. section Bonus sur l'existence d'une cloture algébrique qui est en particulier un surcorps qui scinde tout polynôme).

Remarquons d'abord que χ_A est indépendant du corps de référence. On peut donc sans souci travailler dans $M_n(\mathbb{L})$ et montrer que dans $\mathbb{L}$, $\chi_A(A) = 0$. Montrons cela dans $M_n(\mathbb{L})$.
Dans $\mathbb{L}$, $\mu_{A,\mathbb{L}}$ (le polynôme minimal de u dans $\mathbb{L}[X]$) et χ_A sont scindés et leurs racines sont exactement les mêmes (il s'agit des valeurs propres de A dans $\mathbb{L}$). Notons alors $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ les valeurs propres distinctes de A. On a alors

$$\mu_{A,\mathbb{L}} = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{\gamma_i} \text{ et } \chi_A = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

Il suffit maintenant de montrer que $\forall i\ \gamma_i \leq \alpha_i$, car une fois cela fait, on aurait $\mu_{A,\mathbb{L}} | \chi_A$ et donc $\chi_A(A) = 0$. Par symétrie des rôles des γ_i, il suffit de montrer que $\gamma_1 \leq \alpha_1$. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{L}^n)$ l'endomorphisme associé à A dans la base canonique. De même, E désignera désormais $\mathbb{L}^n$. Posons

$$\begin{aligned} F &= \operatorname{Ker}(u - \lambda_1 \operatorname{Id})^{\gamma_1} & H &= \bigoplus_{i=2}^{s} \operatorname{Ker}(u - \lambda_i \operatorname{Id})^{\gamma_i} \\ d &= \dim(F) & v &= u\Big|_F^F \end{aligned}$$

Remarquons que v est bien défini car F est stable par u. Soit β_1 une base de F et β_2 une base de H. $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ est une base de E et

$$[u]_\beta = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Soit μ_B et μ_C les polynômes minimaux de B et C respectivement. Par souci de clareté, nous procédons point par point.

- v est annulé par $(X - \lambda_1)^{\gamma_1}$, donc $\mu_B | (X - \lambda_1)^{\gamma_1}$, i.e. il existe $p \in [\![1; \gamma_1]\!]$ tel que $\mu_B = (X - \lambda_1)^p$.
- De même, $\prod_{i=2}^{s} (X - \lambda_i)^{\gamma_i}$ annule C, donc $\mu_C \,\Big|\, \prod_{i=2}^{s} (X - \lambda_i)^{\gamma_i}$.
- De plus, on a pour tout $P \in \mathbb{L}[X]$, P annule u si et seulement si P annule B et C, i.e. $P \in \langle \mu_B \rangle \cap \langle \mu_C \rangle = \langle \mu_B \vee \mu_C \rangle$. Le polynôme unitaire de plus petit degré vérifiant cette propriété est $\mu_C \vee \mu_B$, donc
$$\prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{\gamma_i} = \mu_u = \mu_C \vee \mu_B = \mu_B \mu_C = (X - \lambda_1)^p \mu_C$$
On a alors $(X - \lambda_1)^{\gamma_1} | (X - \lambda_1)^p \mu_C$ et $\mu_C \wedge (X - \lambda_1)^{\gamma_1} = 1$, donc $(X - \lambda_1)^{\gamma_1} | (X - \lambda_1)^p$, donc $\gamma_1 \leq p$ (et aussi $\gamma_1 \geq p$), donc $\gamma_1 = p$, et alors $\mu_B = (X - \lambda_1)^{\gamma_1}$.
- La matrice $N = B - \lambda_1 \operatorname{Id}$ est nilpotente d'indice de nilpotence γ_1. En particulier, on dispose de $X \in \mathbb{L}^d$ tel que $N^{\gamma_1 - 1} X \neq 0$. Ainsi, $\gamma_1 \leq d$ car $(X, NX, \ldots, N^{\gamma_1 - 1} X)$ est libre et ne peut donc

pas contenir plus de d éléments (pour le montrer, il suffit de considérer une combinaison linéaire de cette famille non triviale et d'appliquer un nombre suffisant de fois N).

- La seule valeur propre de N est 0 car si $\lambda \neq 0$ est une valeur propre de N et X un vecteur propre associé, $0 = N^{\gamma_1}X = \lambda^{\gamma_1}X$ ce qui est absurde. De plus, χ_N est de degré d, unitaire scindé dans $\mathbb{L}$ et admet uniquement 0 comme racine donc $\chi_N(X) = X^d$.

- Le point précédent nous permet d'écrire

$$\chi_B(X) = \det(XI - B) = \det((X - \lambda_1)I - N) = \chi_N(X - \lambda_1) = (X - \lambda_1)^d$$

- Pour conclure, on a

$$(X - \lambda_1)^d = \chi_B(X) | \chi_A(X) = \prod_{i=1}^{s}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

et alors $d \leq \alpha_1$ et finalement $\gamma_1 \leq d \leq \alpha_1$, ce qui est bien le résultat recherché.

Corollaire V.8.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont vraies.

1. $\deg(\mu_u) \leq n$
2. Les facteurs irréductibles de μ_u et χ_u sont exactement les mêmes à puissance près.
3. $\chi_u | \mu_u^n$ et $Z_{\mathbb{K}}(\mu_u) = Z_{\mathbb{K}}(\chi_u) = Spec_{\mathbb{K}}(u)$.

Remarque 1 : Dans le cas particulier où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le point (2) est équivalent à dire

$$\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{\alpha_i} \text{ et } \mu_u(X) = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{\gamma_i}$$

où λ_i distincts et pour tout $i \in [\![1; r]\!]$, $1 \leq \gamma_i \leq \alpha_i$.

Remarque 2 : Ce résultat est vrai même pour $\mathbb{K}$ égal à un corps quelconque, pas forcément égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (vois partie bonus).

Applications :

→ Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Si $\mathrm{Tr}(A) = 0$, alors A^2 est une homotétie. En effet, $0 = \chi_A(A) = A^2 - \mathrm{Tr}(A)A + \det(A)I_2 = A^2 + \det(A)I_2$ et alors $A^2 = -\det(A)I_2$.

→ Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ tel que $\det A \wedge \det B = 1$. Alors $\exists U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ tel que $UA + VB = I_n$.
En effet, $\chi_A(A) = 0$ nous donne que

$$A^n + (\mathrm{Tr}\, A)A^{n-1} + \cdots + c_1 A + (-1)^n \det A \cdot I_n = 0$$

i.e.

$$\det A \cdot I_n = A \times \underbrace{(-1)^{n+1}(A^{n-1} + (\mathrm{Tr}\, A)A^{n-2} + \cdots + c_1 I_n)}_{U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})}$$

De la même manière, il existe $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ polynôme en B tel que $\det B \cdot I_n = VB$ et finalement d'après Bezout, on dispose de $a, b \in \mathbb{Z}$ tel que $a \cdot \det A + b \cdot \det B = 1$ ce qui permet de dire, en multipliant par I_n des deux côtés que $(aU)A + (bV)B = I_n$

Dans ce qui suit, on aura besoin du lemme suivant, qui est souvent assez utile.

Lemme V.9.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $k \geq 2$, on a

$$\operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id})^k = \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}) \Longleftrightarrow \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id})^2 = \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id})$$

Preuve

→ ($\Leftarrow$) Soit $k \geq 2$ et $x \in E$, on a

$$\begin{aligned}(u - \lambda \operatorname{Id})^k(x) = 0 &\Longrightarrow (u - \lambda \operatorname{Id})^2 \circ (u - \lambda \operatorname{Id})^{k-2}(x) = 0\\ &\Longrightarrow (u - \lambda \operatorname{Id}) \circ (A - \lambda \operatorname{Id})^{k-2}(x) = 0\\ &\Longrightarrow (u - \lambda \operatorname{Id})^{k-1}(x) = 0\end{aligned}$$

En itérant ce procédé $k-1$ fois, on obtient que

$$(u - \lambda \operatorname{Id})^k(x) = 0 \Longrightarrow (u - \lambda \operatorname{Id})^{k-1}(x) = 0 \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow (u - \lambda \operatorname{Id})(x) = 0$$

On en déduit donc que $\operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id})^k \subset \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id})$, i.e. $\operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id})^k = \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id})$.

→ ($\Rightarrow$) On a clairement

$$\operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}) \subset \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id})^2 \subset \cdots \subset \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id})^k$$

Le fait que $\operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id})^k = \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id})$ implique que toutes ces inclusions sont des égalités, et en particulier que $\operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}) = \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id})^2$.

Exercice V.10.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec χ_A scindé. Montrer que

$$A \text{ est diagonalisable } \Longleftrightarrow \forall \lambda \in Spec_{\mathbb{K}}(A),\ \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)^2$$

VI Trigonalisation

1. Généralités

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition VI.1.

On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable s'il existe β base de E tel que $[u]_\beta$ est triangulaire supérieure.

Remarque : Soit $\beta = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E. $[u]_\beta$ est triangulaire supérieure si et seulement si u stabilise le drapeau associé à β i.e. $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $u(Vect(e_1, \ldots, e_k)) \subset Vect(e_1, \ldots, e_k)$

Définition VI.2.

On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.

Remarque : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Lorsque A est triangulaire supérieure, notons $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$, on a $Spec_{\mathbb{K}}(A) = [a_{11}, \dots, a_{nn}]$. La preuve de ce résultat est laissée comme exercice au lecteur.

Proposition VI.3.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. A est trigonalisable $\iff f_A : X \longmapsto AX$ est trigonalisable
2. u est trigonalisable $\iff$ Il existe β un base de E tel que $[u]_\beta$ est trigonalisable $\iff$ pour tout base β base de E, $[u]_\beta$ est trigonalisable.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{nn} \end{pmatrix}$ Si A et B sont semblables, alors $(a_{11}, \dots, a_{nn})$ et $(b_{11}, \dots, b_{nn})$ sont égaux à permutation près, soit, avec nos notations, $[a_{11}, \dots, a_{nn}] = [b_{11}, \dots, b_{nn}] (= Spec_{\mathbb{K}}(A) = Spec_{\mathbb{K}}(B))$.

Preuve : La démonstration est facile est laissée au lecteur (elle est très similaire à celle sur la diagonalisabilité).

Proposition VI.4.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes

1. u est trigonalisable
2. χ_u est scindé
3. μ_u est scindé
4. $\exists P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\},\ P(u) = 0$ et P est scindé

En particulier, sur un corps algébriquement clos tel que $\mathbb{C}$, tout endomorphisme est trigonalisable

Preuve

→ (1) ⇒ (2) Si u est trigonalisable donc on dispose de β base de E tel que $[u]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ et alors

$$\chi_u(X) = \det([X \operatorname{Id} - u]_\beta) = \det \begin{pmatrix} X - \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & X - \lambda_n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$$

χ_u est donc bien scindé.

→ (2) ⇒ (3) $\mu_u | \chi_u$, donc μ_u est aussi scindé.

→ (3) ⇒ (4) Il suffit de prendre $P = \mu_u$.

→ (4) ⇒ (1) Procédons par récurrence forte sur n, la dimension de E.

- Le cas $n = 1$ est évident.
- Soit $n \geq 2$. Supposons que pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, la propriété soit vraie. $\mu_u | P$, donc μ_u est aussi scindé. μ_u admet donc une racine λ. Considérons $F = \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}) \neq \{0\}$ et β_1 une base de

F qu'on complète en une base $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ de E. On a alors

$$[u]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda\,\mathrm{Id} & * \\ 0 & B \end{pmatrix} \text{ et donc } 0 = [P(u)]_\beta = \begin{pmatrix} P(\lambda)\,\mathrm{Id} & * \\ 0 & P(B) \end{pmatrix}$$

Donc $P(B) = 0$. $B \in \mathcal{M}_l(\mathbb{K})$ (avec $l \leq n-1$) est annulé par un polynôme scindé, on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence et dire que B est trigonalisable. Il existe donc $Q \in \mathrm{GL}_l(\mathbb{K})$ tel que $T := QBQ^{-1}$ soit triangulaire supérieure. Finalement,

$$[u]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda\,\mathrm{Id} & * \\ 0 & B \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \mathrm{Id} & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda\,\mathrm{Id} & * \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Id} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\,\mathrm{Id} & * \\ 0 & T \end{pmatrix}$$

cette matrice est triangulaire supérieure, donc u est trigonalisable.

Applications :

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes
   - → u est nilpotente.
   - → Il existe une base β de E telle que $[u]_\beta$ est strictement triangulaire supérieure.
   - → $\chi_u = X^n$

   Pour montrer cela, il suffit de remarquer que le seul facteur irréductible de X^d est X.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathbb{P} \in K[X]$.

$$Spec_{\mathbb{C}}(A) = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n] \Longrightarrow Spec_{\mathbb{C}}(P(A)) = [P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n)]$$

   Cette propriété se démontre aisément en trigonalisant la matrice A et en utilisant le fait que le spectre d'une matrice triangulaire est égal aux coefficients diagonaux de cette matrice.

