Chapitre 4

Valeurs d'adhérence

I Extractions

Définition I.1.

On appelle extraction ou extractrice toute application (injective) strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Exemple : Les fonctions suivantes sont des extractices.

- $\to$ $n \longmapsto 2n$
- $\to$ $n \longmapsto 2n+1$
- $\to$ $n \longmapsto 2^n$
- $\to$ $n \longmapsto 4^n$
- $\to$ $n \longmapsto (n+1)!$ (attention, $n \longmapsto n!$ n'est pas une extractrice car $0! = 1!$)

Proposition I.2.

Soit φ, ψ des extractions. Les propositions suivantes sont vraies.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$.
2. Soit $A \subset \mathbb{N}$ infini. Il existe une (unique) extraction γ telle que $\gamma(\mathbb{N}) = A$.
3. $\psi \circ \varphi$ est une extractive. Plus généralement, si $(\varphi_i)_{i\in[\![1;k]\!]}$ est une famille d'extractices, alors $\varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_k$ l'est aussi.
4. Considérons une famille d'extractrices $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$. $\gamma(n) = (\varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n)(n)$ (avec $\gamma(0) = 0$) est une extraction, appellée extraction diagonale.

1. Il suffit de le faire par récurrence.
   - $\to$ **Initialisation :** Il est clair que $\varphi(0) \geq 0$.
   - $\to$ **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $\varphi(n) \geq n$. On a alors

   $$\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n \text{ et donc } \varphi(n+1) \geq n+1$$

   d'où le résultat voulu.
2. **Existence :** A est une partie infinie de $\mathbb{N}$, on peut donc considérer $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une énumération croissante de A. Il est alors facile de montrer que $\gamma : n \longmapsto a_n$ est une extractrice.

   Unicité : Si γ et φ sont deux extractrices vérifiant $\gamma(\mathbb{N}) = \varphi(\mathbb{N}) = A$, alors en supposant par l'absurde que $\gamma \neq \varphi$, on peut considérer le plus petit entier k tel que $\varphi(k) \neq \gamma(k)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\varphi(k) > \gamma(k)$. On en déduit que pour tout $l < k$, $\varphi(l) = \gamma(l) < \gamma(k)$ et pour tout $l \geq k$, $\varphi(l) \geq \varphi(k) > \gamma(k)$. On en déduit alors que $\gamma(k) \notin \varphi(\mathbb{N})$ et alors que $\varphi(\mathbb{N}) \neq A$ ce qui est absurde.
3. Il suffit d'utiliser le fait que la composition d'applications strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ est strictement croissante.

4. En effet, γ est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\gamma(n+1) &= \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n(\varphi_{n+1}(n+1)) \\ &\geq \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n(n+1) \\ &\geq \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n(n) + 1 \geq \gamma(n) + 1 > \gamma(n)\end{aligned}$$

Définition I.3.

Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ où E est un ensemble non vide. On dit que $(v_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est une suite extraite de (u_n) s'il existe une extractrice φ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$. On notera $\mathrm{Ext}(u_n)$ l'ensemble des suites extraites de (u_n).

Exemple : Pour toute suite (u_n), les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont des suites extraites de (u_n).

Proposition I.4.

Si (w_n) est une suite extraire de (v_n) et (v_n) une suite extraite de (u_n) alors (w_n) est extraite de (u_n).

Remarque : Cette propriété est généralisable à plusieurs extractions par récurrence.

Proposition I.5.

Soit (u_n) une suite réelle. Les positions suivantes sont vraies.

1. (u_n) est non majorée si et seulement s'il existe une extractrice φ telle que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$
2. (u_n) ne tends pas vers 0 si et seulement s'il existe une extractrice φ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|u_{\varphi(n)}\right| > \varepsilon$.
3. Si (u_n) est à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors (u_n) ne tends pas vers l'infini si et seulement s'il existe une extractrice φ telle que $(u_{\varphi(n)})$ est constante.

Preuve :

1. L'implication de droite à gauche est facile. Montrons l'implication de gauche à droite. Supposons que u_n est non majorée et construisons une extractrice φ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} \geq n$.
   - $\rightarrow$ (u_n) est non bornée, il existe donc k tel que $u_k \geq 0$. On pose alors $\varphi(0) = k$.
   - $\rightarrow$ Supposons que pour tout $l \in [\![0; n]\!]$, φ est définie de manière à ce qu'on ait $u_{\varphi(l)} \geq l$. Encore une fois, (u_n) est non bornée donc il existe $k \geq \varphi(n)$ tel que $u_k \geq n+1$, on pose donc $\varphi(n+1) = k$.

   On a donc bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} \geq n$ et donc $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
2. Encore une fois, l'implication de droite à gauche est facile. Montrons donc l'implication de gauche à droite. Le fait que (u_n) tends vers 0 est équivalent à

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n| \leq \varepsilon$$

   écrivons donc la négation de cette proposition

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N,\ |u_n| > \varepsilon$$

   Considérons donc $\varepsilon > 0$ vérifiant la proposition ci-dessus. Il est alors clair que l'ensemble

$$A = \left\{n \in \mathbb{N},\ \left|u_{\varphi(n)}\right| > \varepsilon\right\}$$

est infini. On sait donc d'après le point 2 de la position I.2 qu'il existe une extractrice φ telle que $\varphi(\mathbb{N}) = A$, et alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|u_{\varphi(n)}\right| \geq n$.

