Chapitre 32

Exponentielle d'une matrice

Dans tout le chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(E, \|.\|)$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel normé de dimension finie n, et $\mathcal{L}(E)$ désigne l'espace vectoriel (de dimension finie n^2) des endomorphismes linéaires de E, implicitement muni de la norme d'opérateur $|||.|||$ induite par $\|.\|$.

Notations

→ On note pour tout $h \in \mathcal{L}(E)$ et $R \geq 0$,

$$B_{|||.|||}(h, R) = \{u \in \mathcal{L}(E),\ |||u - h||| < R\}$$

et lorsqu'il n'y a pas ambiguïté, on note tout simplement $B(h, R)$.

→ Pour toute suite $(a_k) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on dit que $\sum a_k z^k$ est une série entière de rayon au moins $R \in]0, +\infty[$ lorsque pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, la série $\sum\limits_{k \geq 0} a_k z^k$ est convergente, i.e. la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k z\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

→ Pour toute base β de E et tous $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$, on note $[u]_\beta$ la matrice de u dans la base β et $[x]_\beta$ le vecteur colonne des coordonnées de x dans la base β.

→ Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on note $\mathbb{K}[u] = \mathrm{Vect}\{u^k,\ k \in \mathbb{N}\}$.

→ Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\mathbb{K}[M] = \mathrm{Vect}\{M^k,\ k \in \mathbb{N}\}$.

→ Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\langle M \rangle_{\mathbb{K}} = \{PMP^{-1},\ P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})\}$.

→ Soit X, Y deux ensembles munis de lois de compositions internes, on note $\mathrm{Hom}(X, Y)$ l'ensemble des homomorphismes de X dans Y.

I Généralités, propriété fonctionnelle

1. Calcul opérationnel

Soit $\sum a_k z^k$ une série entière de rayon $R \in]0, +\infty]$

Proposition I.1.

1. Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $|||u||| < R$, $\sum a_k u^k$ est une série absolument convergente.
2. La fonction
$$f : \begin{cases} B_{|||.|||}(0, R) & \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ u & \longmapsto f(u) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k u^k \end{cases}$$
est continue

1. On rappelle qu'une norme d'opérateur est une norme d'algèbre (sous-multiplicative) et que donc

$\left\|\left\| u^k \right\|\right\| \leq \left\|\left\| u \right\|\right\|^k$. Par conséquent, on a

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \left\|\left\| a_k u^k \right\|\right\| \leq |a_k| \cdot \left\|\left\| u \right\|\right\|^k$$

et la série $\sum |a_k| \left\|\left\| u \right\|\right\|^k$ est convergente car $\left\|\left\| u \right\|\right\| < R$. Ainsi, la série est absolument convergente. De plus, $\mathcal{L}(E)$ étant complet (E est de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et donc $\mathcal{L}(E)$ aussi), la série converge bien dans $\mathcal{L}(E)$ aussi (d'après le corolaire III.4 du chapitre 11.2).

Remarque : On rappelle que, par équivalence des normes en dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la convergence normale ne dépend pas de la norme choisie (qu'elle soit triple ou pas), donc ce résultat est toujours valable si on avait choisi une autre norme N sur E et sa norme d'opérateur associée $\left\|\left\| . \right\|\right\|_N$ (ici par contre on oblige qu'elle soit triple pour assurer sa sous-multiplicativé). En particulier, pour montrer que la série $\sum a_k u^k$ converge, il suffit de trouver une norme $\|.\|$ sur E dont la norme triple vérifie $\left\|\left\| u \right\|\right\|_{\|.\|} < R$ où R est le rayon de convergence de $\sum a_k z^k$.

2. Soit ρ tel que $0 < \rho < R$. La série$\sum a_k z^k$ est normalement convergente sur $B(0,\rho)$, ceci étant car

$$\forall u \in B(0,\rho),\ \forall k \in \mathbb{N},\ \left\|\left\| a_k u^k \right\|\right\| \leq |a_k| \cdot \left\|\left\| u \right\|\right\|^k \leq |a_k|\, \rho^k$$

et $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot \rho^k$ est convergente. En particulier, $B(0,\rho)$ étant ouvert, f est donc continue sur ce dernier.

On déduit donc que f est continue sur $\bigcup_{0<\rho<R} B(0,\rho) = B(0,R)$

Notation : Par abus de notation, parfois on confondra série entière $\sum a_k z^k$ et son application associée sur $\mathcal{L}(E)$, $u \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k u^k$. Par exemple, on dira que la série entière $\sum a_k u^k$ est convergente sur $B_{\|\|.\|\|}(h,R)$ (avec $(h,R) \in \mathcal{L}(E) \times \mathbb{R}^+$) si la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k u^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente pour tout $u \in B_{\|\|.\|\|}(h,R)$.

Exercice I.2.

1. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ une série entière de rayon $R > 0$. Montrer que si
$$\rho(u) := \sup\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{VP}(u)\} < R,$$
alors $\sum a_k u^k$ est convergente.

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ et $g = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ tel que $\left\|\left\| u \right\|\right\| < \min(\rho(f), \rho(g))$. Montrer que $f(u) \circ g(u) = (fg)(u)$.

