CHAPITRE 3

Cardinaux

I Généralités

Définition I.1.

Soient E et F deux ensembles. On dit que E et F ont même cardinal ou sont équivalents lorsqu'il existe une application $f : E \longrightarrow F$ qui soit bijective.

Remarquons que la relation introduite ci-dessus définit une relation d'équivalence.

Exercice I.2.

Soit E un ensemble. Montrer que E et $\mathcal{P}(E)$ ne sont pas équivalents.

1. Cardinaux finis et infinis

Définition I.3.

Un ensemble E est dit fini s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que E est équivalent à $[\![0; n]\!]$. Le cardinal de E est alors $n+1$.
Dans ce cas, on note $|E| = n+1$.

Convention : On convient que l'ensemble vide est fini et que $|\varnothing| = 0$.

Proposition I.4.

Soient E et F deux ensembles finis et f une application de E dans F. Si E et F sont équivalents et $f : E \longrightarrow F$ est surjective ou injective, alors elle est bijective.

Définition I.5.

On dit qu'un ensemble est infini lorsqu'il n'est pas fini.

Exercice I.6.

Soit E un ensemble.

1. Montrer que si E est infini, alors il existe une application $f : \mathbb{N} \longrightarrow E$ qui soit injective.
2. Montrer que E est infini si, et seulement si, il existe une application $f : E \longrightarrow E$ qui soit injective mais non surjective.

II Ensembles dénombrables

Définition II.1.

Soit E un ensemble. On dit que E est dénombrable lorsqu'il est fini ou s'il existe une bijection f de $\mathbb{N}$ dans E.

Remarque 1 : Dans la littérature, il existe deux définitions de la dénombrabilité. L'une d'entre elles est celle ci-dessus, l'autre se réduit uniquement à l'existence d'une bijection avec $\mathbb{N}$.
Remarque 2 : Si E et F sont deux ensembles équivalents, alors E est dénombrable si, et seulement si, F l'est.
Exemples :

→ $\mathbb{N}^*$ est dénombrable. En effet, il suffit de considérer la bijection $f : x \longmapsto x+1$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$.

→ $\mathbb{Z}$ est dénombrable. En effet, il suffit de considérer la bijection $f : x \longmapsto \begin{cases} 2\,|x|-1 & \text{si } x<0 \\ 2x & \text{sinon} \end{cases}$ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$.

Remarque : Plutôt que de retenir cette bijection à l'aide de sa formule explicite, il est loisible de retenir comment elle est construite. Trouver une bijection entre un ensemble et $\mathbb{N}$, c'est trouver comment énumérer ses éléments. Pour énumerer les éléments de $\mathbb{Z}$, il suffit de poser que 0 est le 0-ième élément, 1 est le premier élément, -1 est le deuxième élément, 2 est le troisième élément et ainsi de suite : il s'agit d'énumérer tour à tour les entiers positifs et les entiers négatifs.

Proposition II.2.

Soit E et F deux ensembles.

1. Toute partie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.
2. S'il existe une application $f : E \longrightarrow F$ qui soit injective et si F est dénombrable, alors E est dénombrable.
3. S'il existe une application $f : F \longrightarrow E$ qui soit surjective et si F est dénombrable, alors E est dénombrable.
4. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.
5. Le produit cartésien de deux ensembles dénombrables est dénombrable.
6. $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
7. Soit I un ensemble dénombrable. Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles dénombrables. Alors $\displaystyle\bigcup_{i\in I} E_i$ est dénombrable.

Preuves

1. Soit A une partie de $\mathbb{N}$. Si A est fini, il n'y a rien à prouver. On suppose donc que A est infini. Nous allons définir récursivement une bijection de $\mathbb{N}$ dans A.

   → **Initialisation :** on pose $f(0) = \min A$.

   → **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $F(0), f(1), \ldots, f(n)$ soient correctement définis. On pose alors $f(n+1) = \min A \setminus \{f(0), \ldots, f(n)\}$.