3. Encore une fois, l'implication de droite à gauche est facile. Montrons donc l'implication de gauche à droite. Supposons que (u_n) ne tends pas vers $+\infty$. Le fait que u_n tends vers l'infini est équivalent à la proposition
$$\forall M > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n \geq M$$
La négation de cette proposition est donc
$$\exists M > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N,\ u_n < M$$
Considérons alors M vérifiant la propriété. La proposition ci-dessus nous permet d'affirmer que l'ensemble
$$A = \{n \in \mathbb{N},\ u_n \in [\![0; M]\!]\}$$
est infini. En posant pour tout $i \in [\![0; M]\!]$ $A_i = \{n \in \mathbb{N},\ u_n = i\}$, on peu écrire $A = \bigcup_{i=0}^{M} A_i$. A est infini donc il existe $i \in [\![0; M]\!]$ tel que A_i est infini. En utilisant le point 2 de la propriété I.2, on peut affirmer l'existence d'une extractrice φ telle que $\varphi(\mathbb{N}) = A_i$ et alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{\varphi(n)} = i$ ce qui est bien le résultat voulu.

II Valeurs d'adhérence

Définition et Proposition II.1.

Soit $u = (u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \mathbb{C}$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. $\forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N,\ |u_n - a| < \varepsilon$
2. Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N},\ |u_n - a| < \varepsilon\}$ est infini.
3. Il existe une extractrice φ telle que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$.

Si ces propositions sont vérifiées, on dit que a est une valeur d'adhérence de (u_n) et on note $\mathrm{Adh}(u_n)$ l'ensemble des valeurs d'adhérences de (u_n).

Preuve :

→ (1) ⇒ (2) Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N},\ |u_n - a| < \varepsilon\}$ est fini. En posant $N = \max A$, on voit que pour tout $n > N$, $n \notin A$. On en déduit alors que
$$\exists \varepsilon > 0,\ \exists N \in N,\ \forall n \geq N,\ |u_n - a| \geq \varepsilon$$
ce qui est absurde.

→ (2) ⇒ (3) Construisons par récurrence une extractrice φ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|u_{\varphi(n)} - a\right| \leq \dfrac{1}{n+1}$.

- L'ensemble $A(1)$ est non vide, il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $|u_k - a| \leq 1$. On pose alors $\varphi(0) = k$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout $l \in [\![0; n]\!]$, $\varphi(l)$ est défini tel que $\left|u_{\varphi(l)} - a\right| \leq \dfrac{1}{l+1}$. L'ensemble $A\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$ est une partie de $\mathbb{N}$ infinie donc non bornée, il existe donc $k \in A\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$ tel que $k > \varphi(n)$. On pose alors $\varphi(n+1) = k$.

On a donc bien que pour tout $n \in N$, $\left|u_{\varphi(n)} - a\right| \leq \dfrac{1}{n+1}$ et donc $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$.

→ (3) ⇒ (1) Le point (3) est équivalent à

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \left|u_{\varphi(n)} - a\right| < \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. D'après ce qui précéde, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq M$, $\left|u_{\varphi(n)} - a\right| < \varepsilon$. En posant $n = \varphi(\max(M, N))$, on voit que $n \geq \varphi(N) \geq N$ et $|u_n - a| < \varepsilon$, ce qui est bien le résultat voulu.

Exemples :

1. Les valeurs d'adhérence de la suite $(u_n) = ((-1)^n)$ sont 1 et -1. En effet, $1 \in \mathrm{Adh}(u_n)$ et $-1 \in \mathrm{Adh}(u_n)$ car $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$. De plus, si $a \notin \{-1, 1\}$, alors l'ensemble $\{n \in \mathbb{N},\ |u_n - a| < \varepsilon\}$ avec $\varepsilon = \dfrac{1}{2}\min(|a-1|, |a+1|)$ est fini (vide), donc a ne peut pas être une valeur d'adhérence de (u_n).
2. Plus généralement, si (u_n) est T-périodique avec $T \in \mathbb{N}^*$ alors $\mathrm{Adh}(u_n) = \underbrace{\{u_0, \ldots, u_{T-1}\}}_{B}$. En effet, pour tout $k \in [\![0; T-1]\!]$, $u_{nT+k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} u_k$ et donc $u_k \in \mathrm{Adh}(u_n)$. On en déduit donc que $B \subset \mathrm{Adh}(u_n)$. Réciproquement, si $a \notin B$, alors pour tout $b \in B$, $|a - b| \geq \min\limits_{x\in B} |a - x| > 0$ et donc l'ensemble $\{n \in \mathbb{N},\ |u_n - a| < \varepsilon\}$ avec $\varepsilon = \min\limits_{x\in B} |a - x|$ est fini (vide) donc a ne peut pas être une valeur d'adhérence de (u_n). On en déduit alors qu'on a bien $\mathrm{Adh}(u_n) = B$.
3. Si (u_n) est à valeurs strictement positives, alors $0 \notin \mathrm{Adh}(u)$ si et seulement si $\exists \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq \varepsilon$. En effet, si $0 \notin \mathrm{Adh}(u_n)$, il existe donc ε tel que $A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N},\ u_n < \varepsilon\}$ est fini. On en déduit alors que $A(\varepsilon)$ est majoré et donc en posant $N = \max A(\varepsilon)$, on peut affirmer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \min(\varepsilon, |u_0|, \ldots, |u_N|) > 0$. La réciproque est vraie par définition.