Définition I.3.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on appelle exponentielle de u l'endomorphisme $\exp(u) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} \in \mathcal{L}(E)$.

Par ce qui précède,

$$\exp : \begin{cases} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ u & \longmapsto \exp(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} \end{cases}$$

est bien définie partout et est continue (et même vérifie $|||\exp(u)||| \leq e^{|||u|||}$).

Remarque : Pour montrer que l'application exp telle que définie ci-dessus est bien définie, il suffit d'appliquer le théorème précédent à $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$ qui est de rayon de convergence infini.

Proposition I.4.

Notons pour tout $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$, $[u, v] := u \circ v - v \circ u$. Pour tout, $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ on a

$$[u, v] = 0 \Longrightarrow \exp(u + v) = \exp(u) \circ \exp(v).$$

En particulier, $\exp(u) \circ \exp(-u) = id_E$ et donc exp est à valeurs dans $\mathrm{GL}(E)$.

On fournira deux preuves : la première type série entière et une seconde, plus longue, moins calculatoire, et plus aspect differentiel/morphisme (pour anticiper sur le chapitre suivant).

Preuve 1 : Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n := \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!}\right) \circ \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{v^k}{k!}\right) - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(u+v)^k}{k!}\right)$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
|||S_n||| &= \left|\left|\left| \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \frac{u^i \circ v^j}{i!j!} - \sum_{k=0}^{n} \sum_{i+j=k} \frac{\binom{k}{i} u^i \circ v^j}{k!} \right|\right|\right| \\
&= \left|\left|\left| \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \frac{u^i \circ v^j}{i!j!} - \sum_{\substack{i+j \leq n \\ i \geq 0\ j \geq 0}} \frac{u^i \circ v^j}{i!j!} \right|\right|\right| = \left|\left|\left| \sum_{\substack{i+j \geq n+1 \\ 0 \leq i,j \leq n}} \frac{u^i \circ v^j}{i!j!} \right|\right|\right| \\
&\leq \sum_{\substack{i+j \geq n+1 \\ 0 \leq i,j \leq n}} \frac{|||u|||^i \cdot |||v|||^j}{i!j!} \\
&= \left(\sum_{0}^{n} \frac{|||u|||^k}{k!}\right) \cdot \left(\sum_{0}^{n} \frac{|||v|||^k}{k!}\right) - \left(\sum_{0}^{n} \frac{(|||u||| + |||v|||)^k}{k!}\right) \\
&\xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{|||u|||} \cdot e^{|||v|||} - e^{|||u||| + |||v|||} = 0
\end{aligned}$$

Ainsi

$$S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Or, par continuité de la composition, on a aussi

$$S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \exp(u) \circ \exp(v) - \exp(u + v)$$

d'où le résultat

Preuve 2 : Cette preuve est facultative et a été ajoutée uniquement pour donner un avant goût du chapitre suivant. Le lecteur peut la saute s'il le souhaite.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, posons $\exp_t : z \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} z^k = e^{tz}$. On a pour $t, t' \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathcal{L}(E)$

$$\exp(tu) \circ \exp(t'u) = \exp_t(u) \circ \exp_{t'}(u) \underset{(*)}{=} (\exp_t \times \exp_{t'})(u) = (\exp_{t+t'})(u) = \exp((t+t')u)$$

L'égalité $(*)$ est vraie d'après l'exercice I.2. Ceci nous assure que $\exp(u) \in \mathrm{GL}(E)$ étant donné que le résultat ci-dessus donne $\exp(u) \circ \exp(-u) = \exp(0) = id_E$.

Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, notons

$$f_u : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathrm{GL}(E) \\ t & \longmapsto \exp(tu) \end{cases}$$

qui est, par ce qui précède, un morphisme (continu) de groupes.

Remarquons maintenant que

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{f_u(t) - f_u(0)}{t} = u + t \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{(k+2)!} u^{k+2} \right)}_{g(t)}$$

On sait que $g : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(E)$ est continue et est donc en particulier bornée sur le compact $[-1, 1]$.
On déduit en particulier que f_u est dérivable en 0 et que en passant à la limite, étant donné que g est bornée sur un voisinage de 0, on a $f_u'(0) = u$. De plus, en utilisant l'égalité vue en début de cette preuve, on a pour tout $t, t_0 \in \mathbb{R}$,

$$f_u(t + t_0) = f_u(t_0) \circ f_u(t) = f_u(t) \circ f_u(t_0)$$

et donc

$$\begin{aligned} \frac{f_u(t) - f_u(t_0)}{t - t_0} &= \frac{f_u(t - t_0) \circ f_u(t_0) - f_u(t_0)}{t - t_0} \\ &= \frac{f_u(t - t_0) - f_u(0)}{t - t_0} \circ f_u(t_0) \xrightarrow[t \to t_0]{} u \circ f_u(t_0) \end{aligned}$$

Et alors f_u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f_u'(t) = u \circ f_u(t)$.