   Montrons que f ainsi définie est bien une bijection de $\mathbb{N}$ dans A.

   → Injectivité
   si $m > n$, alors m est le minimum d'un ensemble qui ne contient pas $f(n)$, donc $f(n) \neq f(m)$.

   → Surjectivité
   Pour montrer la surjectivité de f, on suppose par l'absurde qu'il existe un élément $a \in A$ qui

n'est pas atteint par f, i.e. $a \notin f(\mathbb{N})$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a \in A \setminus \{f(0), ..., f(n)\}$, donc

$$a > \min A \setminus \{f(0), ..., f(n)\} = f(n+1)$$

ce qui est absurde, car la quantité $\min A \setminus \{f(0), ..., f(n)\}$ peut être arbitrairement grande pour n assez grand.

Le lecteur pourra vérifier que f est croissante pour s'exercer.

2. Si F est fini, alors E aussi. Si F est infini, alors il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Soit ϕ une bijection de F dans N. $\phi \circ f : E \longrightarrow \mathbb{N}$ est injective, donc en posant $A = \phi \circ f(E)$, l'application $\phi \circ f : E \longrightarrow A$ est bijective. Or A est inclus dans F et F est dénombrable, donc A l'est et finalement E aussi puisqu'ils sont en bijection.

3. f étant surjective, on peut affirmer que pour tout $x \in E$, $f^{-1}(\{x\})$ est non vite et donc écrire F sous forme de l'union d'ensembles disjoints suivante $F = \bigcup_{x \in E} f^{-1}(\{x\})$. On définit une application $S : E \longrightarrow F$ de la manière suivante : pour tout $x \in E$, $S(x) \in f^{-1}(\{x\})$ (on choisit un élément quelconque de $f^{-1}(\{x\})$, ce qui est possible car cet ensemble est non vide). Les ensembles $(f^{-1}(\{x\}))_{x \in E}$ étant disjoints, on a pour tous $x, y \in E$, si $x \neq y$ alors $S(x) \neq S(y)$. Donc $S : E \longrightarrow F$ est injective. Il suffit alors d'appliquer le point (2).

4. On considère l'application de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ $f : (m, n) \longmapsto 2^m(2n+1)$. Montrons qu'elle est injective. Soit $m, n, m', n' \in \mathbb{N}$. On suppose sans perte de généralité que $m \geq m'$. Si $f(m, n) = f(m', n')$, alors on a $2^{m-m'}(2n+1) = (2n'+1)$. $2^{m-m'}$ divise un nombre impair, donc nécessairement $m = m'$ et par conséquent $n = n'$. Donc f est injective. On peut alors appliquer le point (2).

5. **Lemme :** E est dénombrable si et seulement si exsite une surjection de $\mathbb{N}$ dans E.
Appliquons ce lemme. Soit E et F dénombrables, alors il existe deux applications $s_E : \mathbb{N} \longrightarrow E$ et $s_F : \mathbb{N} \longrightarrow F$ surjectives. On considère alors l'application

$$s : \begin{cases} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow E \times F \\ (m, n) & \longmapsto (s_E(m), s_E(n)) \end{cases}$$

Cette application est surjective et $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable, on peut donc appliquer le point (3).

6. Il suffit de considérer l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* & \longrightarrow \mathbb{Q} \\ (p, q) & \longmapsto \frac{p}{q} \end{cases}$$

Cette application est surjective et $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable d'après le point (5), donc $\mathbb{Q}$ est dénombrable d'après le point (3).

7. On pose $A = \bigcup_{i \in I} E_i$. Pour tout $i \in I$ E_i est dénombrable, donc on peut considérer une surjection $s_i : \mathbb{N} \longrightarrow E_i$. On considère donc l'application

$$s : \begin{cases} I \times \mathbb{N} & \longrightarrow A \\ (i, n) & \longmapsto s_i(n) \end{cases}$$

cette application est une surjection et $I \times N$ est dénombrable, on peut alors appliquer le point (3).