Exercice II.2.

Trouver une suite réelle (u_n) telle que $\mathrm{Adh}(u_n) = \mathbb{R}$.

Proposition II.3.

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{C}$. Si (u_n) converge vers l, alors $\mathrm{Adh}(u_n) = \{l\}$.

Preuve : Soit φ une extractrice et $\varepsilon > 0$. On dipose de $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N$ $|u_n - l| < \varepsilon$ et donc, étant donné que que pour tout $k \in \mathbb{N}$ $\varphi(k) \geq k$, on peut affirmer que pour tout $n \geq N$, $|u_{\varphi(n)} - l| < \varepsilon$ et donc $u_{\varphi(n)} \longrightarrow l$. On en déduit donc que $\mathrm{Adh}(u_n) = \{l\}$.

III Bolzano-Weierstraß

Théorème (Théorème de Bolzano-Weierstraß) III.1.

Soit (u_n) une suite réelle. Si (u_n) est bornée, alors elle admet une valeur d'adhérence.

Preuve : Pour montrer ce théorème, on aura besoin du lemme suivant.

Lemme (Lemme des pics) III.2.

Toute suite réelle (u_n) admet une suite extraite monotone.

Preuve du lemme : Posons $A = \{n \in \mathbb{N},\ \forall k \geq n,\ u_n \geq u_k\}$. Deux cas se présentent.

→ Si A est infini, alors d'après le point 2 de la proposition I.2, on peut considérer une extractrice φ telle que $\varphi(\mathbb{N}) = A$ et de remarquer que par définition de A, $(u_{\varphi(n)})$ est décroissante.

→ Si A est fini (ou vide), alors étant donné que A est une partie finie de $\mathbb{N}$, elle est bornée posons donc $N = 1 + \max A$. Construisons alors une extractrice φ par récurrence telle que $(u_{\varphi(n)})$ est strictement croissante.
  - On pose $\varphi(0) = N$.
  - Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que pour tout $l \in [\![0; n]\!]$, $\varphi(l)$ est bien définie et que $u_{\varphi(0)} \leq u_{\varphi(1)} \leq \cdots \leq u_{\varphi(n)}$. $\varphi(n) \geq \varphi(0) = N$ donc par construction $\varphi(n) \notin A$ i.e. il existe $k > \varphi(n)$ tel que $u_{\varphi(n)} < u_k$. On pose alors $\varphi(n+1) = k$. On a alors bien que $u_{\varphi(0)} \leq u_{\varphi(1)} \leq \cdots \leq u_{\varphi(n)} \leq u_{\varphi(n+1)}$.

On en déduit donc que (u_n) admet forcément une suite extraite croissante ou décroissante.

Revenons à la preuve du théorème. (u_n) admet une suite extraite monotone. (u_n) est réelle bornée donc cette suite extraite est également bornée, donc convergente. (u_n) admet donc bien une valeur d'adhérence.

Remarque : Si $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, alors elle admet une sous-suite qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

On peut étendre le théorème de Bolzano-Weierstraß à $\mathbb{C}$.

Proposition III.3.

Si (u_n) est une suite complexe bornée, alors elle admet une valeur d'adhérence.

Preuve : Écrivons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = x_n + iy_n$ avec (x_n) et (y_n) deux suite réelles. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n| \leq |u_n|$ et $|y_n| \leq |u_n|$ donc x_n et y_n sont bornées. D'après le théorème de Bolzano-Weierstraß, il existe une suite extraite et $x \in \mathbb{R}$ tels que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. La suite $(y_{\varphi(n)})$ est bornée donc encore une fois d'après le théorème de Bolzano-Weierstraß, il existe une extractrice ψ et $y \in \mathbb{R}$ tels que $y_{\varphi(\psi(n))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} y$. On en déduit alors que finalement $u_{\varphi\circ\psi(n)} = x_{\varphi\circ\psi(n)} + iy_{\varphi\circ\psi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x + iy$. (u_n) admet donc bien une valeur d'adhérence.

Remarque : On verra plus tard dans le chapitre de topologie que ce théorème peut être étendu aux suites à valeurs dans un espace vectoriel normé (réel ou complexe) de dimension finie.

Proposition III.4.

Soit (z_n) une suite complexe bornée. Les propositions suivantes sont équivalentes.
1. (z_n) converge.
2. (z_n) admet exactement une valeur d'adhérence.
3. (z_n) admet au plus une valeur d'adhérence.