Remarquons que ceci, en utilisant le théorème de Cauchy-Lipshitz, vu dans le cas de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et sera vu d'une perspective plus générale dans le chapitre suivant, fournit une caractérisation différentielle de l'exponentielle, à savoir :

$$\exp(u) = f_u(1) \text{ où } \begin{cases} f_u \in C^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(E)) \\ f_u'(t) = u \circ f_u(t) \\ f_u(0) = id_E \end{cases}$$

Montrons à présent la propriété voulue en utilisant ce qui précède. Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $[u, v] = 0$. Il est clair que u, v, $\exp(tu)$ et $\exp(tv)$ commutent deux à deux (car u^k et v^l commutent pour tout $k, l \in \mathbb{N}$).

Considérons $g(t) = f_u(t) \circ f_v(t)$ qui, par commutation, vérifie $g \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}, \mathrm{GL}(E))$. Par bilinéarité de la composition, on obtient que $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathrm{GL}(E))$ et que

$$g'(t) = f_u'(t) \circ f_v(t) + f_u(t) \circ f_v'(t) = u \circ f_u(t) \circ f_v(t) + f_u(t) \circ v \circ f_v(t) = (u+v) \circ f_u(t) \circ f_v(t) = (u+v) \circ g(t)$$

En évaluant en 0 on obtient

$$g'(0) = f_u'(0) + f_v'(0) = u + v$$

On en déduit donc que g vérifie les propriétés suivantes

$$\begin{cases} g \in C^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(E)) \\ g'(t) = (u+v) \circ g(t) \\ g(0) = id_E \end{cases}$$

ce qui signifie d'après l'unicité fournie par le théorème de Cauchy-Lipschitz que $g = f_{u+v}$ et donc finalement

$$\exp(u) \circ \exp(v) = g(1) = f_{u+v}(1) = \exp(u+v)$$

Remarque culturelle : Nous citons dans cette remarque des éléments hors programmes et non nécessaires pour les concours.

→ En fait, en examinant la preuve ci-dessus, on peut facilement déduire une preuve du résultat suivant.

$$\begin{cases} f \in C^0(\mathbb{R}, \mathcal{L}(E)) \cap \mathrm{Hom}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(E)) \\ f \text{ dérivable en } 0 \end{cases} \implies \begin{cases} f \in C^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(E)) \\ \forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = f'(0) \circ f(t) \\ f(0) = id_E \end{cases}$$

Les conditions de gauches sont donc suffisantes pour caractériser l'exponentielle (elle y sont même clairement équivalentes, étant donné que l'exponentiel est dans $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(E)) \cap C^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(E))$). On en déduit qu'une autre version de la preuve aurait pu être la suivante : g vérifie les deux conditions de gauche ainsi que les deux conditions avec $g'(0) = u + v$, ce qui nous permet directement de dire que $g = f_{u+v}$ et finalement $\exp(u) \circ \exp(v) = g(1) = \exp(u+v)$.

→ L'intérêt des deux approches (homomorphisme et differentielle) est qu'elles sont généralisables, ou plutôt sont les approches typiques, lorsqu'on travaille avec des groupes et algèbres de Lie abstraites. Pour le lecteur curieux, la manière moderne typique de définir l'exponentielle de $v \in Lie(G)$ est de considérer le flot de l'unique champs de vecteur invariant à gauche (ou droite) associé à v et de l'évaluer en 1. C'est ce qui a été fait (de manière plus simplifiée) ci dessus.

Exercice I.5.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\left(id_E + \frac{u}{k}\right)^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \exp(u)$$

Remarque : Bien évidemment, tout ce qui a été construit jusqu'à présent est valable lorsqu'on remplace $\mathcal{L}(E)$ par $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et la composition d'endomorphisme par le produit matriciel.

2. Logarithme

Cette partie est à but purement culturel, nous ne fournirons donc pas les preuves de résultats ci-dessus.

Définition I.6.

Notons $\mathrm{Unip}(E)$ l'ensemble des endomorphismes unipotents de E i.e.

$$\mathrm{Unip}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E),\ u - id_E \text{ est nilpotent}\}$$

On définit le logarithme dans $\mathcal{L}(E)$ de la manière suivante.

$$\log : \begin{cases} B_{\|\|.\|\|}(id_E, 1) \cup \mathrm{Unip}(E) & \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ id_E + u & \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} u^k \end{cases}$$

Proposition I.7.

Les propriétés suivantes sont vraies.

- $\rightarrow$ log est continue sur $B_{\|\|\,.\,\|\|}(id_E, 1)$.
- $\rightarrow$ Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $\dfrac{d}{dt} \log(id + tu)\Big|_{t=0} = u$.
- $\rightarrow$ Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ $\log(u) \in \mathbb{K}[u]$.
- $\rightarrow$ $\forall u \in B(id_E, 1) \cup \mathrm{Unip}(E),\ \exp(\log(u)) = u$.
- $\rightarrow$ $\log(\exp(u)) = u$ pour u nilpotent ou assez proche de 0.

II Propriétés géométriques

Cette partie est hors-programme. Désormais $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On note $\|.\|$ la norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note de plus pour $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$

$$i_P : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto PAP^{-1} \end{cases}$$

Exercice II.1.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \in \mathbb{K}[A]$$

Proposition II.2.