Exercice VI.5.

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. u est nilpotent
2. $\forall k \in [\![1; n]\!],\ \mathrm{Tr}(u^k) = 0$
3. $\forall P \in \mathbb{K}[X],\ \mathrm{Tr}(P(u)) = nP(0)$

Exercice VI.6.

Supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1. Trouver toutes les classes de similitudes des matrices suivant les valeurs de μ_A et χ_A pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ lorsque $n = 2$ et $n = 3$.
2. En déduire que pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,
   - → Pour $n = 2$, $\mu_A = \mu_B \Longleftrightarrow A \simeq B$.
   - → Pour $n = 3$, $(\mu_A = \mu_B$ et $\chi_A = \chi_B) \Longleftrightarrow A \simeq B$.
3. Trouver un contre-exemple des propriétés précédentes dans $n = 4$.

Exercice VI.7.

Soit $S \subset M_n(\mathbb{K})$ un sous-ensemble non vide de matrices trigonalisables qui commutent deux à deux. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout $A \in S$, PAP^{-1} est triangulaire supérieure.

2. Décomposition de Jordan-Dunford

Proposition VI.8.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Supposons que χ_u soit scindé, i.e. qu'on peut écrire $\mu_u(X) = \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{\gamma_i}$ et $\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ avec les λ_i distincts. posons $F_{\lambda_i} = \operatorname{Ker}(u-\lambda_i \operatorname{Id})^{\gamma_i} = \operatorname{Ker}(u-\lambda_i \operatorname{Id})^{\alpha_i}$.
Les propriétés suivantes sont vraies.

1. F_{λ_i} est stable par u et est de dimension α_i.
2. $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_{\lambda_i}$
3. $u\big|_{F_{\lambda_i}}^{F_{\lambda_i}} = \lambda_i \operatorname{Id}_{F_{\lambda_i}} + N_{\lambda_i}$ où $N_{\lambda_i} \in \mathcal{L}(F_{\lambda_i})$ est nilpotent.

Vocabulaire : On appelle F_{λ_i} l'espace caractéristique de u associé à λ_i.

En considérant pour tout i, β_i une base de F_{λ_i} où $\left[u\big|_{F_{\lambda_i}}^{F_{\lambda_i}}\right]_{\beta_i}$ est triangulaire supérieure et β la concaténation de ces bases (qui est une base de E), on obtient que

$$[u]_\beta = \begin{pmatrix} A_{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{\lambda_r} \end{pmatrix} \text{ où } A_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{\alpha_i}(\mathbb{K})$$

Remarquons lorsque χ_u est scindé que $\forall i \in [\![1;r]\!],\ F_{\lambda_i,u} = E_{\lambda_i,u}$ si et seulement si u est diagonalisable. Ceci étant vrai car

$$\begin{aligned} F_{\lambda_i,u} = E_{\lambda_i,u} &\iff \operatorname{Ker}(u-\lambda \operatorname{Id}) = \operatorname{Ker}((u-\lambda \operatorname{Id})^{\alpha_i}) \\ &\iff \operatorname{Ker}(u-\lambda \operatorname{Id}) = \operatorname{Ker}((u-\lambda \operatorname{Id})^2) \iff u \text{ est diagonalisable} \end{aligned}$$

Le cas $\alpha_i = 1$ est facile et peut être traité séparément par le lecteur. La dernière équivalence est vraie d'après l'exercice V.10. et l'avant dernière d'après le lemme V.9.
Rassemblons maintenant tous les blocs diagonaux en une seule matrice D et de même pour ceux nilpotents (la partie strictement triangulaire supérieure) en N. En considérant $\delta, \nu \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$[\delta]_\beta = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot I_{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \cdot I_{\alpha_r} \end{pmatrix} \text{ et } [\nu]_\beta = N = \begin{pmatrix} N_{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & N_{\lambda_r} \end{pmatrix}$$

on obtient la décomposition suivante, appelée décomposition de Dunford.

Proposition (Décomposition de Dunford) VI.9.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u soit scindé. Il existe un unique couple d'endomorphismes $(\delta, \nu) \in \mathcal{L}(E)^2$ telle que

- $\rightarrow$ $u = \delta + \nu$
- $\rightarrow$ δ est diagonalisable et ν et nilpotente.
- $\rightarrow$ δ et ν commutent.

De plus, δ et ν sont polynomiales en u i.e. il existe $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\delta = P(u)$ et $\nu = Q(u)$.

Preuve : L'existence a déjà été établie avant, il reste à montrer le caractère polynomial et l'unicité. Remarquons d'abord que $\delta \in \mathbb{K}[u] \iff \nu \in \mathbb{K}[u]$. Il suffit donc de le montrer pour δ ou ν, disons δ. Reprenons les notations de la proposition, ainsi que celles considérées juste avant. Remarquons que $\delta = \sum_1^r \lambda_i \pi_i$ où π_i est la projection sur $F_{\lambda_i,u}$ parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} F_{\lambda_j,u}$ et donc il suffit de vérifier que $\pi_i \in \mathbb{K}[u]$ pour tout i. Par symétrie des rôles des π_i, il suffit de le montrer par exemple pour $i = 1$. Posons

$$P_1 = \prod_{j=2}^r (X-\lambda_j)^{\alpha_j},\ \lambda = P(\lambda_1) \neq 0,\ P_2 = P_1 - \lambda$$

$$P_3 = (P_2)^n,\ P_4 = P_3 - (-\lambda)^n,\ P_5 = \frac{-1}{(-\lambda)^n} P_5$$

Pour voir que ces polynômes sont naturels à considérer, il suffit de voir la succession d'égalités ci-dessous.

$$[P_1(u)]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda \operatorname{Id} + N & & 0 \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } [P_2(u)]_\beta = \begin{pmatrix} N & & 0 \\ & -\lambda \operatorname{Id} & \\ & & \ddots \\ 0 & & -\lambda \operatorname{Id} \end{pmatrix}$$

et donc

$$[P_3(u)]_\beta = \begin{pmatrix} N^n = 0 & & 0 \\ & (-\lambda)^n \operatorname{Id} & \\ & & \ddots \\ 0 & & (-\lambda)^n \operatorname{Id} \end{pmatrix} \text{ ainsi } [P_4(u)]_\beta = \begin{pmatrix} -(-\lambda)^n \operatorname{Id} & & 0 \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

finalement

$$[P_5(u)]_\beta = \begin{pmatrix} \operatorname{Id} & & 0 \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} = [\pi_1]_\beta$$

Ce qui nous donne bien le résultat voulu.

Montrons enfin l'unicité. Considérons (δ', ν') vérifiant les mêmes propriétés que (δ, ν). On a

$$u = \delta + \nu = \delta' + \nu' \text{ i.e. } \delta - \delta' = \nu - \nu'$$

ν et ν' commutent car $\nu \in \mathbb{K}[u]$ et ν' commute avec δ' et alors avec $\delta' + \nu' = u$. En posant $v = \delta - \delta' = \nu - \nu'$, on obtient

$$v^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \nu^k \nu'^{2n-k}$$

sachant que $\forall k \in [\![1;2n]\!]$, soit $k \geq n$ soit $2n-k \geq n$ (on rappelle que l'indice de nilpotence de ν et ν' est forcement inférieur à n), tous les termes de cette somme sont nuls. Ainsi, les seules valeurs propres de v dans $\mathbb{C}$ sont 0, mais v est diagonalisable car il est égal à la somme de δ et δ' qui sont diagonalisables et commutent entre eux car δ est dans $\mathbb{K}[u]$ et δ' commute avec ν' et donc avec $\delta'+\nu'=u$ et sont donc codiagonalisables. On en déduit donc directement que $v=0$, i.e. $(\delta,\nu)=(\delta',\nu')$, d'où l'unicité de δ et ν.

Exercice VI.10.

Résoudre les équations suivantes.

1. $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. $X^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 1 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ avec $a \in \mathbb{C}$.
3. $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice VI.11.

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. On considère l'application

$$\phi_u : \begin{cases} \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) & \longrightarrow \mathcal{L}(C^n) \\ v & \longmapsto u \circ v - v \circ u \end{cases}$$

Montrer que u est diagonalisable si et seulement si ϕ_u est diagonalisable.

Exercice VI.12.

Soit $u \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que u admet une racine, i.e. qu'il existe $v \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $v^2 = u$.

Proposition (Décomposition de Jordan 1) VI.13.

Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Il existe une base β de E tel que

$$[v]_\beta = \begin{pmatrix} J_{l_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{l_s} \end{pmatrix} \text{ où } \forall k \in [\![1;s]\!],\ J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$$

avec $l_1,\dots,l_s \in [\![1;n]\!]$ et $l_1+\cdots+l_s=n$.

Preuve : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, il est clair qu'il existe $p \geq 1$ tel que $\mu_u = X^p$ pour un certain $p \geq 1$ (en effet, u est annulé par X^l pour l assez grand, donc $\mu_u | X^l$).
Montrons le résultat par récurrence forte sur la dimension n de E.

→ Le cas $n=1$ est évident.

→ Soit $n \geq 2$ tel que $\dim E = n$. Supposons que le propriété soit vraie pour tout $k \in [\![1;n]\!]$. Soit $x_1 \in E \setminus \{0\}$ tel que $u^{p-1}(x_1) \neq 0$. En posant $F_{x_1} = \mathrm{Vect}(x_1,\dots,u^{p-1}(x_1))$ (remarquons que cette famille est libre, c'est donc une base de F_{x_1}), on voit que F_{x_1} est stable et

$$\left[u\Big|_{F_{x_1}}^{F_{x_1}}\right] = J_p$$

Notre intuition est de trouver un supplémentaire de F_{x_1} stable par u et lui appliquer l'hypothèse de récurrence. Voici comment nous allons procéder

- La famille $(x_1, u(x_1), \dots, u^{p-1}(x_1))$ est libre, on peut donc considérer $\phi : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire telle que $\varphi(u^{p-1}(x_1)) = 1$ et pour tout $k \in [\![0; p-2]\!]$, $\phi(u^k(x_1)) = 0$.
- À partir de ϕ on construit l'application linéaire suivante

$$\varphi : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{K}^p \\ y & \longmapsto (\phi(u^{p-1}(y), \dots, \phi(u(y)), \phi(y)) \end{cases}$$

  et on pose $F = \operatorname{Ker} \varphi$.
- F est stable par u. En effet, on a pour tout $y \in E$

$$\begin{aligned} \varphi(y) = 0 &\Longrightarrow \forall k \in [\![0; p-1]\!],\ u^k(y) = 0 \\ &\Longrightarrow \forall k \in [\![0; p-1]\!],\ u^k(u(y)) = 0 \text{ (car } u^p = 0) \\ &\Longrightarrow u(y) \in F \end{aligned}$$

- φ est surjective. en effet, pour tout $k \in [\![0; p-1]\!]$, $\varphi(u^k(x_1)) = (\delta_{ik})_{i \in [\![0;p-1]\!]}$ donc pour tout $(a_0, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$

$$\varphi(a_0 u^0(x_1) + \cdots + a_{p-1} u^{p-1}(x_1)) = (a_0, \dots, a_{p-1})$$

- $F \cap F_{x_1} = \{0\}$. En effet, pour tout $y \in F_{x_1}$, en posant $y = y := \sum_0^{p-1} a_k u^k(x_1)$, on a

$$\varphi(y) = 0 \Longrightarrow 0 = \varphi\left(\sum_0^{p-1} a_k u^k(x_1)\right) = (a_0, \dots, a_{p-1}) \Longrightarrow y = 0$$

  donc F et F_{x_1} sont en somme directe et par la formule du rang $\dim F = \dim \operatorname{Ker} \varphi = \dim E - \dim \operatorname{Im} \varphi = n - p$, et alors $\dim F_{x_1} + \dim F = n = \dim E$. F et F_{x_1} sont donc supplémentaires.
- Pour finir, on voit que $w = u\Big|_F^F$ est aussi nilpotente, on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à w sur F ce qui nous donne bien le résultat voulu.