III Exercices

Exercice III.1.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X \subset [\![1;2n]\!]$. On suppose que $|X| \geq n+1$. Montrer qu'il existe $a, b \in X^2$ tel que $a \neq b$ et $a|b$.

Exercice III.2.

Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Exercice III.3.

Soit Λ un ensemble. Soit $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d'intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$. Montrer que si les intervalles $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ sont deux à deux disjoints, alors Λ est dénombrable.

Exercice III.4.

On dit qu'une partie Ω de $\mathbb{R}$ est ouverte au sens topologique lorsque pour tout $x \in \Omega$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \Omega$. Montrer qu'un intervalle est ouvert au sens topologique si et seulement si il est ouvert au sens de l'ordre.

Exercice III.5.

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que $A = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0\}$ est ouvert.

Exercice III.6.

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Montrer que Ω est réunion dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

Exercice III.7.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ monotone et Δ_f l'ensemble des points de discontinuité de f. Montrer que Δ_f est dénombrable.

Exercice III.8.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe. Montrer que $A = \{a \in \mathbb{R},\ \text{f n'est pas dérivable en a}\}$ est dénombrable.

Exercice III.9.

On dit que $\alpha \in \mathbb{C}$ est algébrique s'il existe $P \in \mathbb{Q}[X]\setminus\{0\}$ tel que $P(\alpha) = 0$. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.
Remarque : la définition ci dessus du fait que α soit algébrique est équivalente à $\exists P \in \mathbb{Z}[X]\setminus\{0\}\ P(\alpha) = 0$.

Correction de l'exercice I.2. :

Supposons qu'il exsite une application surjective $S : E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$. On pose $A = \{x \in E,\ x \notin S(x)\}$.
Si A admet un antécédant a par S, alors si $a \in S(a)$, $a \notin A = S(a)$ ce qui est absurde. De même, si $a \notin S(a)$, alors $a \in A = S(a)$ ce qui est encore absurde. Il n'exsite pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$, ils ne sont donc pas équivalents.

Correction de l'exercice I.6. :

1. Nous allons construire $f : \mathbb{N} \longrightarrow E$ récursivement.
   - $\rightarrow$ **Initialisation :** E est infini donc non vide. On peut donc choisir $a_0 \in E$ et on pose $f(0) = a_0$.
   - $\rightarrow$ **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $f(0), \dots, f(n)$ sont correctement définis. $A_n = E \setminus \{f(0), \dots, f(n)\}$ est non vide car E est infini, on peut donc choisir $a_{n+1} \in A_n$ et on pose $f(n+1) = a_{n+1}$.

   L'application f définie ci dessus est injective. En effet, si $m > n$, alors
   $f(m) \in E \setminus \{f(0), \dots, f(m-1)\}$ ce qui donne que $f(m) \neq f(n)$.
2. - $\rightarrow$ ($\Leftarrow$) Soit $f : E \longrightarrow E$ injective mais non sujective. E est fini équivalent à lui même, donc la proposition I.4 nous permet d'affirmer que f est bijective donc surjective, ce qui est absurde.
   - $\rightarrow$ ($\Rightarrow$) Supposons que E est infini. D'après la question précédente, on dispose d'une injection $i : \mathbb{N} \longrightarrow E$. On définit

     $$f : \begin{cases} E & \longrightarrow E \\ x & \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in E \setminus i(\mathbb{N}) \\ i(n+1) & \text{si } x = i(n) \text{ avec } n \in \mathbb{N} \end{cases} \end{cases}$$

     Montrons que f est injective et non surjective.
     Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$.
     - Si $x \in i(\mathbb{N})$, alors y aussi, car sinon on disposerait d'un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(x) = i(n)$, et donc $f(y) = y = f(x) = i(n) \in i(\mathbb{N})$ ce qui est absurde. On dispose alors de $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $f(x) = i(a+1)$, $f(y) = i(b+1)$, $x = i(a)$ et $x = i(b)$. On a alors $i(a+1) = i(b+1)$. Par injectivité de i, on a $a = b$ et donc $i(a) = i(b)$ et finalement $x = y$.
     - Si $x \notin i(\mathbb{N})$, alors y aussi, sinon on disposerait d'un $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(y) = i(n+1)$ et donc $f(x) = x = f(y) = i(n+1) \in i(\mathbb{N})$ ce qui est absurde. L'égalité $f(x) = f(y)$ devient donc $x = y$. D'où l'injectivité de f.