Pour tout $(A, P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, on a

$$i_P \circ \exp = \exp \circ i_P \text{ i.e. } P \exp(A) P^{-1} = \exp(PAP^{-1})$$

Preuve : On a pour $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{0}^{N} \frac{(PAP^{-1})^k}{k!} = P \left(\sum_{0}^{N} \frac{A^k}{k!} \right) P^{-1}$$

Par continuité de i_P et en passant à la limite, on obtient le résultat.

Lemme II.3.

Soit $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, écrivons la $A = D + N$ où $D = Diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in D_n(\mathbb{K})$ est diagonale et $N \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K})$ est strictement triangulaire supérieure. Les propriétés suivantes sont vérifiés.

1. $\exp(D) = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})$
2. $\exp(N) = I_n + N + \dfrac{N^2}{2!} + \cdots + \dfrac{N^{n-1}}{(n-1)!}$, formule vraie pour tout nilpotent.
3. L'égalité suivante est vraie.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ & \ddots & * \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \exp(A) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & * & * \\ & \ddots & * \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Preuve

1. Clair en remarquant que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $D^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)$. Le lecteur ayant un doute est encouragé à faire la preuve lui même.
2. N est nilpotente et son degré de nilpotence est au plus n, donc tous les termes de degré strictement supérieur à n dans la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{N^k}{k!}$ sont nuls.
3. Pour montrer ce résultat, il suffit de remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^k}{k!} & * & * \\ & \ddots & * \\ 0 & & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix}.$$

Ceci qui donne le résultat en passant à la limite.

Remarque : Une manière pratique de calculer l'exponentielle d'une matrice A est considérer sa décomposition de Jordan-Dunford $A = D + N$ où D est diagonalisable, N nilpotente et $[D, N] = 0$. Dans ce cas, l'exponentielle de D et N est facile à calculer et en utilisant le fait que D et N commutent, on peut voir que $\exp(A) = \exp(D)\exp(N)$.

Proposition II.4.

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$

1. On note $\operatorname{Spec}(A) = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ (on rappelle que la notation $[.]$ veut dire un $n-$uplet avec possible répétition et sans prise en compte de l'ordre). On a

$$\operatorname{Spec}(\exp(A)) = [e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}]$$

2. $\det(\exp(A)) = e^{\operatorname{Tr}(A)}$ (on retrouve que $\det A \neq 0$, i.e. $\exp(A) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$)

Preuve : Trigonalisons la matrice A, on pose

$$A = PBP^{-1} \text{ avec } P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \text{ et } B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ & \ddots & * \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

On rappelle que $\exp(A) = P\exp(B)P^{-1}$.

1. Le lemme II.3 nous donne que
$$\mathrm{Spec}(\exp(A)) = \mathrm{Spec}(\exp(B)) = [e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}].$$
2. Toujours par le lemme II.3,
$$\det(\exp(A)) = \det(\exp(B)) = e^{\lambda_1} \dots e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} = e^{\mathrm{Tr}(A)}.$$

Proposition II.5.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Les propositions suivantes sont vraies.
1. Si A est diagonalisable alors $\exp(A)$ l'est aussi.
2. Si A est nilpotente alors $\exp(A) = I_n + A + \dots + \dfrac{A^{n-1}}{(n-1)!}$ est unipotente, i.e. s'écrit de la forme $I + N$ où N est une matrice nilpotente.
3. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\det(\exp(A)) > 0$.

Preuve :
1. Écrivons $A = PDP^{-1}$ où D est diagonale. Ceci donne que $\exp(A) = P\exp(D)P^{-1}$. Le lemme permet de conclure vu que $\exp(D)$ est également diagonale.
2. Il suffit de voir que $A + \dots + \dfrac{A^{n-1}}{(n-1)!}$ est nilpotente. Le lecteur ayant un doute peut le vérifier à la main.
3. On rappelle que $\det(\exp(A)) = e^{\mathrm{Tr}(A)} \in \mathbb{R}^{+*}$.

Exercice II.6.

1. Trouver les matrices $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tel que $\det(A) > 0$ et $A \notin \exp(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\exp(A)$ l'est
3. Montrer que $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Correction de l'exercice I.2. :

1. Prenons $\varepsilon > 0$. Sur $\mathbb{C}$, on peut diagonaliser u à $\varepsilon-$près (voir proposition VIII.4 du chapitre 28 sur la réduction d'endomorphismes) i.e. il existe une base $\beta = (e_{1,\varepsilon}, \ldots, e_{n,\varepsilon})$ tel que

$$[u]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & b_{i,j} \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où pour tout $1 \leq i \leq j \leq n$, $|b_{i,j}| \leq \varepsilon$. Quitte à diminuer ε, on peut supposer que

$$n\varepsilon + \max(|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|) < R$$

On considère la norme suivante sur E.

$$N : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto \|[x]_\beta\|_1 \end{cases}$$