Preuve :

→ (1) ⇒ (2) Cette implication est équivalente à l'énoncé de la proposition II.3.

→ (2) ⇒ (3) Cette implication est évidente.

→ (3) ⇒ (1) (z_n) est bornée donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstraß, (z_n) admet une valeur d'adhérence. (z_n) admet donc exactement une valeur d'adhérence qu'on notera z. Montrons que $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} z$. Supposons le contraire. Il existe donc par définition $\varepsilon > 0$ tel que $A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N},\ |z_n - z| < \varepsilon\}$ est fini. On en déduite alors que l'ensemble $A' = \mathbb{N} \setminus A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N},\ |z_n - z| \geq \varepsilon\}$ est infini. D'après le point 2 de la proposition I.2, il existe une extractrice φ telle que $\varphi(\mathbb{N}) = A'$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|z_{\varphi(n)} - z\right| \geq \varepsilon$. La suite $(z_{\varphi(n)})$ est bornée donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstraß, il existe une extractrice ψ et $a \in \mathbb{C}$ tels que $z_{\varphi(\psi(n))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$. De plus, on a clairement que $|a - z| \geq \varepsilon > 0$ donc $a \neq z$ et $a \in \mathrm{Adh}(z_n)$ ce qui est absurde. On en déduit donc finalement que (z_n) est bien convergente (vers z).

IV Compléments

Dans cette partie, X est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition IV.1.

1. On appelle boule ouverte (resp. fermée) de X de centre $a \in X$ et de rayon $\varepsilon > 0$ l'ensemble
$$B(a,\varepsilon) = \{x \in X,\ |x-a| < \varepsilon\} \text{ (resp. } B_f(a,\varepsilon) = \{x \in X,\ |x-a| \leq \varepsilon\})$$
2. Une partie O de X est dite ouverte dans X lorsque pour tout $a \in O$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a,\varepsilon) \subset O$.
3. Une partie $F \subset X$ est dite fermée dans X lorsque $X \setminus F$ est ouvert dans X.

Remarque :

→ Il est aisé de vérifier qu'une intersection quelconque de fermés est un fermé.

→ Pour tout $a \in X$ et $\epsilon > 0$, $B(a,\varepsilon)$ est ouvert dans X et $B_f(a,\varepsilon)$ est fermé dans X.

→ Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, on a $B(a,\varepsilon) =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$.

Exemples :

→ Les intervalles fermés et les ensembles finis sont des parties fermées de $\mathbb{R}$.

→ Les intervalles ouverts sont des parties ouvertes de $\mathbb{R}$.

Proposition IV.2.

Soit F une partie de X. F est fermée si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans F, si (x_n) est convergente, alors sa limite est dans F.

Preuve :

(⇒) Supposons que F soit fermé. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans F convergente, supposons que la limite l de (x_n) est dans $X \setminus F$. $X \setminus F$ étant ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(l,\varepsilon) \subset X \setminus F$. Or par construction, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|x_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et donc $x_n \in B(l,\varepsilon) \subset X \setminus F$ ce qui est absurde.

(⇐) Réciproquement, supposons que toute suite à valeurs dans F convergente converge dans F. supposons de plus que F n'est pas fermé, i.e. $X \setminus F$ n'est pas ouvert. Il existe donc $a \in X \setminus F$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, $B(a,\varepsilon) \not\subset X \setminus F$ i.e. $B(a,\varepsilon) \cap F \neq \varnothing$. Cette propriété étant vraie pour $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut définir une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans F qui vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|a - x_n| \leq \frac{1}{n}$. (x_n) est à valeurs dans F et converge vers a qui n'est pas dans F, ce qui est en contradiction avec les hypothèses.

Proposition IV.3.

1. Pour toute partie F de X, F est fermée si et seulement s'il existe $(u_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $\text{Adh}(u_n) = F$.
2. Lorsque $X = \mathbb{R}$, pour tout suite $(u_n) \in X^{\mathbb{N}}$ bornée, $\text{Adh}(u_n)$ contient sa borne supérieure et sa borne inférieure.

Preuve

1. Procédons par double implication

- → ($\Leftarrow$) Soit (u_n) une suite à valeurs dans X. Posons $F = \mathrm{Adh}(u_n)$ et montrons que F est fermé. Pour cela, on va montrer que $X \setminus F$ est ouvert. Soit $l \in X \setminus F$. Par définition, on sait qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'ensemble $A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N},\ |u_n - l| < \varepsilon\}$ est fini. On veut alors montrer que $B(l,\varepsilon) \subset F \setminus A$. Soit $l' \in B(l,\varepsilon) = \{x \in X,\ |x-l| < \varepsilon\}$. En posant $\delta = \dfrac{1}{2}\min\left(|l' - (l+\varepsilon)|, |l' - (l-\varepsilon)|\right)$, on voit clairement que $B(l',\delta) \subset B(l,\varepsilon)$ et alors

$$A'(\delta) = \{n \in \mathbb{N},\ |u_n - l'| < \delta\} \subset \{n \in \mathbb{N},\ |u_n - l| < \varepsilon\} = A(\varepsilon)$$

  On en déduit alors que nécessairement $A'(\delta)$ est fini et que donc par définition (proposition II.1) $l' \in X \setminus \mathrm{Adh}(u_n)$, et donc $B(l,\varepsilon) \subset X \setminus F$. Ceci nous permet alors d'affirmer que $X \setminus F$ est ouvert i.e. que F est fermé.