     En ce qui concerne la non-surjectivité, il suffit de remarquer que $i(0)$ n'admet pas d'antécédant. En effet, s'il exsite $x \in E$ tel que $f(x) = i(0)$, alors nécessairement on dispose d'un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = i(n)$, et donc on a $i(n+1) = i(0)$. Ceci nous donne que $n = -1$ ce qui est absurde.

Correction de l'exercice III.1. :

Pour tout $x \in X$, on écrit $x = 2^{k(x)}(2l(x) + 1)$. Les nombres de la forme $2l(x) + 1$ sont tous dans $[\![1; 2n]\!]$ et il y en au au plus n. Par le lemme des tiroirs (car $|X| \geq n + 1 > n$), il existe donc $a \neq b$ élements de X tels que $2l(a) + 1 = 2l(b) + 1$. En supposant sans perte de généralité que $k(a) \geq k(b)$, on obtient que $a = 2^{k(a)-k(b)}b$, donc $b|a$.

Correction de l'exercice III.2. :

On va montrer que $[0, 1[$ n'est pas dénombrable. On suppose par l'absurde qu'on dispose d'une énumération dénombrable de $[0, 1[$, i.e. il existe une suite injective $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $[0, 1[= \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'écriture décimale propre de x_n comme $x_n = 0, x_{1,n}x_{2,n}x_{3,n} \dots$. On construit alors une suite $(y_q)_{q\in\mathbb{N}^*} \in \{1, \dots, 8\}^{\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, $y_q \neq x_{q,q}$. On pose $y = 0, y_1y_2y_3 \dots$

Par hypothèse, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $y = x_{n_0}$. L'écriture de y_{n_0} étant également propre, on a que $y_{n_0} = x_{n_0,n_0}$ ce qui est absurde.

Correction de l'exercice III.3. :

Pour tout $\lambda \in \Lambda$, il existe $r_\lambda \in I_\lambda \cap \mathbb{Q}$. Pour tous $\lambda, \lambda' \in \Lambda$, si $\lambda \neq \lambda'$, par hypothèse $I_\lambda \cap I_{\lambda'} = \emptyset$ donc $r_\lambda \neq r_{\lambda'}$. L'application $\lambda \longmapsto r_\lambda$ est une injection de Λ dans $\mathbb{Q}$, donc d'après la propriété 2 de la proposition II.2, Λ est dénombrable.

Correction de l'exercice III.4. :

→ ($\Leftarrow$) On pose $\Omega =]a, b[$ avec $a < b$. Soit $x \in \Omega$. On pose $\varepsilon = \frac{1}{2}\min(x - a, b - x)$. On a alors $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset \Omega$. Donc Ω est ouvert au sens topologique.

→ ($\Rightarrow$) Soit I un intervalle non vide dont les bornes sont $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$. Supposons que I est ouvert au sens topologique. Pour tout $\varepsilon > 0$ $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\not\subset I$. De même, $]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\not\subset I$. On a alors par hypothèse $a, b \notin I$. I est donc ouvert au sens de l'ordre. Le cas des bornes infinies est laissé comme exercice au lecteur.

Correction de l'exercice III.5. :

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq 0$. On suppose sans perte de généralité que $f(x_0) > 0$. Par continuité de f, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2} f(x_0)$$

Ceci implique que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$

$$f(x) > \frac{f(x_0)}{2} > 0$$

On en déduit que pour tout $x_0 \in A$, il existe $\eta > 0$ tel que $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\subset A$. Donc A est ouvert.