Considérons $|||.|||_N$, la norme d'opérateur associée à N. On a pour tout $x \in E$, en posant $[x]_\beta = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}^T$,

$$\begin{aligned} N(u(x)) = \|[u]_\beta [x]_\beta\|_1 &= \sum_{k=1}^{n} \left| x_k \lambda_k + \sum_{j=k+1}^{n} b_{k,j} x_j \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \underbrace{|\lambda_k|}_{\leq \rho(u)} |x_k| + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k+1}^{n} |b_{k,j}| \, |x_j| \\ &\leq \rho(u) N(x) + \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k+1}^{n} |x_j| \leq (\rho(u) + n\varepsilon) N(x). \end{aligned}$$

On en déduit donc que $|||u|||_N \leq \rho(u) + n\varepsilon < R$, d'où le résultat. On notera au passage que cette preuve nous permet de déduire le résultat suivant.

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Pour toute norme N de $\mathbb{C}^n$ on notera $||| \cdot |||_N$ la norme d'opérateur associée. Alors

$$\rho(A) = \inf \underbrace{\{|||A|||_N, \ N \text{ norme de } \mathbb{C}^n\}}_{H}$$

En effet, on a pour tout $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$, $|\lambda| \leq |||A|||_N$. Pour voir ce point, il suffit de considérer $X \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I) \setminus \{0\}$ et de remarquer que $|||A|||_N N(X) \geq N(AX) = |\lambda| N(X)$. Ceci entraîne que $\rho(A) \leq |||A|||_N$, i.e. $\rho(A)$ est un minorant de H. La preuve ci-dessus montre que pour tout $R > \rho(A)$, il existe N tel que $|||A|||_N \leq R$, ce qui donne le résultat voulu.

2. Preuve exactement similaire à celle (type série entière) du théorème I.4. en majorant par la norme et utilisant le produit de convolution.

Correction de l'exercice I.5. :

Méthode 1 (calculcatoire) : Posons $r = |||u|||$. Soit $\varepsilon > 0$. Considérons N assez grand fixé tel que

$$\sum_{i=N}^{\infty} \frac{r^i}{i!} < \frac{\varepsilon}{4}$$

On a pour tout $k \geq N + 1$,

$$\left\|\left(id_E+\frac{u}{k}\right)^k-\exp(u)\right\| = \left\|\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{u^i}{k^i}-\sum_{i=0}^{\infty}\frac{u^i}{i!}\right\| = \left\|\sum_{i=0}^{k}\frac{\frac{k!}{(k-i)!k^i}-1}{i!}u^i-\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{u^j}{j!}\right\|$$

$$\leq \sum_{i=0}^{N}\frac{\left|\frac{k!}{(k-i)!k^i}-1\right|}{i!}r^i+\sum_{i=N+1}^{k}\frac{\overbrace{\frac{k!}{(k-i)!k^i}}^{\leq 1}+1}{i!}r^i+\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{r^j}{j!} \leq \underbrace{\sum_{i=0}^{N}\frac{\overbrace{\left|\frac{k!}{(k-i)!k^i}-1\right|}^{\xrightarrow[k\to+\infty]{}0}}{i!}r^i}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{}0}+2\underbrace{\sum_{j=N+1}^{\infty}\frac{r^j}{j!}}_{<\frac{\varepsilon}{2}}$$

En particulier, pour k assez grand on a

$$\left\|\left(id_E+\frac{u}{k}\right)^k-\exp(u)\right\| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Et donc

$$\left(id_E+\frac{u}{k}\right)^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \exp(u)$$

Méthode 2 (réduction d'endomorphisme) : Attention, cette preuve n'est valable que dans le cas $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ car on y utilise la décomposition de Jordan-Dunford qui n'est valable que dans $\mathbb{C}$. Nous utilisons ici des propriétés vues dans le chapitre 28 sur la réduction d'endomorphisme.
Soit β une base de E où on peut écrire $u=d+\nu$ (Jordan-Dunford, proposition VI.9 chapitre 28) avec

$$[d]_\beta=\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n),\ \nu \text{ nilpotent et } d\circ\nu=\nu\circ d$$

On a alors

$$\left[\left(id_E+\frac{u}{k}\right)^k\right]_\beta = \left[\left(id_E+\frac{d}{k}+\frac{\nu}{k}\right)^k\right]_\beta \underset{(*)}{=} \left[\sum_{i=0}^{n-1}\binom{k}{i}\left(id_E+\frac{d}{k}\right)^{k-i}\frac{\nu^i}{k^i}\right]_\beta$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\underbrace{\frac{k(k-1)\dots(k-i+1)}{k^i}}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{}1}\underbrace{\operatorname{diag}\left(\underbrace{\left(1+\frac{\lambda_1}{k}\right)^{k-i}}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{}e^{\lambda_1}},\dots,\underbrace{\left(1+\frac{\lambda_n}{k}\right)^{k-i}}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{}e^{\lambda_n}}\right)}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{}\operatorname{diag}(e^{\lambda_1},\dots,e^{\lambda_n})=[\exp(d)]_\beta}\frac{[\nu]_\beta^i}{i!}$$

Remarquons que dans le terme droite de l'égalité $(*)$, l'indice de sommation s'arrête à n et non pas k car ν est nilpotent et pour tout $i\geq n$, $\nu^n=0$. Ainsi par continuité de la composition/multiplication ($n=\dim E$ est fixé), on obtient

$$\left[\left(id_E+\frac{u}{k}\right)^k\right]_\beta \xrightarrow[k\to+\infty]{} \left[\exp(d)\circ\left(\sum_{0}^{n-1}\frac{\nu^i}{i!}\right)\right]_\beta = [exp(d)\circ\exp(\nu)]_\beta \underset{\substack{\uparrow \\ d\circ\nu=\nu\circ d}}{=} [\exp(d+n)]_\beta = [\exp(u)]_\beta$$

D'où le résultat voulu.