Remarques :

→ Lorsqu'on ajoute la condition $l_1 \geq \cdots \geq l_s \geq 1$, cette décomposition est unique, i.e. s'il existe une autre base β' de E, où n est de la même forme avec $m_1 \geq \cdots \geq m_r \geq 1$ les tailles respectives de ses blocs $(J_k)_{k \in [\![1;r]\!]}$, alors $r = s$ et $\forall i \in [\![1; s]\!]$, $l_i = m_i$.
Pour s'en convaincre, notons

$$\forall i \in \mathbb{N}^*\ F(i) = |\{k \in [\![1; s]\!],\ l_k = i\}| \text{ et } G(i) = |\{k \in [\![1; r]\!],\ m_k = i\}|$$

Il est aisé de vérifier que

$$\forall r \in \mathbb{N}^*\ \forall k \in \mathbb{N}\ dimKer(J_r^k) = min(k, r)$$

Ceci permet donc d'affirmer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*\ dimKer(u^k) = \sum_1^{\infty} F(i) min(k, i) = \sum_1^{\infty} G(i) min(k, i)$$

Ainsi, $F = G$ (Il suffit de considérer par absurde le 1-er indice $i \in \mathbb{N}^*$ où $F(i) \neq G(i)$ pour tomber sur un contradiction) et donc on a notre unicité.

→ Remarquons que le bloc associé au sous espace F_{x_1} a la plus grande taille des blocs. En effet la taille du bloc correspond à la dimension de ce sous espace, $\dim F_{x_1} = p$ et la dimension de tout espace défini de la même manière (en itérant u sur un élément de E) est de dimension au plus p.

Proposition (Décomposition de Jordan 2) VI.14.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé dans $\mathbb{K}$. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes (comptées sans multiplicité) de u. Il existe une base β de E telle que

$$[u]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot I_{l_1^i} + A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \cdot I_{l_{s_i}^i} + A_r \end{pmatrix} \text{ avec } A_i = \begin{pmatrix} J_{l_1^i} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{l_{s_i}^i} \end{pmatrix}$$

où pour tout $i \in [\![1; r]\!]$, $s_i \in \mathbb{N}^*$ et $l_1^i \geq \cdots \geq l_{s_i}^i \geq 1$. De plus, cette écriture est unique à permutation des blocs $\lambda_i I_{l_{s_i}^i} + A_i$ près.
On appelle cette décomposition réduction de Jordan de u.

Remarque : Certains auteurs n'exigent pas les inégalités sur les tailles des blocs dans la réduction de Jordan. Cela ne change que la partie unicité de ce théorème.

Exercice VI.15.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\dim \mathrm{Com}(A) \geq n$.

VII Endomorphismes cycliques

Cette partie hors programme est assez classique. En effet, elle revient dans un nombre considérable d'exercices d'oraux et de sujets d'écrits, voir par exemple Centrale Math 1 2019, où l'intégralité du sujet portait sur les endomorphismes cycliques. Les élèves (dont ceux des MP* de Louis-le-Grand) ayant vu cette notion étaient très avantagés par rapport aux autres cette année là.
Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

Définition VII.1.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E \setminus \{0\}$. On appelle espace cyclique engendré par x pour u le sous-espace vectoriel défini par

$$F_{x,u} = \mathrm{Vect}\{u^k(x), k \in \mathbb{N}\}$$

On le notera aussi F_x lorsqu'il n y a pas d'ambiguïté sur u.

Proposition VII.2.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E \setminus \{0\}$. Les propositions suivantes sont vraies.

1. $F_{x,u}$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E stable par u contenant x.
2. Soit $p = \max\{k \in \mathbb{N}^*,\ (x, u(x), \ldots, u^{k-1}(x)) \text{ est libre}\}$. $\beta = (x, \ldots, u^{p-1}(x))$ est une base de $F_{x,u}$.
3. Il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ unitaire tel que $\left[u\Big|_{F_{x,u}}^{F_{x,u}}\right]_\beta = C_P$ la matrice compagnon associée à P.
4. P est le générateur normalisé de $\mathcal{H}_{u,x} = \{Q \in \mathbb{K}[X],\ Q(u)(x) = 0\}$, i.e. P est l'unique polynôme unitaire tel que $\mathcal{H}_{u,x} = \langle P \rangle := P \cdot \mathbb{K}[X]$. On appellera P le polynôme minimal (de u) en x et on le notera $\mu_{x,u}$ ou μ_x s'il n y a pas d'ambiguïté sur u. De plus, $\mu_{x,u} | \mu_u$.

Preuve

1. Clair (il suffit de l'écrire).
2. β est libre par définition. Montrons par récurrence forte que $\forall l \in \mathbb{N}\ u^l(x) \in \mathrm{Vect}(\beta)$.
   - $\rightarrow$ La propriété est évidente pour $l \in [\![0; p-1]\!]$.
   - $\rightarrow$ Soit $l \geq 1$. Supposons que la propriété soit vraie pour tout $k \in [\![0; l-1]\!]$. Si$l \leq p$, la propriété est vraie. Supposons donc que $l > p$. Par définition, $(x, \ldots, u^l(x))$ est liée, il existe donc $m \in [\![0; l]\!]$ et $(\lambda_0, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ tels que

   $$u^m(x) = \sum_0^{m-1} \lambda_k u^k(x)$$

   On a donc, par hypothèse de récurrence

   $$u^l(x) = u^{l-m}\left(\sum_0^{m-1} \lambda_k u^k(x)\right) = \sum_0^{m-1} \lambda_k \underbrace{u^{k+l-m}(x)}_{\in \mathrm{Vect}(\beta)} \in \mathrm{Vect}(\beta)$$

   ce qui est bien le résultat voulu.
3. β est libre mais $(\beta, u^p(x))$ ne l'est pas, il existe donc $\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{K}$ tels que $u^p(x) = \sum_0^{p-1} \lambda_k u^k(x)$

   En Posant $P := X^p - \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k X^k$, il est aisé de vérifier que $\left[u\Big|_{F_{x,u}}^{F_{x,u}}\right]_\beta = C_P$.
4. Remarquons que le polynôme P retrouvé au point (3) est unitaire, de degré p et annule u en x. Remarquons de plus que $(x, \ldots, u^{p-1}(x))$ est libre i.e. tout élément $Q \in \mathcal{H}_{u,x}$ non nul doit être de degré supérieur à p. En particulier, si Q est le générateur unitaire de $\mathcal{H}_{u,x}$ (existe car $\mathcal{H}_{u,x}$ est un idéal non trivial), alors $Q | P$ et Q et P unitaires (non nuls) et $\deg(P) = p \leq \deg(Q)$ d'où $P = Q$ et donc $\mathcal{H}_{u,x} = \langle P \rangle$.

Définition VII.3.

On dit que u est cyclique lorsqu'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $F_x = E$ i.e. il existe $x \in E$ tel que $(x, \ldots, u^{n-1}(x))$ est libre.

Proposition VII.4.

Soit u cyclique et $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $F_x = E$. Alors $\mu_x = \mu_u = \chi_u$

Preuve : Les trois polynômes sont tous unitaires et $\mu_x|\mu_u|\chi_u$ et donc il suffit de montrer que $\deg(\mu_x) \geq= n$, ce qui est vrai car $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est libre et donc aucun polynôme de degré $n-1$ ou moins ne peut annuler u.
Remarquons qu'en prenant u quelconque, $x \in E \setminus \{0\}$ et en considérant $v = u\Big|_{F_x}^{F_x}$, on obtient que $\mu_{u,x} = \mu_{v,x} = \chi_v$ et donc, en particulier, $\deg(\mu_x) = \dim(F_x)$.

Exercice VII.5.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On admettra qu'il existe $x \in E - \{0\}$ tel que $\mu_{x,u} = \mu_u$ (démontré dans un exercice ultérieur)

1. Montrer que $\mu_u = \chi_u$ si et seulement si u est cyclique.
2. Supposons que u est cyclique. Montrer que $\mathrm{Com}(u) = \mathbb{K}[u] = \{P(u),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$ et en déduire que $\dim \mathrm{Com}(u) = n$.
3. On ne suppose plus que u est cyclique. Déduire de la question précédente que $\dim \mathrm{Com}(u) \geq n$
4. Montrer que $\mu_u = \chi_u$ si et seulement si $\mathrm{Com}(u) = \mathbb{K}[u]$.

Exercice VII.6.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que χ_u est irréductible si et seulement si les seuls sous-espaces vectoriels stables par u sont $\{0\}$ et E.
Au passage remarquer que, dans ce cas, tout élément non nul est cyclique pour u.

Exercice VII.7.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que la dimension de chaque espace propre est égale à 1 si A est semblable à une matrice compagnon.
2. En déduire que si A est diagonalisable, alors A est cyclique si et seulement si A possède n valeurs propres distinctes.

Exercice VII.8.

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme unitaire de degré n et de racines (dans $\mathbb{C}$, possiblement avec répétition) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

1. Montrer que $\forall k \geq 1$, $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$ sont les racines d'un polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$ de degré n.
2. En déduire que si $|\lambda_1| = \dots = |\lambda_n| = 1$ alors les λ_j sont des racines de l'unité.

Exercice VII.9.

Dans cet exercice, on notera $\forall P \in \mathbb{K}[X]$ et $x \in E$, $P \cdot x = P(u)(x)$ et $\mu_0 = 1$.

1. Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Supposons qu'il existe $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ unitaires tels que $\mu_x = PQ$ et posons $y = Q \cdot x$. Vérifier que $\mu_y = P$
2. Soit $x, y \in E$ non nuls tels que $\mu_x \wedge \mu_y = 1$. Montrer que $\mu_{x+y} = \mu_x \mu_y$.
3. On ne suppose plus que $\mu_x \wedge \mu_y = 1$. Montrer que qu'il existe $z \neq 0$ tel que $\mu_z = \mu_x \vee \mu_y$.
4. Montrer qu'il existe $a \neq 0$ tel que pour tout $x \neq 0$, $\mu_x | \mu_a$. En déduire que $\mu_a = \mu_u$, le polynôme minimal de u.

Application : en utilisant le résultat de la dernière question, on peut démontrer le théorème de Cayley-Hamilton. En effet, considérons $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $\mu_x = \mu_u$. F_x étant stable, $\mu_u = \mu_x = \chi_v | \chi_u$ où $v = u\Big|_{F_x}^{F_x}$. On en déduit donc directement que $\chi_u(u) = 0$.
Une autre manière similaire de démontrer Cayley Hamilton sans le résultat de la dernière question est de voir que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, F_x étant stable, $\mu_x = \chi_v | \chi_u$ où $v = u\Big|_{F_x}^{F_x}$. On a alors pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $\chi_u(u)(x) = 0$, i.e. $\chi_u(u) = 0$.

VIII Réduction et topologie

1. Normes, valeurs propres

On suppose dans cette partie que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Rappel VIII.1.

On suppose que $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $||.||$ une norme sur $\mathbb{K}^n$. On peut définir une norme sur E, appelée norme d'opérateur, par

$$|||A||| = \sup_{\|X\|=1} ||AX|| = \sup_{\|X\| \leq 1} \|AX\| = \sup_{X \in E \setminus \{0\}} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$$

.

Remarque : cette norme vérifie les propriétés suivantes

→ $|||I_n||| = 1$.

→ $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ |||AB||| \leq |||A||| \times |||B|||$

→ $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \sup_{\lambda \in Spec_{\mathbb{K}}(A)} |\lambda| \leq |||A|||$

Proposition VIII.2.

Soit $A = (a_{ij})_{i,j \in [\![1;n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $\mathrm{VP}(A) \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_f\left(a_{kk}, \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{kj}|\right)$.

Preuve : Posons $H = \bigcup_{k=1}^{n} B_f\left(a_{kk}, \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|\right)$. Soit $\lambda \notin H$, alors

$$\forall k \in [\![1;n]\!],\ |\lambda - a_{kk}| > \sum_{j=1,\ j\neq k}^{n} |a_{kj}|$$

D'après Hadamard (voir le chapitre des systèmes linéaires), ceci est équivalent à dire que la matrice $A-\lambda I$ est inversible et que donc λ n'est pas une valeur propre de A.On en déduit donc bien que $\mathrm{VP}(A) \subset H$.

Application : En utilisant ce résultat, on peut redémontrer le résultat sur les racines d'un polynôme vu au chapitre 1. En effet, considérons $P \in \mathbb{K}[X]$ et soit $A = C_P$. On a bien entendu

$$P(X) = \chi_A(X) = X^n + \alpha_{n-1}X^{n-1} + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0$$

On a donc, en utilisant le résultat ci-dessus

$$Z(P) = Spec_{\mathbb{K}}(A) \subset \bigcup_{k=0}^{n-2} B_f(0, 1+|\alpha_k|) \cup B_f(\alpha_{n-1}, 1)$$

i.e. pour toute racine λ de P, on a l'inégalité

$$|\lambda| \leq 1 + \max_{k \in [\![0;n-1]\!]} |a_k|$$

Exercice VIII.3.