- → ($\Rightarrow$) Cette implication sera faite en exercice dans la suite du chapitre.

2. La suite (u_n) est bornée, il existe donc $T \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq T$. Pour tout $a \in \mathrm{Adh}(u_n)$, il existe une extractrice φ telle que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$. En passant donc à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient que $|a| \leq T$ et on en déduit que $\mathrm{Adh}(u_n)$ est borné. De plus, d'après le point précédent, $\mathrm{Adh}(u_n)$ est non vide fermé. Utilisons enfin le lemme suivant.

Lemme IV.4.

Si F est une partie fermée non vide de $\mathbb{R}$, alors F contient $\sup F$ et $\inf F$.

Preuve du lemme : Il suffit de voit que $\sup F$ et $\inf F$ peuvent être vus comme limite d'une suite à valeurs dans F et que F étant fermé, cette limite est forcément dans F d'après la proposition IV.2.

On en déduit donc d'après ce lemme que $\mathrm{Adh}(u_n)$ contient ses bornes.

Exercice IV.5.

Soit (u_n) une suite bornée à valeurs dans $\mathbb{R}$. D'après la proposition précédente, $\mathrm{Adh}(u_n)$ contient ses bornes. Montrer alors que si m et M sont respectivement les bornes supérieure et inférieure de $\mathrm{Adh}(u_n)$, on a

$$m = \lim_{n\longrightarrow\infty} \inf\{u_k,\ k \geq n\} \text{ et } M = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sup\{u_k,\ k \geq n\}$$

Remarque : En général, on note pour tout suite (u_n)

$$\limsup u_n = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sup\{u_k,\ k \geq n\} \text{ et } \liminf u_n = \lim_{n\longrightarrow\infty} \inf\{u_k,\ k \geq n\}$$

Exercice IV.6.

Soit F un fermé borné de X.

1. Montrer que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \geq 1,\ \exists z_1, \dots, z_{n_\varepsilon} \in F,\ F \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} B(z_i, \varepsilon)$.
2. En déduire qu'il existe une suite $(u_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $F = \mathrm{Adh}(u_n)$.
3. Montrer que la propriété de la question 2 reste vraie lorsque F n'est plus forcément borné.

Exercice IV.7.

Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer que $\text{Adh}(u_n)$ est un intervalle fermé ou vide.

V Suites de Cauchy

Définition V.1.

Une suite $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \geq 0,\ \forall m, n \geq n_\varepsilon,\ |z_m - z_n| < \varepsilon$$

Remarques

→ Dans cette définition, m et n sont indépendants.

→ La négation de cette définition peut être formulée par des extractrices. En effet, la négation de cette définition est équivalente à ce qui suit : il existe φ, ϕ deux extractrices et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $n \geq 0$ $|z_{\varphi(n)} - z_{\phi(n)}| > \varepsilon$. Le lecteur est invité à montrer qu'il s'agit bien de la négation du fait qu'une suite soit de Cauchy.

Proposition V.2.

Soit (z_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1. Si (z_n) est de Cauchy, alors $\forall p \geq 1,\ z_{n+p} - z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. Si la limite de la suite $(v_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} |z_{k+1} - z_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est finie, alors (z_n) est de Cauchy.
3. Si (z_n) converge alors elle est de Cauchy.
4. Si (z_n) est de Cauchy, alors elle est bornée.
5. Si (z_n) est de Cauchy et possède une valeur d'adhérence, alors elle converge.

Preuve

1. Soit $p \geq 1$. Écrivons la définition du fait qu'on ait $z_{n+p} - z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |z_{n+p} - z_n| < \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$. (z_n) est de Cauchy, il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $m, n \geq N$, $|z_n - z_m| < \varepsilon$. En particulier, pour tout $n \geq N$, $n + p \geq N$ et donc $|z_{n+p} - z_n| < \varepsilon$, d'où le résultat.

2. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, notons $\sum_{k=N}^{\infty} |z_{k+1} - z_k|$ la limite de la suite $\left(\sum_{k=N}^{n} |z_{k+1} - z_k|\right)_{n\geq N}$. On remarque alors que

$$\sum_{k=N}^{\infty} |z_{k+1} - z_k| = \sum_{k=0}^{\infty} |z_{k+1} - z_k| - \sum_{k=0}^{N-1} |z_{k+1} - z_k| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

Prenons donc $N \geq 0$ tel que $\sum_{N}^{\infty} |z_{k+1} - z_k| < \varepsilon$. On a alors pour tout $n, m \geq N$, en supposant sans perte de généralité que $m \geq n$,

$$|z_n - z_m| = \left|\sum_{k=n}^{m-1} z_{k+1} - z_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |z_{k+1} - z_k| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} |z_{k+1} - z_k| \leq \sum_{k=N}^{+\infty} |z_{k+1} - z_k| < \varepsilon$$

donc (z_n) est bien une suite de Cauchy.