Correction de l'exercice II.1. :

On rappelle que $\mathbb{K}[A]$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, qui est de dimension finie.

$\mathbb{K}[A]$ est donc fermé (d'après la proposition III.6 du chapitre 11.7). $\exp(A)$ est limite d'une suite à valeurs dans $\mathbb{K}[A]$. En effet, on a

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}}_{\in \mathbb{K}[A]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(A).$$

$\mathbb{K}[A]$ étant fermé, on a bien $\exp(A) \in \mathbb{K}[A]$.

Correction de l'exercice II.6. :

1. Remarquons tout d'abord que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$,

$$Pe^A P^{-1} = e^{PAP^{-1}}$$

et donc

$$\forall B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}),\ B \in \exp(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) \Longleftrightarrow \exists A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \langle B\rangle_{\mathbb{R}} = \exp(\langle A\rangle_{\mathbb{R}})$$

Il suffit donc de calculer l'image de chaque classe d'équivalence (de conjugaison) par exp.
Rappelons également ce résultat classique

Lemme II.7.

Deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ réelles sont équivalences dans $\mathbb{C}$ si et seulement si elles le sont dans $\mathbb{R}$, i.e.

$$\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ PAP^{-1} = B \Longleftrightarrow \exists Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),\ QAQ^{-1} = B$$

Ceci signifie que toutes les équivalences qu'on manipulera ci-dessous qui sont valables dans $\mathbb{C}$ le sont également dans $\mathbb{R}$ dès lors que les matrices sont réelles.
Remarquons qu'il est facile de voir que l'exponentielle de toute matrice est de déterminant strictement positif et qu'il suffit de traiter le cas des matrices de déterminant égal à 1. En effet, pour tout $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec $\det A > 0$, on a l'équivalence

$$A = \exp(B) \Longleftrightarrow \underbrace{\frac{A}{\sqrt{\det(A)}}}_{\text{déterminant égal à 1}} = \exp\left(B - \frac{1}{2}\log(\det(A)) I_2\right)$$

En utilisant cette remarque, on peut voir que pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de déterminant égal à 1, si il existe $B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = \exp(B)$, alors

$$1 = \det A = \det \exp(B) = \exp \mathrm{Tr}(B) \text{ et donc } \mathrm{Tr}(B) = 0$$

Sachant que $\det(\exp(B)) = \exp(\mathrm{Tr}(B))$, nous nous intéresseront donc à l'exponentielle de matrices de traces nulles. Trouvons donc toutes les classes d'équivalence (de conjugaison) d'une matrice de la forme $M = \exp(A)$ avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

→ **Cas 1 :** A diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
A étant de trace nulle, on a nécessairement $A \simeq \mathrm{diag}(\lambda, -\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Dans ce cas,

$$\exp(A) \simeq \mathrm{diag}(e^{\lambda}, e^{-\lambda}) \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}$$

Ainsi, ce cas correspond aux classes de conjugaison de la forme

$$\left\{ \left\langle \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}},\ t > 0 \right\}$$

→ **Cas 2 :** A diagonalisable dans $\mathbb{C}$ mais pas $\mathbb{R}$ (ou est nulle).

Encore une fois, on a $A \simeq \operatorname{diag}(\lambda, -\lambda)$ et les valeurs propres de cette matrice son conjuguées car elle est réelle, ce qui implique que son polynôme caractéristique l'est aussi ce qui fait que ses racines sont conjuguées. On a alors

$$\overline{\lambda} = -\lambda \iff \lambda = \pm \mu i \text{ avec } \mu \in \mathbb{R}$$

On en déduit donc que $A \simeq \operatorname{diag}(\mu i, -\mu i)$ avec $\mu \in \mathbb{R}$. Ainsi,

$$\exp(A) \simeq \begin{pmatrix} \cos(\mu) + i\sin(\mu) & 0 \\ 0 & \cos(\mu) - i\sin(\mu) \end{pmatrix} \underset{(*)}{\simeq} \begin{pmatrix} \cos(\mu) & -\sin(\mu) \\ \sin(\mu) & \cos(\mu) \end{pmatrix} = R_\mu$$

L'équivalence $(*)$ est vraie car les deux matrices sont diagonalisables et ont les mêmes valeurs propres, comptés avec multiplicité (un autre argument aurait pu être le fait qu'ils sont diagonalisables, de taille 2, et ont la même trace et le même déterminant). Ce cas correspond donc aux classes de conjugaison de la forme

$$\left\{ \left\langle \begin{pmatrix} \cos(\mu) & -\sin(\mu) \\ \sin(\mu) & \cos(\mu) \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}},\ \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

→ **Cas 3 :** A est non diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Dans ce cas, les valeurs propres de A sont égales (car si elles étaient distinctes A serait diagonalisable). On a alors, étant donné que $\operatorname{Tr}(A) = 0$, les valeurs propres de A sont nulles et $A \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (voir exercice VI.6 du chapitre 28 sur la réduction d'endomorphisme). Par conséquent, on en déduit que ce cas correspond à la classe d'équivalence $\langle \exp(A) \rangle_{\mathbb{R}} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$.