Soit F un fermé de $\mathbb{C}$. Montrer que $\widetilde{F} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ Spec_{\mathbb{C}}(A) \subset F\}$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Application : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc en appliquant le résultat de cet exercice, on a que $\{A \in M_n(\mathbb{C}),\ Spec_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{R}\}$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. De plus, on a

$$\begin{aligned}\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A \text{ est trigonalisable}\} &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{proposition VI.4}}}{=} \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \chi_A \text{ est scindé}\} \\ &= \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ Spec_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{R}\} \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\end{aligned}$$

On en déduit donc que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ trigonalisables s'écrit sous forme d'une intersection de deux fermés, c'est donc un fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Diagonalisation à ε près

Proposition VIII.4.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux d'une trigonalisation de A. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & b_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ avec $\forall i \neq j\ |b_{ij}| \leq \varepsilon$.

Preuve : Soit $\beta = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de trigonalisation de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ i.e. une base telle que

$$A_\beta = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

avec Q la matrice de la base β. Soit $p > 0$, posons $\beta_p = \left(b_1, \frac{b_2}{p}, \ldots, \frac{b_n}{p^n}\right)$. β_p est aussi une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

La matrice de A dans cette base s'écrit

$$V_p Q A Q^{-1} V_p^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \frac{a_{ij}}{p^{|i-j|}} \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

avec $V_p = Diag\left(1, \frac{1}{p}, \dots, \frac{1}{p^{n-1}}\right)$. Il suffit ensuite de prendre p assez grand pour qu'on ait pour tout $i \neq j$, $\frac{|a_{i,j}|}{p} \leq \varepsilon$.

Exercice VIII.5.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $Spec(A) \subset B(0,1)$. Montrer que $A^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$.

Remarque : La propriété connue $|||A^p|||^{1/p} \xrightarrow[p\to\infty]{} \rho(A) = \sup\{|\lambda|,\ \lambda \in Spec_{\mathbb{C}}(A)\}$ dans $\mathbb{C}$ permet de rapidement en conclure aussi.

Exercice VIII.6.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ tel que $Spec_{\mathbb{C}}(A) \subset B(0,1)$. Montrer que A est nilpotente

3. Densité des matrices diagonalisables

Proposition VIII.7.

$\Omega = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ A \text{ possède } n \text{ valeurs propres distinctes}\}$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Preuve

Soit β une base de $\mathbb{C}^n$ tel que $[A]_\beta = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Considérons alors (A_p) la suite de matrices vérifiant

$$\forall p \in \mathbb{N}, A_p = A + P^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{p+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{p+n} \end{pmatrix} P$$

On a alors

$$\forall p \in \mathbb{N},\ [A_p]_\beta = [A]_\beta + \begin{pmatrix} \frac{1}{p+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{p+n} \end{pmatrix}$$

On remarque que On a $Spec_{\mathbb{C}}(A) = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$. A partir de là, il y a deux moyens de conclure.

Méthode 1 : Considérons le polynôme non nul

$$P(X) = \prod_{i \neq j} (X+i)(X+j)\left(\lambda_i + \frac{1}{X+i} - \lambda_j - \frac{1}{X+j}\right) = \prod_{i \neq j} ((X+i)(X+j)(\lambda_i - \lambda_j) + j - i))$$

Il est clair que si A_p n'admet pas n valeurs propres distinctes alors $P(p) = 0$. P n'a qu'un nombre fini de racines et donc à partir d'un certain rang A_p admet toujours n valeurs propres distinctes. Finalement

$$A_p = A + \underbrace{P^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{p+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{p+n} \end{pmatrix} P}_{\xrightarrow[p\to+\infty]{} 0} \xrightarrow[p\to+\infty]{} A$$

d'où le résultat recherché.

Méthode 2 : Posons $\delta = \dfrac{1}{2} \min\{|\lambda_i - \lambda_j|\,,\ i \neq j \text{ et } \lambda_i \neq \lambda_j\} > 0$ et soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{k} < \delta$. Supposons par l'absurde qu'il existe deux termes diagonaux de $[A_p]_\beta$ égaux, il existe donc $i \neq j$ tel que $\lambda_i + \dfrac{1}{k+i} = \lambda_j + \dfrac{1}{k+j}$. Deux cas se présentent

$\rightarrow$ $\lambda_i = \lambda_j$ et donc $0 = |\lambda_i - \lambda_j| = \left|\dfrac{1}{i+k} - \dfrac{1}{j+k}\right| \neq 0$ ce qui est absurde.

$\rightarrow$ $\lambda_i \neq \lambda_j$ et donc $\delta < |\lambda_i - \lambda_j| = \left|\dfrac{1}{i+k} - \dfrac{1}{j+k}\right| = \dfrac{|i-j|}{(k+i)(k+j)} \leq \frac{1}{k} < \delta$ ce qui est absurde.

En en déduit donc que pour tout $p \geq k$, A_p admet n valeurs propres distinctes, et $A_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} A$, d'où le résultat voulu.

Conséquence : D'après la question 1 de l'exercice VII.4, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, $\chi_u = \mu_u$ implique que u est cyclique. Or si u admet n valeurs propres deux à deux différentes, $\chi_u = \mu_u$ et donc u est cyclique. L'ensemble des endomorphismes ayant n valeurs propres deux à deux différentes (qui est dense) est inclus dans l'ensemble des endomorphismes cycliques. On en déduit donc que l'ensemble des les endomorphismes cycliques est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Application : On peut utiliser ce résultat pour redémontrer le théorème de Cayley-Hamilton.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et (A_p) une suite de matrices dont chacune possède n valeurs propres distinctes (et donc, a fortiori, est diagonalisable) tel que $A_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} A$.
Lorsque $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonale, il est aisé d'établir que $\chi_D(D) = 0$. Idem pour le cas où D est diagonalisable. Ainsi, par continuité de $(A, B) \longmapsto \chi_A(B)$ (l'image de (A, B) est une matrice dont les coordonnées sont produit et somme des coefficients de A et B)

$$\chi_A(A) = \lim_{p\to\infty} \chi_{A_p}(A_p) = \lim_{p\to\infty} 0 = 0$$

Remarque : On peut également montrer que Ω est ouvert. En effet

$$A \in \Omega \iff \chi_A \wedge \chi_A' = 1 \iff \det \chi_A'(A) \neq 0$$

$h : A \longmapsto \det(\chi_A'(A))$ est continue et $\mathbb{K}^*$ est ouvert, donc $\Omega = h^{-1}(\mathbb{K}^*)$ est ouvert.

Exercice VIII.8.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que

$$A \text{ est diagonalisable } \iff \{P^{-1}AP,\ P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\} \text{ est fermé}$$

4. Valeurs propres "pures"

Définition VIII.9.

$\lambda \in Spec_{\mathbb{K}}(A)$ est dite pure lorsque

$$E_{\lambda,u} = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)^{\alpha_\lambda} = F_{\lambda,u}$$

ou alors d'une manière équivalente $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)^2$.

Remarque : Cette propriété est aussi équivalente au fait que la composante nilpotente dans la décomposition de Dunford associée à l'espace caractéristique de λ est nulle (i.e. u est simplement une homothétie sur cet espace).

Exercice VIII.10.

Soit λ une valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{C}^n$. Montrer que si $|\lambda| = |||A|||$, avec $|||.|||$ la norme d'opérateur associée à $\|.\|$, alors λ est pure.

Application : Si $u \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une isométrie pour $\|.\|$ alors u est diagonalisable. En effet, $\forall \lambda \in Spec_{\mathbb{C}}(u)$, $|\lambda| = |||u||| = 1$ et donc $E_{\lambda,u} = F_{\lambda,u}$.

Correction de l'exercice II.5. :

→ Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, un tel plan existe.
En effet, le plan suivant privé de 0 est inclus dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

→ Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il n'existe pas de tel plan.
En effet, supposons qu'il existe un plan P vérifiant ces conditions et soit (u, v) une base de P et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a alors

$$u - \lambda v \in GL_n(\mathbb{C}) \iff \det(u - \lambda v) \neq 0 \underset{v \in GL_n(\mathbb{C})}{\iff} \det(uv^{-1} - \lambda id) \neq 0$$

Ce qui ne peut pas être vrai pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ car uv^{-1} admet une valeur propre dans $\mathbb{C}$.

Correction de l'exercice II.7. :

Soit λ une valeur propre de u. $u - \lambda\,\mathrm{Id}$ commute avec tous les éléments de L et donc $F = \mathrm{Ker}(u - \lambda id) \neq \{0\}$ est stable par tous les éléments L. L étant irréductible, on a $F = E$ et $u = \lambda\,\mathrm{Id}$.

Correction de l'exercice III.5. :

Soit $\beta = (b_1, \ldots, b_n)$ une base telle que $[u]_\beta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ où les λ_i sont les n valeurs propres distinctes de u. v commute avec u et donc pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $\mathrm{Ker}(u - \lambda_i id) = \mathrm{Vect}(b_i)$ est stable par v et donc pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, il existe $\mu_i \in \mathbb{K}$ tel que $v(b_i) = \mu_i b_i$ et donc finalement $[v]_\beta = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$. On en déduit directement que v est diagonalisable.
En considérant un polynôme interpolateur $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\forall i \in [\![1; n]\!]$, $P(\lambda_i) = \mu_i$ (chose possible vu que les λ_i sont distincts), on voit que

$$[P(u)]_\beta = \mathrm{diag}(P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n)) = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n) = [v]_\beta$$

d'où le résultat.

Correction de l'exercice IV.3. :

$X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de u, donc $\mu_u | X^2 - 1$. μ_u n'est pas constant, il y a donc 2 possibilités

→ $\mu_u = X - 1$ ou $\mu_u = X + 1$, ce qui est impossible car $u \neq \pm\,\mathrm{Id}$.

→ $\mu_u(X) = X^2 - 1$ est la seule possibilité qui reste, d'où la résultat voulu.

Correction de l'exercice IV.8. :

→ (1) ⇒ (2) Considérons $v = u\Big|_F^F$ (bien défini car F stable par u). $P(X) = \prod_{i=1}^{s}(X - \lambda_s)$ annule v, on a donc par le lemme de décomposition des noyaux

$$F = \mathrm{Ker}(P(v)) = \bigoplus_{i=1}^{s} \mathrm{Ker}(v - \lambda_i\,\mathrm{Id}) = \bigoplus_{i=1}^{s} F \cap \mathrm{Ker}(u - \lambda_i\,\mathrm{Id}) = \bigoplus_{i=1}^{s} F \cap E_{\lambda_i, u}$$

→ (2) ⇒ (3) Il suffit de prendre pour tout $i \in [\![1; s]\!]$, $F_i = F \cap E_{\lambda_i, u}$.

→ (3) ⇒ (1) Chaque F_i est stable par u, donc F, qui est égal à la somme directe des F_i, est également stable par u.

Correction de l'exercice IV.9. :

Méthode 1 :

→ Soit $v \in \mathrm{Com}(u)$. Posons
$$[v]_\beta = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s,1} & \dots & A_{s,s} \end{pmatrix}$$
avec pour tout $i,j \in [\![1;s]\!]$, $A_{i,j} \in \mathcal{M}_{l_i,l_j}(\mathbb{K})$. On a alors
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 A_{1,1} & \dots & \lambda_1 A_{1,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_s A_{s,1} & \dots & \lambda_s A_{s,s} \end{pmatrix} = [u]_\beta \times [v]_\beta = [u \circ v]_\beta = [v \circ u]_\beta = [v]_\beta \times [u]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 A_{1,1} & \dots & \lambda_s A_{1,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 A_{s,1} & \dots & \lambda_s A_{s,s} \end{pmatrix}$$
On a alors $(\lambda_i A_{i,j})_{i,j\in[\![1;s]\!]} = (\lambda_j A_{i,j})_{i,j\in[\![1;s]\!]}$, i.e. pour tout $i \neq j$,
$$\lambda_i A_{i,j} = \lambda_j A_{i,j}$$
ce qui implique que $A_{i,j} = 0$ car les λ_i sont deux à deux distincts. v s'écrit donc bien dans la base β sous la forme
$$v = \begin{pmatrix} A_{1,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{s,s} \end{pmatrix}$$

→ Réciproquement, si on suppose que v s'écrit comme ci-dessus, alors
$$[v \circ u]_\beta = [v]_\beta \times [u]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_s A_s \end{pmatrix} = [u]_\beta \times [v]_\beta = [u \circ v]_\beta$$
donc $v \in \mathrm{Com}(u)$.

Méthode 2 :

→ Notons S l'ensemble de droite. Il est alors clair que $S \subset \mathrm{Com}(u)$ (pour s'en convaincre, voir le dernier point de la méthode 1).

→ Réciproquement, soit $v \in \mathrm{Com}(u)$. Pour tout $i \in [\![1;s]\!]$, $E_{\lambda_i,u}$ est stable par v. La proposition I.5 nous permet d'affirmer que dans la base β, v s'écrit bien de la manière voulue.

Une autre solution de l'exercice III.5 consiste à utiliser ce résultat pour $s = n$ et $l_i = 1$ pour tout $i \in [\![1;s]\!]$.