Correction de l'exercice III.6. :

Uniquement pour cet exercice, pour tout $x, y \in \Omega$, on utilise l'abus de notation suivant

$$[x, y] = [y, x] = [\min(x, y), \max(y, x)]$$

On introduit la relation d'équivalence $\sim$ sur Ω définie par

$$x \sim y \iff [x, y] \subset \Omega$$

Le lecteur pourra vérifier par lui même qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence.
Soit I une classe d'équivalence selon $\sim$. Si $x, y \in I$, alors pour tout $z \in [x, y]$, $[x, z] \subset [x, y] \subset \Omega$, donc alors $[x, y] \subset I$. I est donc convexe, et par conséquent c'est un intervalle.
Montrons que I est ouvert. Soit $x \in I$. Ω étant ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset \Omega$. Donc pour tout $y \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$, $[x, y] \subset \Omega$ et par conséquent $y \in I$. I est alors ouvert.
Conclusion : Ω est réunion disjointe de classes d'équivalences selon $\sim$ qui sont toutes des intervalles ouverts. D'après l'exercice III.3, cette réunion est dénombrable.

Correction de l'exercice III.7. :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $f(x^+)$ et $f(x^-)$ respectivement la limite à droite et à gauche de f en x. Supposons sans perte de généralité que f est croissante. Soit $a \in \mathbb{R}$. On sait que $f(a^-) \leq f(a) \leq f(a^+)$. Ainsi, pour tout $a \in \Delta_f$, $f(a^-) < f(a^+)$.
Posons pour tout $a \in \Delta_f$, $I_a =]f(a^-), f(a^+)[$. Soit $b \in \Delta_f$ différent de a. Si $a < b$, alors $f(a^+) \leq f(b^-)$. De même si $a > b$, alors $f(a^-) \geq f(b^+)$. Les intervalles $(I_a)_{a \in \Delta_f}$ sont ouverts, non vides et disjoints. D'après l'exercice III.3, on déduit que Δ_f est dénombrable.

Correction de l'exercice III.8. :

Soit $a \in A$. On pose $I_a =]f'_g(a), f'_d(a)[$. On pose pour tous $x \neq y$, $p_x(y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ Si $a, b \in A$ avec $a < b$, alors pour tout $x \in]a, b[$ (voir chapitre précédent sur les fonctions convexes)

$$f'_d(a) \leq p_a(x) = p_x(a) \leq p_x(b) = p_b(x) \leq f'_g(b)$$

et alors $I_a \cap I_b = \emptyset$ et pour tout $x \in A$, I_a est non vide. Il suffit donc d'appliquer l'exercice III.3.

Correction de l'exercice III.9. :

On note $\overline{\mathbb{Q}}$ l'ensemble des nombres algébriques. On pose pour tout $n \in N$,

$$H_n = \{P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X],\ d \leq n \text{ et } \forall k \in [\![1; d]\!],\ |a_k| \leq n\}$$

Un simple raisonnement combinatoire permet d'affirmer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|H_n| \leq (2n+1)^{n+1}$. H_n est donc fini pour tout n. Or pour tout $P \in \mathbb{Z}[X]$, pour n assez grand $P \in H_n$. Donc $\mathbb{Z}[X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$. $\mathbb{Z}[X]$ est union d'ensembles finis, donc d'après la propriété 7 de la proposition II.2, $\mathbb{Z}[X]$ est dénombrable.
Enfin, on écrit $\overline{\mathbb{Q}} = \bigcup_{P \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}} Z(P)$ (avec pour tout P, $Z(P)$ l'ensemble des zéros de P). $\overline{\mathbb{Q}}$ est donc réunion dénombrable d'ensembles finis donc d'après la proposition 7 de la propriété II.2, $\overline{\mathbb{Q}}$ est dénombrable.

* *
*

Document compilé par Omar Bennouna et révisé par Issam Tauil le 22/04/2022 pour cpge-paradise.com.
Si vous repérez une erreur, ou avez des remarques, prière de me contacter via l'adresse contact@cpge-paradise.com.