Revenons au cas général. Soit A une matrice de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} \exists B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ A = \exp(B) &\iff \exists B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \frac{A}{\sqrt{\det(A)}} = \exp\left(B - \frac{1}{2}\log(\det(A)) I_2\right) \\ &\iff \frac{A}{\sqrt{\det(A)}} \in \exp(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) \end{aligned}$$

$\sqrt{\det(A)}$ peut prendre n'importe quelle valeur dans $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit donc que $A \in \exp(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ si, et seulement si, A appartient aux classes d'équivalences trouvées multipliées par un réel strictement positif, c'est à dire une classe appartenant à l'ensemble suivant

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a \end{pmatrix},\ a > 0 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a\cos(\mu) & -a\sin(\mu) \\ a\sin(\mu) & a\cos(\mu) \end{pmatrix},\ \mu \in \mathbb{R} \text{ et } a > 0 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},\ a, b > 0 \right\}$$

Étant donné que pour tout $a > 0$, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

L'ensemble des classes d'équivalences possibles pour $A \in \exp(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}))$ sont les classes de l'ensemble suivant.

$$\left\{\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix},\ a>0\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix} a\cos(\mu) & -a\sin(\mu) \\ a\sin(\mu) & a\cos(\mu) \end{pmatrix},\ \mu\in\mathbb{R} \text{ et } a>0\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},\ a,b>0\right\}$$

On souhaite maintenant trouver les classes d'équivalences des matrices $A \notin \exp(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$. En s'inspirant de l'exercice VI.6 du chapitre 28 sur la réduction d'endomorphisme, on peut voir que les classes d'équivalence de $\{A \in GL_2(\mathbb{R}),\ \det A > 0\}$ sont les suivantes

$$\left\{\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix},\ a\in\mathbb{R}^*\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix} a\cos(\mu) & -a\sin(\mu) \\ a\sin(\mu) & a\cos(\mu) \end{pmatrix},\ \mu\in\mathbb{R} \text{ et } a>0\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},\ a,b\in\mathbb{R}^* \text{ et } ab>0\right\}$$

Donc les classes restantes n'appartenant pas à $\exp(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ sont les suivantes

$$\left\{\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix},\ a<0\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},\ a<0,\ b<0 \text{ et } a\neq b\right\}$$

2. Le sens direct a déja été fait, faisons donc la réciproque. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\exp(A)$ est diagonalisable. Écrivons la décomposition de Dunford de A

$$A = D+N,\ D \text{ diagonalisable},\ N \text{ nilpotente et } DN=ND$$

Notons d l'indice de nilpotence de N. On a alors

$$\exp(A) = \exp(D)\left(\sum_{k=0}^{d-1}\frac{N^k}{k!}\right) = \exp(D) + \exp(D)\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{d-1}\frac{N^k}{k!}\right)}_{N'}$$

Le fait que $DN = ND$ nous donne $DN' = N'D$. De plus, par continuité de la multiplication matricielle, on a également, $\exp(D)N' = N'\exp(D)$ car pour tout $r\in\mathbb{N}$,

$$\left(\sum_{k=0}^{r}\frac{D^k}{k!}\right)N' = N'\left(\sum_{k=0}^{r}\frac{D^k}{k!}\right)$$

ce qui nous donne la relation voulue en faisant tendre r vers l'infini. Ainsi, $\exp(D)N'$ est nilpotente (car N' est nilpotente et commute avec $\exp(D)$) et donc l'unicité de la décomposition de Dunford de $\exp(A)$ fournit que

$$\exp(D)N' = 0 \text{ i.e. } N' = 0$$

car $\exp(A)$ est diagonalisable. D'après la proposition VII.5 du chapitre 28 de réduction d'endomorphismes, $(I_n, N, \dots, N^{d-1})$ est une base de $\mathbb{K}[N]$ et donc, en particulier, une famille libre. Ainsi, $N' = 0$ implique que $d = 1$ i.e. $N = 0$ et A est donc diagonalisable car égale à D, qui est diagonalisable.