Remarque : une conséquence de ce résultat est que $\dim(\mathrm{Com}(u)) = \sum_{i=1}^{s} l_i^2 \geq n$ avec égalité si et seulement si $n = s$ et pour tout $i \in [\![1;s]\!]$, $l_i = 1$. L'inégalité $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Com}(u)) \geq n$ est en fait toujours vraie même sans diagonalisabilité lorsque $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. On le prouvera dans un exercice ultérieur.

Correction de l'exercice IV.11. :

→ ($\Leftarrow$) Dans une base β où les matrices de tous les endomorphismes de S sont de matrice diagonale, toutes ces matrices commutent ce qui nous donne bien le résultat voulu.

→ ($\Rightarrow$) Procédons par récurrence forte sur la dimension n de E.

- Le cas $n = 1$ est évident car dans ce cas tous les endomorphismes de E commutent et sont diagonaux.
- Soit $n \geq 1$. Supposons que la propriété est vraie pour tout $k \in [\![1;n]\!]$. Le cas où tous les éléments de S sont des homothéties est évident, on suppose donc que ce n'est pas la cas. On

dispose donc de $u \in S$, $s \geq 2$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ ses valeurs propres comptées sans multiplicité. Tout élément $v \in S$ commute avec u, donc pour tout $i \in [\![1; s]\!]$,$\mathrm{E}_{\lambda_i,u}$ est stable par tout élément de S. En posant $F = \bigoplus_{i=2}^{s} E_{\lambda_i,u}$, on voit clairement que F est stable par tout élément de S. Considérons les deux ensembles

$$S_1 = \left\{ v\Big|_{E_{\lambda_1,u}}^{E_{\lambda_1,u}},\ v \in S \right\} \text{ et } S_2 = \left\{ v\Big|_{F}^{F},\ v \in S \right\}$$

On peut appliquer l'hypothèse de récurrencé à $E_{\lambda_1,u}$ pour S_1 et à F pour S_2. Il existe une base β_1 (resp. β_2) de $E_{\lambda_1,u}$ (resp. F) dans laquelle les matrices de tous les éléments de S_1 (resp. S_2) sont diagonales. On en déduit donc que les matrices de tous les éléments de S dans la base $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ sont diagonales, ce qui est bien le résultat recherché.

Correction de l'exercice IV.12. :

Considérons l'ensemble

$$S = \{\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m),\ (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) \in \{-1, 1\}^m\}$$

S est clairement un sous-groupe de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ de cardinal 2^m (car car $\mathbb{K} \neq 2$).
Posons $S' := \varphi(S)$. φ est injective, donc S' est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ de cardinal 2^m.
Remarquons que pour tout $A \in S$, $A^2 = I_m$ donc pour tout $A' \in S'$, il existe $A \in S$ tel que $A' = \varphi(A)$ et donc $A'^2 = \varphi(A)^2 = I_n$. $X^2 - 1$ annule donc tout élément de S' et est scindé à racines simples dans $\mathbb{K}$ (car car $\mathbb{K} \neq 2$) et donc chaque élément de S' est diagonalisable. De plus, les éléments de S commutent entre eux, donc ceux de S' aussi.
Ainsi, en utilisant l'exercice précédent, on dispose d'une base β de $M_n(\mathbb{K})$ où la matrice de tout élément de S' est diagonale. Par construction, le carré de chacune de ces matrices est égal à l'identité, ce qui impose que $[S']_\beta = \{[v]_\beta,\ v \in S'\} \subset \{\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n),\ (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n\}$ On a alors

$$2^m = |S'| = |[S']_\beta| \leq 2^n$$

i.e. $m \leq n$.

Correction de l'exercice IV.13. :

→ (⇒) Supposons que u^2 et u soient diagonalisables. Il existe une base β et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $[u]_\beta = D$. De plus $\mathrm{rg}\, D = \mathrm{rg}\, D^2$ (il s'agit du nombre de coefficients non nuls sur la diagonale) et donc $\mathrm{rg}\, u = \mathrm{rg}\, u^2$. La formule du rang nous donne donc $\dim \mathrm{Ker}\, u = \dim \mathrm{Ker}\, u^2$. En combinant ce résultat avec le fait que $\mathrm{Ker}\, u \subset \mathrm{Ker}\, u^2$, on obtient $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, u^2$.

→ (⇐) Deux cas se présentent

- u est inversible (i.e. $\mathrm{Ker}\, u^2 = \mathrm{Ker}\, u = \{0\}$).
  Considérons $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ les valeurs propres comptées sans multiplicité non nulles de u^2 et $\alpha_1, -\alpha_1, \dots, \alpha_s, -\alpha_s$ leurs racines complexes distinctes respectives. Le polynôme $P(X) = \prod_{i=1}^{s}(X - \lambda_i)$ annule u^2 et donc le polynôme

  $$P(X^2) = \prod_{i=1}^{s}(X^2 - \lambda_i) = \prod_{i=1}^{s}(X - \alpha_i)(X + \alpha_i)$$

  scindé à racines simples annule u, donc u est diagonalisable.

- u n'est pas inversible, donc u^2 non plus.

Reprenons les notations du point précédent et considérons que $\lambda_1 = 0$. Le polynôme

$$P(X^2) = X^2 \prod_{i=2}^{s} (X - \alpha_i)(X + \alpha_i)$$

annule u, et donc par le lemme des noyaux

$$\begin{aligned} E = \operatorname{Ker} P(u^2) &= \operatorname{Ker} u^2 \oplus \bigoplus_{i=2}^{s} (\operatorname{Ker}(u - \alpha_i \operatorname{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(u + \alpha_1 \operatorname{Id})) \\ &= \operatorname{Ker} u \oplus \bigoplus_{i=2}^{s} (\operatorname{Ker}(u - \alpha_i \operatorname{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(u + \alpha_1 \operatorname{Id})) \end{aligned}$$

On en déduit que E est somme directe d'espaces propres de u, i.e. u est diagonalisable.

Correction de l'exercice V.3. :

Posons $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1;n]\!]}$. Pour calculer le polynôme caractéristique de ϕ_A, nous allons calculer sa matrice dans la base

$$\mathcal{B} = (E_{1,1}, \ldots, E_{1,n}, \ldots, E_{n,1}, \ldots, E_{n,n})$$

et posons pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $\mathcal{B}_i = (E_{i,j})_{j \in [\![1;n]\!]}$ et remarquons que $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n)$.
Soit $i \in [\![1;n]\!]$. On a pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, $\phi_A(E_{i,j})$ est égal à une matrice de coefficients nuls partout, sauf à la ligne i où se trouve la ligne j de la matrice A. On a donc

$$\phi_A(E_{i,j}) = a_{j,1} E_{i,1} + \cdots + a_{j,n} E_{i,n} \in \operatorname{Vect} \mathcal{B}_i$$

On en déduit que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $\operatorname{Vect} \mathcal{B}_i$ est stable par ϕ_A. Il existe donc des matrices $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$[\phi_A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_n \end{pmatrix}$$

Soit $k \in [\![1;n]\!]$. Pour tout $i, j \in [\![1;n]\!]$, le coefficient de position i, j de B_k est égal à le coefficient de $E_{k,i}$ dans la décomposition de $\phi_A(E_{k,j})$ dans la base $\mathcal{B}_k$, qui est égal à $a_{j,i}$. On en déduit donc que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $B_k = A^T$ et alors

$$\chi_{\phi_A}(X) = \det(XI_{n^2} - [\phi_A]_{\mathcal{B}}) = \det \begin{pmatrix} XI_n - A^T & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & XI_n - A^T \end{pmatrix} = \det \left(XI_n - A^T \right)^n = \chi_A(X)^n$$

Correction de l'exercice V.10. :

→ ($\Rightarrow$) Supposons que A soit diagonalisable. Il existe donc $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et D une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $PAP^{-1} = D$. On en déduit donc que pour tout $\lambda \in \mathrm{VP}(A)$

$$\operatorname{rg}(A - \lambda \operatorname{Id})^2 = \operatorname{rg} P(A - \lambda \operatorname{Id})^2 P^{-1} = \operatorname{rg}(D - \lambda \operatorname{Id})^2$$

$\operatorname{rg}(D - \lambda \operatorname{Id})^2$ est égal au nombre de coefficients diagonaux non nuls dans $(D - \lambda \operatorname{Id})^2$. Ce nombre est le même que le nombre de coefficients non nuls dans la matrice diagonale $D - \lambda \operatorname{Id}$ (les deux matrices sont diagonales). On a alors

$$\operatorname{rg}(A - \lambda I)^2 = \operatorname{rg}(A - \lambda I)$$

et finalement par la formule du rang

$$\dim \operatorname{Ker}(A-\lambda I)^2 = \dim \operatorname{Ker}(A-\lambda I)$$

→ ($\Leftarrow$) Supposons que χ_A est scindé et que pour tout $\lambda \in \mathrm{VP}(A)$,

$$\dim \operatorname{Ker}(A-\lambda \operatorname{Id}) = \dim \operatorname{Ker}(A-\lambda \operatorname{Id})^2$$

Soit $\lambda \in \mathrm{VP}(A)$. On a $\operatorname{Ker}(A-\lambda \operatorname{Id}) \subset \operatorname{Ker}(A-\lambda \operatorname{Id})^2$, et ces deux sous espaces sont de même dimension, donc $\operatorname{Ker}(A-\lambda \operatorname{Id}) = \operatorname{Ker}(A-\lambda \operatorname{Id})^2$. nous allons montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{Ker}(A-\lambda \operatorname{Id}) = \operatorname{Ker}(A-\lambda \operatorname{Id})^k$. Soit $k \geq 2$ et $X \in \mathbb{K}^n$, on a

$$\begin{aligned}(A-\lambda \operatorname{Id})^k X = 0 &\Longrightarrow (A-\lambda \operatorname{Id})^2 (A-\lambda \operatorname{Id})^{k-2} X = 0\\ &\Longrightarrow (A-\lambda \operatorname{Id})(A-\lambda \operatorname{Id})^{k-2} X = 0\\ &\Longrightarrow (A-\lambda \operatorname{Id})^{k-1} X = 0\end{aligned}$$

En itérant ce procédé $k-1$ fois, on obtient que

$$(A-\lambda \operatorname{Id})^k X = 0 \Longrightarrow (A-\lambda \operatorname{Id})^{k-1} X = 0 \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow (A-\lambda \operatorname{Id}) X = 0$$

On en déduit donc que $\operatorname{Ker}(A-\lambda \operatorname{Id})^k \subset \operatorname{Ker}(A-\lambda \operatorname{Id})$, i.e. $\operatorname{Ker}(A-\lambda \operatorname{Id})^k = \operatorname{Ker}(A-\lambda \operatorname{Id})$. Remarquons que ce raisonnement peut aussi être fait par récurrence.
χ_A est scindé, on peut donc écrire

$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{s} (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{K}$ sont les valeurs propres de A. On a donc par le lemme des noyaux

$$\mathbb{K}^n = \operatorname{Ker} \chi_A(A) = \bigoplus_{i=1}^{s} \operatorname{Ker}(A-\lambda_i \operatorname{Id})^{\alpha_i} = \bigoplus_{i=1}^{s} \operatorname{Ker}(A-\lambda_i \operatorname{Id})$$

$\mathbb{K}^n$ est donc somme directe des espaces propres de A i.e. A est diagonalisable.

Correction de l'exercice VI.5. :

→ (1) $\Rightarrow$ (2) Supposons que u est nilpotent. Pour tout $k \geq 1$, la seule valeur propre de u^k dans $\mathbb{C}$ est 0 et $\operatorname{Tr}(u^k)$ est égal à la somme des valeurs propres de u^k, et donc pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\operatorname{Tr}(u^k) = 0$.

→ (2) $\Rightarrow$ (1) Supposons que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\operatorname{Tr}(u^k) = 0$. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ les coefficients diagonaux sans répétition et sans coefficients nuls de la matrice trigonalisée de u et soit $n_1, \ldots, n_s \in [\![1;n]\!]$ le nombre respectifs d'occurences de $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ dans cette diagonale. supposons que $s \geq 1$. La condition $\operatorname{Tr}(u^k) = 0$ pour tout $k \in [\![1;s]\!]$ donne

$$\begin{cases} n_1\lambda_1 + \cdots + n_s\lambda_s &= 0\\ n_1\lambda_1^2 + \cdots + n_s\lambda_s^2 &= 0\\ \qquad\vdots & \\ n_1\lambda_1^s + \cdots + n_s\lambda_s^s &= 0\end{cases}$$

i.e.