3. Soit l la limite de (z_n). Soit $\varepsilon > 0$. (z_n) converge vers l, il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|z_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$. On a alors pour tout $m, n \geq N$,

$$|z_n - z_m| \leq |z_n - l| + |z_m - l| + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

La suite (z_n) est donc bien de Cauchy.

4. Appliquons la définition d'une suite de Cauchy pour $\varepsilon = 1$. (z_n) est de Cauchy, il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ $|u_n - u_N| < 1$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n| \leq \max(|u_0|, \ldots, |u_{N-1}|, |u_N| + 1)$$

5. Soit z une valeur d'adhérence de (z_n) et φ une extractrice telle que $z_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} z$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|z_{\varphi(n)} - z| < \frac{\varepsilon}{2}$. (z_n) est de Cauchy, il existe donc N' tel que pour tout $n, m \geq N'$, $|z_n - z_m| < \frac{\varepsilon}{2}$. En posant alors $M = \max(N, N')$, on voit que pour tout $n \geq M$,

$$|z_n - z| \leq \left|z_n - z_{\varphi(n)}\right| + \left|z_{\varphi(n)} - z\right| \underset{(*)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

L'inégalité $(*)$ est vraie car $n \geq M$ et φ est une extractrice donc d'après le point 1 de la proposition I.2, $\varphi(n) \geq n$ et alors $\varphi(n) \geq M$.

Remarque : La réciproque du point (1) est fausse. En effet, la suite $(z_n) = (\ln n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie,

$$\forall p \geq 1,\ z_{n+p} - z_n = \ln\left(\frac{n+p}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Si (z_n) est de Cauchy, alors, on a nécessairement $z_{2n} - z_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ ce qui est faux car pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$z_{2n} - z_n = \ln(2n) - \ln n = \ln 2 > 0$$

Théorème V.3.

Soit (z_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$. (z_n) est de Cauchy si et seulement si (z_n) converge.

Preuve : La suite (z_n) est de Cauchy, elle est donc bornée d'après le point 4 de la proposition V.2 et alors d'après le théorème Bolzano-Weierstraß, (z_n) possède une valeur d'adhérence. (z_n) est alors une suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence, elle converge donc d'après le point 5 de la proposition V.2.

Correction de l'exercice II.2. :

D'après le chapitre 2 (Cardinaux), il existe f une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$. Considérons donc la suite $(u_n) = (f(n))_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il est clair que pour tout $\varepsilon > 0$ on a $A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N},\ |u_n - x| < \varepsilon\}$ est infini car il y a un nombre infini de nombres rationnels dans $B(x, \varepsilon)$. On en déduit donc que x est bien une valeur d'adhérence de (u_n) et que finalement $\mathrm{Adh}(u_n) = \mathbb{R}$.

Remarquons qu'on peut procéder de la même manière pour $\mathbb{C}$ en utilisant le fait que

$$\mathbb{Q} + i\mathbb{Q} = \{r_1 + ir_2,\ r_1, r_2 \in \mathbb{Q}\}$$

est aussi dénombrable.

Correction de l'exercice IV.5. :

Le preuve pour m étant identique, on va uniquement faire la preuve pour M. Le lecteur est invité à reproduire cette preuve pour la limite inférieure m à titre d'exercice. Posons $(v_n) = (\sup\{u_k,\ k \geq n\})_{n\in\mathbb{N}}$. La suite (v_n) est décroissante car la suite d'ensembles non vides majorés $(A_n) = (\{u_k,\ k \geq n\})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion. De plus u_n est minorée, donc en posant A un minorant de (u_n), on peut facilement voir que A minore également (v_n). (v_n) est donc une suite décroissante minorée, on peut donc affirmer qu'elle converge vers sa borne inférieure. On en déduit alors que

$$M = \lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} v_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup\{u_k,\ k \geq n\}$$

On en déduit alors par définition de la borne inférieure que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $M \leq v_n \leq M + \varepsilon$ et par définition de la borne supérieure, il existe $k \geq n$ tel que $v_n - \varepsilon \leq u_k \leq v_n$. On en déduit donc que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ il existe $k \geq n$ tel que

$$M - \varepsilon \leq v_n - \varepsilon \leq u_k \leq v_n \leq M + \varepsilon$$

n peut être pris arbitrairement grand, on en déduit donc que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall M > 0,\ \exists k \geq M,\ |u_k - M| \leq \varepsilon$$

Ce qui nous permet de dire d'après la définition II.1 que M est bien une valeur d'adhérence de (u_n).

Il reste à montrer que M est bien la plus grande valeur d'adhérence de (u_n). Soit $a \in \mathrm{Adh}(u_n)$ et φ une extractrice telle que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{\varphi(n)} \leq \sup\{u_k, k \geq \varphi(n)\} = v_{\varphi(n)}$$

en passant à la limite des deux côtés de l'inégalité, on obtient que $a \leq M$, ce qui est bien le résultat voulu.