Remarque : En examinant la preuve ci-dessus, on peut voir que le résultat suivant est vrai : pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, on a l'équivalence

$$\exp(A) = I_n \iff A \text{ est diagonalisable et } \operatorname{Spec}(A)\subset 2\pi i\mathbb{Z}.$$

3. La première chose à laquelle on pense ici est la décomposition de Dunford. Soit $A \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$. On veut trouver une matrice Ω telle que $A = \exp(\Omega)$. En posant $A = D+N$ avec D diagonalisable et N nilpotente avec $DN = ND$, on peut voir que

$$A = D\underbrace{(I + \underbrace{D^{-1}N}_{\text{nilpotente}})}_{H}$$

Il semble donc intuitif de chercher à montrer qu'il existe $\Delta, V \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ tels que $D = e^{\Delta}$ et $H = e^V$ et de montrer que Δ et V commutent. Commençons par montrer ce résultat pour H : on montre que pour toute matrice de la forme $I + N'$ avec N' nilpotente, il existe $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ telle que $I + N' = \exp(M)$. Soit donc $B = I + N'$ avec N' nilpotente.

On veut s'inspirer du développement en série entière de $x \longmapsto \ln(1+x)$. On sait que le développement en série entière de cette fonction s'écrit

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

Notre intuition est donc d'utiliser un équivalent matriciel de ce développement en série entière, et donc on souhaite montrer que

$$M = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{N'^k}{k} \underset{\substack{\uparrow \\ N'^d = 0}}{=} \sum_{k=1}^{d-1} (-1)^{k+1} \frac{N'^k}{k}$$

est un bon candidat pour la matrice M. On a

$$e^y - 1 = \underbrace{y + \frac{y^2}{2!} + \cdots + \frac{y^{d-1}}{(d-1)!}}_{Q(y)} + O(y^d)$$

$$\ln(1+x) = \underbrace{x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^d \frac{x^{d-1}}{d-1}}_{P(x)} + O(x^d)$$

et donc

$$x = e^{\ln(x+1)} - 1 = Q(P(x)) + O((\ln(1+x))^d) = Q(P(x)) + O(x^d)$$

On en déduit donc que

$$Q(P(x)) - x = \underbrace{O(x^d)}_{\text{polynôme noté } R}$$

On voit clairement que R ne contient que des termes de degré supérieur ou égal à d. On en déduit donc, en utilisant le fait que $M^d = 0$, que

$$e^M - I = Q(M) = Q(P(N')) = \underbrace{Q(P(N')) - N'}_{=0} + N' = N'$$

On rappelle que $R(N') = Q(P(N')) - N'$ est une combinaison de puissances de N' de degré supérieur à d et est donc nulle. On en déduit donc que

$$I + N' = \exp\left(\sum_{k=1}^{d-1} (-1)^{k+1} \frac{N'^k}{k} \right)$$

En appliquant ce résultat pour $N' = D^{-1}N$, on peut écrire

$$A = D(I + D^{-1}N) = D \exp \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{d-1} (-1)^{k+1} \frac{(D^{-1}N)^k}{k} \right)}_{M}$$

De plus, D étant diagonalisable, on en déduit qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ et $U \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ tels que

$$D = U\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)U^{-1}$$

Soit $\mu_1, \ldots, \mu_d$ tels que pour tout $i \in [\![1; d]\!]$, $e^{\mu_i} = \lambda_i$ et vérifiant $\forall i, j \in [\![1; n]\!],\ \lambda_i = \lambda_j \Longrightarrow \mu_i = \mu_j$. On veut choisir Δ de manière à garder la commutation avec M. Soit F un polynôme complexe tel que pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $F(\lambda_i) = \mu_i$ (existe, pour le voir on peut utiliser les polynômes interpolateurs de Lagrange). On a alors, posant $\Delta = U\mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)U^{-1}$,

$$F(D) = U\mathrm{diag}(F(\lambda_1), \ldots, F(\lambda_n))U^{-1} = U\mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)U^{-1} = \Delta$$

De plus, il est clair que $e^{\Delta} = D$. Δ est polynômiale en D et D commute avec M donc Δ aussi, et alors en utilisant la proposition I.4, on en déduit que

$$A = D\exp(M) = \exp(\Delta)\exp(M) = \exp(\Delta + M)$$

D'où le résultat.

Remarque : En examinant la preuve ci-dessus, on peut en déduire facilement le résultat suivant qui est plus puissant : Pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, il existe $B \in \mathbb{C}[A]$ tel que $A = \exp(B)$.
En effet, en reprenant les notations de la preuve on peut montrer que $\Delta + M$ est un polynôme en A. On écrit encore une fois $A = D + N$ la décomposition de Dunford de A. D'après la proposition VI.9 du chapitre 28 sur la réduction d'endomorphismes, D et N sont des polynômes en A. En particulier, en utilisant la même astuce avec les polynômes interpolateurs de lagrange, on peut voir que D^{-1} est un polynôme en D et donc un polynôme en A. Par conséquent on voit que $D^{-1}N$ est également un polynôme en A. On en déduit alors finalement que M est un polynôme en A. On a vu que Δ aussi et alors $M + \Delta$ est également un polynôme en A.

* *
*

Document compilé par Omar Bennouna et Issam Tauil le 18/02/2023 pour cpge-paradise.com.
Si vous repérez une erreur, ou avez des remarques, prière de me contacter via l'adresse contact@cpge-paradise.com.