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & \ldots & \lambda_s\\ \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_s^2\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_1^s & \ldots & \lambda_s^s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1\\ n_2\\ \vdots\\ n_s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

En posant $M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_s \\ \lambda_1^2 & \dots & \lambda_s^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^s & \dots & \lambda_s^s \end{pmatrix}$, on voit que

$$\det M = \lambda_1 \dots \lambda_s \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_s \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{s-1} & \dots & \lambda_s^{s-1} \end{pmatrix} = \lambda_1 \dots \lambda_s \det V(\lambda_1, \dots, \lambda_s)^T$$
$$= \lambda_1 \dots \lambda_s \prod_{i,j \in [\![1;n]\!],\, i \neq j} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$$

où $V(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ est la matrice de Vandermonde associée à $\lambda_1, \dots, \lambda_s$. Ce dernier nombre est non nul car les λ_i sont tous non nuls et distincts. La formule de ce déterminant est assez classique, nous ne le démontrerons donc pas (une récurrence suffit pour le faire).
M est donc inversible et alors $n_1 = \dots = n_s = 0$, ce qui est absurde. On a alors $s = 1$, i.e. les coefficients diagonaux de la matrice trigonalisée de u sont donc tous égaux à 0.

→ (2) ⇒ (3) Supposons que (2) est vérifiée. u est alors nilpotente et le coefficient de nilpotence de u est inférieur à n, donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Tr}(u^k) = 0$. Soit $m \in \mathbb{N}$ et $P(X) = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$. On a

$$\mathrm{Tr}(P(u)) = \sum_{i=0}^{m} a_i \,\mathrm{Tr}(u^i) = a_0 \,\mathrm{Tr}(\mathrm{Id}) = nP(0)$$

→ (3) ⇒ (2) Supposons que (3) est vérifiée, on a alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, en posant $P(X) = X^k$,

$$\mathrm{Tr}(u^k) = \mathrm{Tr}(P(u)) = nP(0) = 0$$

Correction de l'exercice VI.6. :

Dans cet exercice, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1. Faisons une discussion des cas pour $n = 2$ puis $n = 3$.

   → Pour $n = 2$

   - Si $\deg \mu_A = 1$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, tel que $\mu_A(X) = X - \lambda$, et donc $A = \lambda I$.
   - Si $\deg \mu_A = 2$, alors il y a deux possibilités.
     - ▷ Il existe $\lambda, \delta \in \mathbb{K}$ différents tels que $\chi_A(X) = \mu_A(X) = (X - \lambda)(X - \delta)$. χ_A est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable et $A \simeq \mathrm{diag}(\lambda, \delta)$.
     - ▷ Il existe $\lambda \in K$ tel que $\chi_A(X) = \mu_A(X) = (X - \lambda)^2$. En trigonalisant, on voit que $A \simeq \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ dans une base $\beta = (b_1, b_2)$. De plus $a \neq 0$, car sinon on aurait $\mu_A(X) = X - \lambda$. Enfin, on voit qu'en regardant la matrice A dans la base (ab_1, b_2), $A \simeq \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

   On en déduit donc que les classes de similitudes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ sont

   $$\mathcal{C}_2 = \left\{ \left\langle \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right\rangle,\ \lambda \in \mathbb{K} \right\} \cup \left\{ \left\langle \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \right\rangle,\ \lambda, \delta \in \mathbb{K} \right\}$$

   → Pour $n = 3$

- S'il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$ distincts tels que $\chi_A(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3)$, alors A est diagonalisable, $\mu_A = \chi_A$ et $A \simeq \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.
- S'il existe $\lambda, \delta \in \mathbb{K}$ différents tels que $\chi_A(X) = (X - \lambda)^2(X - \delta)$, alors deux cas se présentent.
  - ▷ Si $\mu_A(X) = (X - \lambda)(X - \delta)$, alors A est diagonalisable et $A \simeq \mathrm{diag}(\lambda, \lambda, \delta)$.
  - ▷ Si $\mu_A = \chi_A$, alors on a

$$\mathbb{K}^n = \mathrm{Ker}(A - \lambda I)^2 \oplus \mathrm{Ker}(A - \delta I)$$

Il existe donc une base où $A \simeq \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$ où $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est la matrice de la corestriction de A à $\mathrm{Ker}(A - \delta \,\mathrm{Id})^2$. On a $\mu_B(X) = (X - \lambda)^2$, donc d'après la discussion pour $n = 2$,

$$B \simeq \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ et finalement } A \simeq \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}$$

- S'il existe $\delta \in \mathbb{K}$ tel que $\chi_A(X) = (X - \lambda)^3$
  - ▷ Si $\mu_A(X) = X - \lambda$, alors $A \simeq \lambda I$.
  - ▷ Si $\mu_A(X) = (X - \lambda)^2$ alors on peut écrire $A = \lambda I + N$ avec N nilpotente d'indice de nilpotence égal à 2. Soit $X \in \mathbb{K}^3$ tel que $NX \neq 0$. la famille (NX, X) est libre (raisonnement déjà fait avant). Complétons cette famille en une base $\beta = (NX, X, Y)$ avc $Y \in \mathbb{K}^n$. On a alors, dans cette base

$$[N]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

avec $a, b, c \in \mathbb{K}$. c est une valeur propre de N, donc on a nécessairement $c = 0$. De plus, on a

$$0 = N^2Y = N(NY) = N(aNX + bX) = bNX$$

donc $b = 0$. Enfin, en regardant N dans la base $\beta' = (NX, X, Y - aX)$, on voit que

$$[N]_{\beta'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et donc finalement } A \simeq \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

  - ▷ Si $\mu_A(X) = \chi_A(X) = (X - \lambda)^3$, alors on peut écrire $A = \lambda I + N$ avec N d'ordre de nilpotence égal à 3. En prenant donc $X \in \mathbb{K}^3$ tel que $N^2X \neq 0$, on voit que $\beta = (N^2X, NX, X)$ est une base de $\mathbb{K}^3$ et dans cette base

$$[N]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et donc finalement } A \simeq \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que les classes de similitude dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ sont

$$\mathcal{C}_3 = \left\{ \left\langle \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \right\rangle,\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K} \right\} \cup \left\{ \left\langle \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} \right\rangle,\ \lambda, \delta \in \mathbb{K} \right\} \cup \left\{ \left\langle \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right\rangle,\ \lambda \in \mathbb{K} \right\}$$

2. Il suffit de revoir la discussion ci-dessus pour répondre à la question.

3. On peut trouver le contre-exemple suivant pour $n = 4$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En effet, $\mu_A = \mu_B = X^2$ et $\chi_A = \chi_B = X^4$ mais $A \not\approx B$ car $\mathrm{rg}(A) = 1$ et $\mathrm{rg}(B) = 2$.

Correction de l'exercice VI.7. :

Procédons par récurrence forte sur la dimension n de E.

→ Le cas $n = 1$ est évident car dans ce cas tous les endomorphismes de E commutent et sont triangulaires supérieurs dans toute base.

→ Soit $n \geq 1$. Supposons que la propriété est vraie pour tout $k \in [\![1; n]\!]$.
Soit $u \in S$ non homothétie (le cas $S \subset \mathbb{K} \cdot \mathrm{Id}$ étant trivial) et soit λ_1 une de ses valeurs propres. Posons β_1 une base de $E_{\lambda_1,u}$, de dimension $a < n$, qui est stable par tout élément de S. Prenons maintenant F un supplémentaire quelconque de $E_{\lambda_1,u}$ dans E de dimension b et de base β_2. Tous les éléments de S sont triangulaires supérieurs par blocs dans $\beta = (\beta_1, \beta_2)$. En particulier, pour tout $u \in S$, il existe $(A_u, B_u, C_u) \in \mathcal{M}_a(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{a\times b}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_b(\mathbb{K})$ tels que

$$[u]_\beta = \begin{pmatrix} A_u & B_u \\ 0 & C_u \end{pmatrix}$$

On considère alors les deux ensembles

$$S_1 = \{A_v,\ v \in S\} \text{ et } S_2 = \{C_s,\ v \in S\}$$

On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à S_1 et S_2 (les matrices commutent toujours et sont toujours trigonalisables et de plus $1 \leq a \leq n-1$ et $1 \leq b \leq n-1$). Il existe donc une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_a(\mathbb{K})$ (resp. $Q \in GL_b(\mathbb{K})$) telle que pour tout $s \in S$, $P^{-1} A_s P \in \mathcal{T}_a^+(\mathbb{K})$ (resp. $Q^{-1} C_s Q \in \mathcal{T}_b^+(\mathbb{K})$). Finalement, pour la base γ correspondante au changement de base (depuis β) induit par

$$R = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

Il est clair que $[u]_\gamma = R^{-1}[u]_\beta R$ est triangulaire supérieure pour tout $u \in S$, ce qui est bien le résultat voulu.

Correction de l'exercice VI.10. :

1. $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

   Soit X une solution de l'équation. X^2 et X commutent, donc X laisse stable les espaces propres de X^2, i.e. X laisse stable $\mathrm{Vect}(e_1), \mathrm{Vect}(e_2), \mathrm{Vect}(e_3)$ avec (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On en déduit donc que X est diagonale, i.e. il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$X = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

   en réinjectant dans l'équation, on voit qu'on a nécessairement $(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2) = (1, 4, 9)$ et donc $(\alpha, \beta, \gamma) = (\pm 1, \pm 2, \pm 3)$. Réciproquement, une matrice de cette forme vérifie bien l'équation, donc l'ensemble des solutions est bien

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},\ (\alpha,\beta,\gamma) \in \{1,-1\} \times \{2,-2\} \times \{3,-3\} \right\}$$

2. $X^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 1 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ avec $a \in \mathbb{C}$

Soit X une solution de l'équation. $\mathrm{Vect}(e_1)$ est un espace propre de X^2. De plus X et X^2 commutent, donc X laisse stable $\mathrm{Vect}(e_1)$. Il existe donc $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ tels que

$$X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta + \gamma\beta \\ 0 & \gamma^2 \end{pmatrix} = X^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 1 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

En utilisant cette inégalité, on voit que $a \neq 0$, car sinon $\alpha = \gamma = \beta = 0$ et alors $X = 0$. En elevant les cas où l'égalité est fausse, on obtient que $(\alpha, \beta, \gamma) \in \left\{ \left(a, \frac{1}{2a}, a\right), \left(-a, -\frac{1}{2a}, -a\right) \right\}$. Réciproquement, en réinjectant ces deux matrices possibles dans l'équation, on voit que elles sont bien solutions. On en déduit que l'ensemble des solutions est bien

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2a} \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a & \frac{-1}{2a} \\ 0 & -a \end{pmatrix} \right\}$$

3. $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Soit X une solution de l'équation. Posons $\beta = (e_3, e_1, e_2)$ une permutation de la base canonique et regardons la matrice X dans cette base. Posons $Y = [X]_\beta$. On a

$$Y^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y commute avec Y^2 et laisse donc ses espaces propres stables, donc Y laisse stable $\mathrm{Vect}\left((1,0,0)^T, (0,1,0)^T\right)$
Il existe donc $x, y, z, t, c, d, e \in \mathbb{R}$ tels que

$$Y = \begin{pmatrix} x & y & c \\ z & t & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

En posant $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, on voit que $A^2 = I$, donc A est inversible. On a alors

$$\begin{pmatrix} A^2 & (A + eI) \times \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} = Y^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$A^2 = I \qquad (A + eI) \times \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad e^2 = 1$$

La suite de l'exercice est laissée au lecteur : il suffit d'évaluer les différents cas possible pour trouver toutes les solutions de l'équation.

Correction de l'exercice VI.11. :

→ (⇒) Supposons que u est diagonalisable. Soit $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ une base de diagonalisation de u. Il existe donc $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $[u]_\beta = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Pour tout $i, j \in [\![1; n]\!]$, on considère $v_{i,j} \in \mathcal{L}(E)$ définie par

$$\forall k \in [\![1; n]\!],\ v_{i,j}(e_k) = \begin{cases} e_i & \text{si } k = j\ 0 \\ \text{sinon} & \end{cases}$$

On a alors, pour tout $i, j \in [\![1; n]\!]$,

$$\begin{aligned} [\phi_u(v_{i,j})]_\beta &= [u \circ v_{i,j} - v_{i,j} \circ u]_\beta \\ &= DE_{i,j} - E_{i,j}D \\ &= (\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j} = [(\lambda_i - \lambda_j)v_{i,j}]_\beta \end{aligned}$$

On en déduit donc que $(v_{i,j})_{i,j \in [\![1;n]\!]}$ est une base de vecteurs propres de ϕ_u, donc ϕ_u est diagonalisable.