Correction de l'exercice IV.6. :

1. Soit $\varepsilon > 0$. Supposons par l'absurde que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $z_1, \ldots, z_n \in X$, $F \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} B(z_i, \varepsilon)$.

   Construisons alors la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de la manière suivante.

   → $z_1 \in F$

   → Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} \in F \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B(z_i, \varepsilon)$. Ceci est possible car $F \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B(z_i, \varepsilon)$ est toujours non vide par hypothèse.

   La suite (z_n) vérifie clairement pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, tels que $n \neq m$, $|z_n - z_m| \geq \varepsilon$. Or (z_n) est à valeurs dans F qui est borné, donc (z_n) est bornée et alors d'après le théorème de Bolzano-

Weierstraß, il existe $x \in X$ et une extractrice φ telle que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. On a alors

$$\varepsilon \leq \left|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

ce qui est absurde. On a donc bien le résultat voulu.

2. Pour tout $\varepsilon > 0$, posons n_ε et $z_{1,\varepsilon}, \dots, z_{n_\varepsilon,\varepsilon}$ fournis par la questions précédente tels que $F \subset \bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} B(z_{i,\varepsilon}, \varepsilon)$ et posons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N_k = n_{2^{-0}} + \dots + n_{2^{-k}}$. Construisons alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de la manière suivante.

   → Pour tout $j \in [\![1; n_{2^{-0}}]\!]$, $u_j = z_{j,2^{-0}}$.

   → Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $j \in [\![1; n_{2^{-(k+1)}}]\!]$, $u_{N_k+j} = z_{j,2^{-(k+1)}}$.

   Il s'agit de la concaténation des suites finies $(z_{1,2^{-0}}, \dots, z_{n_{2-0},2^{-0}}), \dots, (z_{1,2^{-n}}, \dots, z_{n_{2-n},2^{-n}}), \dots$ Montrons maintenant que $\mathrm{Adh}(u_n) = F$. Soit $x \in F$. Construisons une extractrice φ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|u_{\varphi(n)} - x\right| < 2^{-n}$ de la manière suivante.

   → On sait que $F \subset \bigcup_{i=1}^{n_{2-0}} B(z_{i,2^{-0}})$, il existe donc $i \in [\![1; n_{2^{-0}}]\!]$ tel que $x \in B(z_{i,2^{-0}}) = B(u_i, 2^{-0})$ i.e. $|u_i - x| \leq 2^{-0}$. On pose donc $\varphi(0) = i$.

   → Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $\varphi(k)$ est défini de manière à ce qu'on ait $\left|u_{\varphi(k)} - x\right| \leq 2^{-k}$ et $\varphi(k) > \varphi(k-1)$. Soit $j \geq n$ tel que $N_j \geq \varphi(n)$. Par hypothèse, il existe $i \in [\![1; n_{2^{-(j+1)}}]\!]$ tel que

   $$x \in B(z_{i,2^{-(j+1)}}, 2^{-(j+1)}) = B(u_{i+N_j}, 2^{-(j+1)}) \text{ i.e. } \left|u_{i+N_j} - x\right| \leq 2^{-(j+1)} \leq 2^{-(n+1)}$$

   On pose alors $\varphi(n+1) = N_j + i$. Cette construction nous donne bien que $\varphi(n+1) \geq N_j + 1 > \varphi(n)$ et $\left|u_{\varphi(n+1)} - x\right| < 2^{-(n+1)}$.

   On en déduit donc par construction que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\left|u_{\varphi(n)} - x\right| < 2^{-n}$ et alors que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. On a alors bien que $\mathrm{Adh}(u_n) \supset F$.

   Montrons l'inclusion réciproque. Soit a une valeur d'adhérence de (u_n) et φ une extractrice telle que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$. La suite $(u_{\varphi(n)})$ est à valeurs dans F donc d'après la proposition IV.2 sa limite est également dans F i.e. $a \in F$. On en déduit alors qu'on a bien $\mathrm{Adh}(u_n) \subset F$ et finalement $\mathrm{Adh}(u_n) = F$.

3. Nous ne détaillerons pas cette question mais donnerons uniquement l'idée générale. Pour montrer que la propriété est vraie lorsque F n'est pas forcément borné, on commence par poser pour tout fermé borné H, les éléments $z_{1,\varepsilon,H}, \dots, z_{n_\varepsilon,\varepsilon,H}$ les éléments fournis par la question précédente tels que $H \subset \bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} B(z_{i,\varepsilon,H})$. En suite, on considère $a \in F$ et une suite de fermés $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} = (F \cap B_f(a, 2^n))_{n\in\mathbb{N}}$. Un fois cela fait, on peut facilement montrer que la suite résultant de la concaténation des suites finies $(z_{1,2^{-0},F_0}, \dots, z_{n_{2-0},2^{-0},F_0}), \dots, (z_{1,2^{-n},F_n}, \dots, z_{n_{2-n},2^{-n},F_n}), \dots$ vérifie bien la propriété voulue.