→ (⇐) Supposons que ϕ_u est diagonalisable. Utilisons la décomposition de Dunford. Sois $\delta, \nu \in \mathcal{L}(E)$ tels que δ est diagonalisable, ν est nilpotent et $u = \delta + \nu$. δ et ν commutent, donc il est facile de vérifier que ϕ_δ et ϕ_ν aussi. De plus, d'après le point précédent, ϕ_δ est diagonalisable et pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $v \in \mathcal{L}(E)$,

$$\phi_\nu^p(v) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} \nu^k \circ v \circ \nu^{p-k}$$

Donc ϕ_ν est nilpotent. ϕ_u est diagonalisable, donc par unicité de la décomposition de Dunford, $\phi_\nu = 0$, i.e. $\nu = 0$ et donc u est diagonalisable.

Correction de l'exercice VI.12. :

En décomposant sur chaque espace caractérisique (proposition VI.8), on sait que E s'écrit sous forme de somme directe de sous espaces (espaces caractéristiques) $F_1, \dots, F_s$ stables par u et où pour tout i, il existe ν_i nilpotent et $\lambda_i \in \mathbb{K}^*$ tels que

$$u\Big|_{F_i}^{F_i} = \lambda_i \operatorname{Id} + \nu_i$$

Il suffit donc de montrer ce résultat à l'application linéaire ci-dessus. Nous allons nous inspirer du développement limité en 0 de $x \longmapsto \sqrt{1+x}$. On a

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^n + o(x^n) = P_n(x) + o(x^n)$$

On a alors

$$P_n(x)^2 = 1 + x + \underbrace{o(x^n)}_{Q(x)}$$

où Q est un polynôme de terme de plus petit degré égal à au moins n. On peut donc écrire $Q(X) = X^n R(X)$ avec $R \in \mathbb{K}[X]$. On a alors, si α_i est une racine de λ_i, alors

$$\left(\alpha_i P_n\left(\frac{1}{\lambda_i}\nu_i\right)\right)^2 = \lambda_i \operatorname{Id} + \nu_i + \frac{1}{\lambda_i^{n-1}} \nu_i^n R\left(\frac{1}{\lambda_i}\nu_i\right) = \lambda_i \operatorname{Id} + \nu_i$$

et donc $\alpha_i P_n\left(\frac{1}{\lambda_i}\nu_i\right)$ est une racine de $\lambda_i \operatorname{Id} + \nu_i$, d'où le résultat voulu.

Correction de l'exercice VI.15. :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En utilisant la décomposition de Jordan, on sait qu'il existe une base β, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ non nécessairement distincts et $s_1, \ldots, s_r \in [\![1; n]\!]$ tels que $s_1 + \cdots + s_r = n$ et

$$[A]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot I_{s_1} + J_{s_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \cdot I_{s_i} + J_{s_i} \end{pmatrix}$$

Pour tout $i \in [\![1; r]\!]$, on considère l'application linéaire injective $\phi_i : \mathcal{M}_{s_i}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$\forall B \in \mathcal{M}_{s_i}(\mathbb{C}),\ \phi_i(B) = \begin{pmatrix} 0_{\mathcal{M}_{s_1}(\mathbb{C})} & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 0_{\mathcal{M}_{s_{i-1}}(\mathbb{C})} & & & & \\ & & & B & & & \\ & & & & 0_{M_{s_{i+1}}(\mathbb{C})} & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0_{\mathcal{M}_{s_r}(\mathbb{C})} \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\mathrm{Com}(A) \approx \mathrm{Com}([A]_\beta) \supset \bigoplus_{i=1}^{r} \phi_i(\mathrm{Com}(\lambda_i I_{s_i} + J_{s_i})) = \bigoplus_{i=1}^{r} \phi_i(\mathrm{Com}(J_{s_i}))$$

Il suffit de montrer que pour tout $s \in [\![1; n]\!]$, $\dim \mathrm{Com}(J_s) \geq s$ car une fois cela fait, on aurait

$$\dim \mathrm{Com}(A) = \dim \mathrm{Com}([A]_\beta) \geq \sum_{i=1}^{r} \dim \mathrm{Com}(J_{s_i}) \geq s_1 + \cdots + s_r = n$$

Soit $s \in [\![1; n]\!]$. En posant $X = (1, 0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{K}^s$, on a

$$J_s^{s-1} X = (0, \ldots, 0, 1)^T \neq 0$$

donc l'indice de nilpotence de J_s est égal à s, i.e. $\mu_{J_s}(X) = X^s$. En utilisant ce résultat, il est aisé de montrer que $\dim \mathbb{K}[J_s] = s$ ($(I, J_s, \ldots, J_s^{s-1})$ est une base de cet espace). Enfin, puisque $\mathbb{K}[J_s] \subset \mathrm{Com}(J_s)$, on a

$$\dim \mathrm{Com}(J_s) \geq \dim \mathbb{K}[J_s] = s$$

d'où le résultat voulu.

Correction de l'exercice VII.5. :

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
   - → ($\Leftarrow$) Supposons que u est cyclique. Il existe donc $x_0 \in E$ tel que $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E et alors $\deg \mu_u \geq n$ (car tout polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ ne peut pas annuler u). De plus, $\mu_u | \chi_u$, $\deg \chi_u = n$ et les deux polynômes sont unitaires, ce qui nous permet d'affirmer que $\chi_u = \mu_u$.
   - → ($\Rightarrow$) Soit $x_0 \in E$ tel que $\mu_{x_0,u} = \mu_u$ (existe d'après l'énoncé). On a alors $\chi_u = \mu_u = \mu_{x_0,u}$, donc $\deg \mu_{x_0,u} = \deg \chi_u = n$. On a alors pour tout $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}^n$,

     $$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 u(x_0) + \cdots + \lambda_{n-1} u^{n-1}(x_0) = 0 \Longrightarrow \lambda_0 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$$

     car sinon x_0 serait annulé en u par un polynôme de degré strictement inférieur à n. On en déduit donc que $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E, i.e. u est cyclique. On aurait aussi pu conclure en utilisant la proposition VII.4 (la remarque en dessous en particulier).
2. Supposons que $u \in \mathcal{L}(E)$ est cyclique. Montrons par double inclusion que $\mathrm{Com}(u) = \mathbb{K}[u]$.

→ ($\supset$) Cette inclusion est évidente car tout polynôme en u commute avec u.

→ ($\subset$) Soit $v \in \mathrm{Com}(u)$ et x_0 tel que $\beta = (x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E. Ecrivons la décomposition de $v(x_0)$ dans la base β

$$v(x_0) = a_0x_0 + a_1u(x_1) + \cdots + a_{n-1}u^{n-1}(x_0)$$

et considérons l'application linéaire w définie par

$$w = v - \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k$$

w commute avec u et $w(x_0) = 0$. De plus, on a pour tout $k \in [\![1; n-1]\!]$,

$$w(u^k(x_0)) = w \circ u^k(x_0) = u^k(w(x_0)) = 0$$

w est nul sur la base β, donc $w = 0$ et donc $v \in \mathbb{K}[u]$ et alors $\mathrm{Com}(u) = \mathbb{K}[u]$. De plus, $(\mathrm{Id}, u, \dots, u^{n-1})$ est une base de $\mathbb{K}[u]$ (pour le montrer, il suffit d'effectuer la division euclidienne de tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ en u par μ_u) et donc

$$\dim \mathrm{Com}(u) = \dim \mathbb{K}[u] = n$$

3. Déjà fait à l'exercice VI.15.
4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Procédons par double implication.

→ ($\Rightarrow$) Si $\chi_u = \mu_u$, alors d'après la question 1, u est cyclique et donc d'après la question 2, $\mathrm{Com}(u) = \mathbb{K}[u]$.

→ ($\Leftarrow$) Si $\mathrm{Com}(u) = \mathbb{K}[u]$, alors

$$\deg \mu_u = \dim \mathbb{K}[u] = \dim \mathrm{Com}(u) \geq n$$

La dernière inégalité est vraie d'après la question précédente. On a de plus $\mu_u | \chi_u$ et ces deux polynômes sont unitaires de même degré, donc $\chi_u = \mu_u$.

Correction de l'exercice VII.6. :

L'énoncé est équivalent à

$$\chi_u \text{ non irréductible} \iff \text{il existe un sous-espace vectoriel de } E \text{ non trivial stable par } u$$

→ ($\Rightarrow$) Supposons que χ_u n'est pas irréductible. Soit P un terme irrédutible de la décomposition en facteurs irréductibles de χ_u tel que $\deg P \in [\![1; n-1]\!]$. D'après le corollaire V.8, on sait que $P | \mu_u$. Soit $x \in \operatorname{Ker} P \setminus \{0\} \neq \varnothing$. $F_{x,u}$ est stable par u et

$$1 \underset{x \in F_{x,u}}{\leq} \dim F_{x,u} \underset{(*)}{=} \deg \mu_{x,u} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Proprosition VII.2}}}{\leq} \deg P \leq n-1$$

L'inégalité $(*)$ est vraie d'après la proposition VII.4. $F_{x,u}$ est donc un sous-espace vectoriel de E non trivial stable par u.

→ ($\Leftarrow$) Soit F un sous-espace vectoriel de E non trivial stable par u et posons $v = u\Big|_F^F$. On a alors $\chi_v | \chi_u$ et $\deg \chi_v \in [\![1; n-1]\!]$.

Correction de l'exercice VII.7. :

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Supposons que A est semblable à une matrice compagnon. Il existe donc une base β de $\mathbb{K}^n$ et $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ tels que

$$[A]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

On a alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$[A - \lambda \operatorname{Id}]_\beta = \begin{pmatrix} -\lambda & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & -\lambda & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix}$$

Le sous bloc de $[A - \lambda \operatorname{Id}]_\beta$ regrouppant les colonnes de position 1 à $n-1$ est égal à

$$B = \begin{pmatrix} -\lambda & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ & \ddots & -\lambda \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Les colonnes de B sont libres, donc $\operatorname{rg}(A - \lambda \operatorname{Id}) \geq n-1$, i.e. par la formule du rang $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda \operatorname{Id}) \leq 1$. En particulier, lorsque λ est une valeur propre de A, $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda \operatorname{Id}) = 1$.

2. Procédons par double implication. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable.
   - → ($\Rightarrow$) Si A est cyclique, alors A est semblable à une matrice compagnon et donc d'après la question précédente, tous les espaces propres de A sont de dimension 1, i.e. toutes les valeurs propres de A sont de multiplicité 1, il y en a donc n.
   - → ($\Leftarrow$) Supposons que A admet n valeurs propres deux à deux distinctes. Soit $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ une base de diagonalisation de A. Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts tels que

$$[A]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Soit $x = e_1 + \cdots + e_n$. On a pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$u^k(x) = \lambda_1^k e_1 + \cdots + \lambda_n^k e_n$$

On a alors

$$\Big[(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))\Big]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Cette matrice est une matrice de Vandermonde associée aux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ qui sont deux à deux distincts, elle est donc inversible. La famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est donc libre et alors c'est une base de $\mathbb{K}^n$. Finalement, A est cyclique i.e. semblable à une matrice compagnon.

Correction de l'exercice VII.8. :

1. Considérons $C_P \in M_n(\mathbb{Z})$ la matrice compagnon associée à P. On sait que

$$\mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(C_P) = [\lambda_1, \dots, \lambda_n] \text{ et donc } \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(C_P^k) = [\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k]$$

$\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$ sont exactement les racines (avec multiplicité) de $\chi_{C_P^k}$. De plus $C_P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, donc $C_P^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et alors $\chi_{C_P^k} \in \mathbb{Z}[X]$ car $k \geq 1$. On a alors $\chi_{C_P^k} \in \mathbb{Z}_n[X]$ et est unitaire. Le polynôme $\chi_{C_P^k}$ convient donc.

2. Supposons que $|\lambda_1| = \cdots = |\lambda_n| = 1$ et posons pour tout $k \geq 1$,

$$P_k = \prod_1^n (X - \lambda_i^k) = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_{k,i} X^k \in \mathbb{Z}[X]$$

(existe d'après la question précédente). On veut montrer que les coefficients des polynômes P_k sont uniformément bornés. Deux méthodes sont possibles.