Correction de l'exercice IV.7. :

Posons $F = \mathrm{Adh}(u_n)$. Supposons que $F \neq \varnothing$. On veut montrer que F est un intervalle, c'est à dire que pour tout $a, b \in F$ tels que $a < b$, $]a, b[\subset F$. Considérons donc $a, b \in F$ tels que $a < b$ et $z \in]a, b[$. Supposons par l'absurde que $z \notin \mathrm{Adh}(u_n)$, i.e. qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N},\ |u_n - z| < \varepsilon\}$ est fini.

$A(\varepsilon)$ est une partie majorée de $\mathbb{N}$, on peut donc considérer M son maximum. Soit $\eta > 0$ tel que $\eta < \min(z - a, b - z, \varepsilon)$ et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_{n+1} - u_n| < \eta$. a et b sont des valeurs d'adhérence de (u_n), il existe donc $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que $n_1 \geq \max(N, M+1)$ et $n_2 \geq \max(N, M+1)$ tels que $|u_{n_2} - a| < \eta$ et $|u_{n_1} - b| < \eta$. Supposons sans perte de généralité que $n_1 \leq n_2$ et posons $B = \{k \in [\![n_1; n_2]\!],\ u_k \geq z\}$. B est non vide car

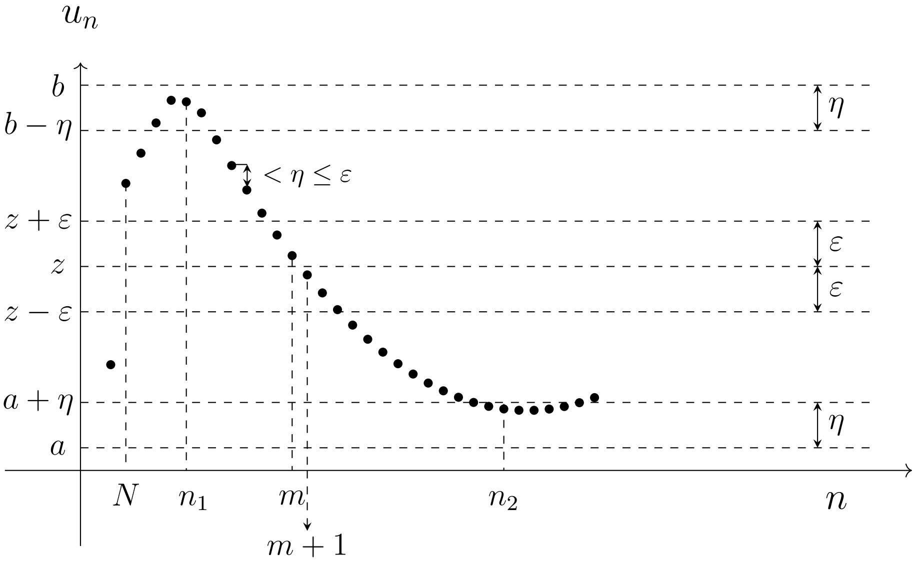
$$u_{n_1} \geq b - \eta \geq b - \min(z-a, b-z, \varepsilon) \geq b - b + z = z$$

et alors $n_1 \in B$. De plus B est une partie majorée de $\mathbb{N}$, elle admet donc un maximum qu'on note m. m est strictement inférieur à n_2 car

$$u_{n_2} < a + \varepsilon < a + \min(z-a, b-z, \varepsilon) \leq a + z - a = z$$

On alors $u_m \geq z \geq u_{m+1}$ et $m \geq N$ donc $|u_{m+1} - u_m| < \eta \leq \varepsilon$, ce qui nous permet d'écrire $u_m \geq z \geq u_{m+1} > u_m - \varepsilon$ et alors que $|u_m - z| < \varepsilon$ i.e. $m \in A(\varepsilon)$ ce qui est absurde car $m > M$ et M est le maximum de $A(\varepsilon)$. On en déduit alors que $z \in]a, b[$ et que finalement $\mathrm{Adh}(u_n)$ est un intervalle.

Pour comprendre un peu mieux l'intuition de cette preuve, regardons le dessin ci-dessous.



On voit que lorsque $n \geq N$, la suite (u_n) fait des pas très petits ce qui fait qu'elle ne peut pas passer d'une position au dessus de $z+\varepsilon$ à une position au dessous de $z-\varepsilon$ sans passer par la bande $]z-\varepsilon, z+\varepsilon[$.

Remarque : En utilisant le résultat de l'exercice IV.5, on peut déduire de cet exercice que lorsque (u_n) est bornée et $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, on a $\mathrm{Adh}(u_n) = [\liminf u_n,\ \limsup u_n]$.

On peut montrer également (nous ne le ferons pas, mais le lecteur est encouragé à essayer de le faire) que lorsque (u_n) n'est pas forcément bornée et que les limites $\limsup u_n$ et $\liminf u_n$ ne sont pas forcément finies, cette propriété reste vraie.

*   *
*

Document compilé par Omar Bennouna et révisé par Issam Tauil le 20/07/2022 pour cpge-paradise.com.
Si vous repérez une erreur, ou avez des remarques, prière de me contacter via l'adresse contact@cpge-paradise.com.