→ **Méthode 1 (Topologie) :** On pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall x \in [0,1],\ |P_k(x)| = \prod_{i=1}^n \left| x - \lambda_i^k \right| \leq \prod_{i=1}^n \left(|x| + |\lambda_i|^k \right) \leq \prod_{i=1}^n (1+1) = 2^n$$

Considérons les deux normes suivantes sur $\mathbb{R}_n[X]$

$$\|.\|_\infty : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ P & \longmapsto \sup\limits_{x \in [0,1]} |P(x)| \end{cases}$$

ainsi que

$$\|.\|_{\infty,coef} : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ P & \longmapsto \sup\limits_{k \in [\![0;n]\!]} |a_k| \text{ lorsque } P(X) = \sum\limits_{k=0}^n a_k X^k \end{cases}$$

$\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, donc toutes les normes y sont équivalentes (voir chapitre sur l'équivalence des normes). Il existe donc une constante $C > 0$ telle que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \|P\|_{\infty,coef} \leq C \|P\|_\infty$$

On a donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\|P_k\|_{\infty,coef} \leq C 2^n$$

→ **Méthode 2 (Vieta) :** On souhaite borner les coefficients de P_k en utilisant une majoration des racines de ce dernier, il est donc naturel de chercher à utiliser des relations coefficients racines. Introduisons donc le lemme assez connu suivant

Lemme (Formules de Vieta) VIII.11.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les racines (non nécessairement différentes) de P. Supposons que $a_n \neq 0$. On a pour tout $l \in [\![0;n]\!]$

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_l \leq n} \left(\prod_{j=1}^l \lambda_{i_j} \right) = (-1)^l \frac{a_{n-l}}{a_n}$$

Nous ne démontrerons pas ce lemme, mais nous encourageons le lecteur à aller regarder la preuve de ce lemme qui peut être quelques fois assez utile. Appliquons ce lemme, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $l \in [\![1;n]\!]$

$$\begin{aligned}|a_{k,n-l}| &= \left|\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_l\leq n}\left(\prod_{j=1}^{l}\lambda_{i_j}\right)\right| \\ &\leq \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_l\leq n}\left|\prod_{j=1}^{l}\lambda_{i_j}\right| \\ &= \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_l\leq n} 1 = \binom{n}{l}\end{aligned}$$

Ceci nous permet donc d'affirmer que pour tout $i \in [\![0;n]\!]$ les coefficients $|a_{k,i}|$ sont bornés par une constante indépendante de k.

On a donc pour tout $i \in [\![0;n-1]\!]$, l'ensemble $\{a_{k,i},\ k \in \mathbb{N}^*\}$ est une partie bornée de $\mathbb{Z}$, elle est donc finie. L'ensemble $\{P_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ est alors fini, ce qui implique que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, l'ensemble $\{\lambda_i^k,\ k \in N\}$ est fini. On en déduit que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, il existe $k, l \in \mathbb{N}$ différents (on suppose sans perte de généralité que $k < l$) tels que $\lambda_i^k = \lambda_i^l$, i.e. $\lambda_i^{k-l} = 1$ et enfin pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, λ_i est une racine de l'unité.

Correction de l'exercice VII.9. :

1. On a

$$\begin{aligned}\mu_y \cdot y = 0 &\iff \mu_y \cdot (Q\cdot x) = 0 \iff (\mu_y Q)\cdot x = 0 \\ &\iff \mu_x | \mu_y Q \iff PQ|\mu_y Q \iff P|\mu_y\end{aligned}$$

Mais $P \cdot y = 0$, donc $\mu_y | P$ et ces deux polynômes sont unitaires, donc $\mu_y = P$.

2. Il est clair que $\mu_x\mu_y \cdot (x+y) = 0$ donc $\mu_{x+y}|\mu_x\mu_y$. De plus, on a

$$\mu_{x+y}\cdot(x+y) = 0 \Longrightarrow \mu_{x+y}\mu_x \cdot y = 0 \Longrightarrow \mu_y|\mu_{x+y}\mu_x$$

Mais $\mu_y \wedge \mu_x = 1$, donc d'après Gauß, $\mu_y|\mu_{x+y}$. Par le même raisonnement, on peut montrer également que $\mu_x|\mu_{x+y}$. Encore une fois, puisque $\mu_y \wedge \mu_x = 1$, on a $\mu_x\mu_y|\mu_{x+y}$. On en déduit donc que $\mu_x\mu_y = \mu_{x+y}$. $\mu_x\mu_y$ et μ_{x+y} sont unitaires ce qui nous permet d'affirmer que $\mu_x\mu_y = \mu_{x+y}$.

3. Posons $\mu_x = P_1^{\alpha_1}\dots P_r^{\alpha_r}$ et $\mu_y = P_1^{\beta_1}\dots P_r^{\beta_r}$. Posons également

$$\alpha_i' = \begin{cases}\alpha_i & \text{si } \alpha_i \geq \beta_i \\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \quad \text{et } \beta_i' = \begin{cases}\beta_i & \text{si } \beta_i > \alpha_i \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

$$P_x = P_1^{\alpha_1'}\dots P_r^{\alpha_r'} \text{ et } Q_y = P_1^{\beta_1'}\dots P_r^{\beta_r'}$$

Posons également $x' = \dfrac{\mu_x}{P_x}x$ et $y' = \dfrac{\mu_y}{Q_y}y$. D'après la question 1, on sait que $\mu_{x'} = P_x$ et $\mu_{y'} = Q_y$. De plus, on a $P_x \wedge Q_y = 1$, donc d'après la question précédente,

$$\mu_{x'+y'} = P_x Q_y = \mu_x \vee \mu_y$$

On en déduit donc que $z = x' + y'$ convient.

4. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Par une récurrence rapide, on sait qu'il existe d'après la question précédente $a \in E\backslash\{0\}$ tel que $\mu_a = \mu_{e_1} \vee \dots \vee \mu_{e_n}$. On a donc pour tout $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n \in E\backslash\{0\}$,

$$\mu_a \cdot x = x_1\mu_a\cdot e_1 + \dots + x_n\mu_a \cdot e_n = 0$$

Donc $\mu_x|\mu_a$. On en déduit que $\mu_a(u) = 0$ i.e. $\mu_u|\mu_a$ et de plus $\mu_u \cdot a = 0$ donc $\mu_a|\mu_u$ et ces deux polynômes sont unitaires, donc $\mu_a = \mu_u$.

Correction de l'exercice VIII.3. :

Soit $(A_p) \in \widetilde{F}^{\mathbb{N}}$ telle que $A_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} A$ et $z \in \mathbb{C} \setminus F$. Posons pour tout $p \in \mathbb{N}$, $Spec_{\mathbb{C}}(A_p) = [\lambda_{1,p}, \dots, \lambda_{n,p}]$. On a

$$\left|\chi_{A_p}(z)\right| = \prod_{i=1}^{n} |z - \lambda_{i,p}| \geq d(z,F)^n > 0$$

En passant donc à la limite, on a par continuité

$$|\chi_A(z)| \geq d(z,F)^n > 0$$

et donc $z \notin Spec_{\mathbb{C}}(A)$, i.e. $Spec_{\mathbb{C}}(A) \subset F$. On a donc bien que $A \in \widetilde{F}$, i.e. $\widetilde{F}$ est fermé.

Correction de l'exercice VIII.5. :

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la proposition VIII.4, Il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que

$$A = P \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & b_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{B} P^{-1}$$

et $\forall i,j \in [\![1;n]\!]$ tels que $j > i$, $|b_{i,j}| < \varepsilon$. Munissons $\mathbb{C}^n$ de la norme $\|.\|_1$, dont on rappelle la définition

$$\|.\|_1 : \begin{cases} \mathbb{C}^n & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x_1,\dots,x_n)^T & \longmapsto |x_1| + \dots + |x_n| \end{cases}$$

En posant $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, on a pour tout $X = x_1e_1 + \dots + x_ne_n \in \mathbb{C}^n$,

$$\|BX\|_1 = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i B e_i \right\|_1 \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, \|Be_i\|_1 \leq C\,\|X\|_1$$

Avec $C = \sup\limits_{i\in[\![1;n]\!]} \|Be_i\|$. On a donc, en considérant $|||.|||$ la norme d'opérateur associée à $\|.\|_1$ que

$$|||B||| \leq C = \sup_{i\in[\![1;n]\!]} \|Be_i\|_1 = \sup_{i\in[\![1;n]\!]} \left| \lambda_i + \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij} \right| \leq \sup_{i\in[\![1;n]\!]} |\lambda_i| + (n-1)\varepsilon$$

On choisit donc ε tel que $\sup_{i\in[\![1;n]\!]} |\lambda_i| + (n-1)\varepsilon < 1$. Ceci nous permet d'avoir $|||B||| < 1$ et donc

$$\begin{aligned} |||A^p||| = |||PB^pP^{-1}||| &\leq |||P||| \times |||B^p||| \times |||P^{-1}||| \\ &\leq |||P||| \times |||P^{-1}||| \times |||B|||^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0 \end{aligned}$$

et donc finalement $A^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$.

Correction de l'exercice VIII.6. :

Munissons $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme $\|.\|$ définie par

$$\|.\| : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (a_{i,j})_{i,j\in[\![1;n]\!]} & \longmapsto \sup\limits_{i,j\in[\![1;n]\!]} |a_{i,j}| \end{cases}$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^p \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, donc $\|A^p\| \in \mathbb{Z}$. De plus, $Spec_{\mathbb{C}}(A) \subset B(0,1)$, donc d'après l'exercice précédent et par équivalence des normes en dimension finie, $A^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$. $(\|A\|^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ qui converge vers 0, elle est donc stationnaire en 0. On en déduit donc que il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq r$, $\|A\|^p = 0$ i.e. $A^p = 0$. A est alors bien nilpotente.

Correction de l'exercice VIII.8. :

Posons $S = \{P^{-1}AP,\ P \in GL_n(\mathbb{C})\}$

→ ($\Leftarrow$) Supposons que S soit fermé et montrons qu'il existe une matrice diagonale D dans S. D'après la proposition VIII.4, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ et une suite de matrices $(P_k)_{k\in\mathbb{N}} \in GL_n(\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$P_k^{-1}AP_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & b_{k,i,j} \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et pour tout $j > i$, $|b_{k,i,j}| \leq \frac{1}{k+1}$. Cet argument nous permet d'affirmer que

$$P_k^{-1}AP_k \xrightarrow[p\to+\infty]{} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

S est fermé, donc cette matrice appartient à S. On en déduit donc que A est semblable à une matrice diagonale, i.e. A est diagonalisable.

→ ($\Rightarrow$) Supposons que A soit diagonalisable. Montrons que $\bar{S} = S$. Soit $B \in \bar{S}$. On veut montrer que $B \in S$. L'application

$$\phi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow \mathbb{C}_n[X] \\ M & \longmapsto \chi_M \end{cases}$$

est continue, car pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, les coefficients de $\phi(M)$ dans $\mathbb{C}_n[X]$ sont polynomiaux en les coeffcients de M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. De plus, ϕ est constante sur S égale à χ_A, elle est donc constante aussi sur $\bar{S}$ égale à χ_A par continuité. Ceci nous permet de dire que $\chi_A = \chi_B$ et que A et B ont les mêmes valeurs propres et même multiplicité.

$$\psi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto \mu_A(M) \end{cases}$$

est continue car polynômiale et constante sur S égale à 0, donc par continuité elle est aussi égale à 0 sur l'adhérence de S et alors $\mu_A(B) = 0$. A est diagonalisable, donc μ_A est scindé à racines simples et alors B est diagonalisable. D'après ce qui précéde, A et B ont même valeurs propres et même multiplicités, donc A et B sont semblables diagonalisables et finalement $B \in S$.

Correction de l'exercice VIII.10. :

Le cas $A = 0$ est trivial. Supposons que $A \neq 0$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A. Supposons que $|\lambda| = |||A|||$. Quitte à diviser les deux côtés de l'égalité par $|\lambda|$, on suppose que $|||A||| = 1 = |\lambda|$. On

a alors
$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ |||A^p||| \leq |||A|||^p = 1$$

Soit $F = \text{Ker}(A - \lambda I)^{\alpha_A(\lambda)}$. En posant $u : X \longmapsto AX$ et $v = u\Big|_F^F$, on sait que il existe N nilpotente telle que $v = \lambda I + N$. On veut montrer donc que $N = 0$.

Idée : On sait que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $|||v^p||| \leq |||A^p||| \leq 1$, donc v^p est borné. On va donc montrer que si $N \neq 0$, alors v^p est non bornée.

Supposons que $N \neq 0$. Soit $m > 1$ l'indice de nilpotence de N. Il existe donc $X \in \mathbb{C}^n$ tel que $N^{m-1}X \neq 0$. Posons $Y = N^{m-2}X$. On a alors $NY \neq 0$ et $N^2Y = 0$. On a alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$

$$v^pY = (\lambda I + N)^pY = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \lambda^k N^{n-k} Y = \lambda^p Y + p\lambda^{p-1}NY$$

Or $\lambda^p Y$ est borné ca $|\lambda| \leq 1$ et

$$\left\| p\lambda^{p-1}NY \right\| = p\,\|NY\| \xrightarrow[p \to +\infty]{} +\infty$$

donc v^p est non bornée, ce qui est absurde. On en déduit donc que $N = 0$ et alors $\text{Ker}(A - \lambda I)^{\alpha_A(\lambda)} = \text{Ker}(A - \lambda I)$ i.e. λ est pure.

* *
*

Document compilé par Omar Bennouna et Issam Tauil le 13/05/2022 pour cpge-paradise.com.
Si vous repérez une erreur, ou avez des remarques, prière de me contacter via l'adresse contact@cpge-paradise.com.