CHAPITRE 5

Intégrales généralisées

Ce chapitre a deux objectifs : le premier est de munir le lecteur d'outils importants pour les concours et le second de lui donner un recul sur les intégrales en général. En particulier, nous allons revoir rapidement la définition d'une intégrale comme vue en première année, et voir comment généraliser cette définition à des cas plus complexes.

Le lecteur est encouragé suite à la lecture de chapitre à s'imaginer dans la situation suivante : quelqu'un qui n'est pas un mathématicien vous demande "qu'est-ce qu'une intégrale ?". Savoir répondre d'une manière très simple, détachée des notations et formalismes mathématiques utilisés, prouve que vous avez une bonne compréhension.

Préambule : convergence séquentielle

On commence par quelques rappels et éléments qui seront utiles dans la suite.

Rappel .1.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et a un élément de I (ou un bord de I), et soit f une application de I dans $\mathbb{R}$. f possède une limite finie en a si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans I, si (u_n) converge vers a, alors $f(u_n)$ est convergente.

Démonstration.

→ $(\Rightarrow)$ Supposons que f admet une limite finie en a, qu'on note ℓ. Soit (u_n) une suite à valeurs dans I qui converge vers a. La définition de la limite nous donne

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon. \tag{1}$$

On va essayer d'utiliser cette proposition pour montrer que la définition de limites pour les suites est vérifiée pour $(f(u_n))$. Soit $\varepsilon > 0$, et η tel que pour tout $x \in I$, $|x - a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$. La définition de limite d'une suite appliquée à (u_n) nous donne

$$\forall\varepsilon' > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n - a| < \varepsilon'.$$

Considérons donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - a| < \eta$. On a alors pour tout $n \geq N$, en utilisant la proposition (1), pour tout $n \geq N$, $|f(u_n) - \ell| < \varepsilon$, ce qui nous dit bien que $(f(u_n))$ est convergente et que sa limite est ℓ.

→ $(\Leftarrow)$ Supposons que pour toute suite (u_n) à valeurs dans I convergente vers a, $(f(u_n))$ est convergente. Montrons d'abord, peu importe le choix de la suite (u_n) convergente vers a, $(f(u_n))$ converge vers la même limite. Soit (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans I convergentes vers a. Posons ℓ et ℓ' les limites respectives de $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$, et considérons la suite (w_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \begin{cases} u_{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ v_{\frac{n-1}{2}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a clairement que (w_n) converge vers a et donc $(f(w_n))$ est convergente. Notons ℓ'' la limite de cette suite. $(f(w_{2n}))$ et $(f(w_{2n+1}))$ convergent également vers ℓ'', mais sont égales par définition respectivement à $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$, et ces dernières convergent respectivement vers ℓ et ℓ' et donc on en déduit que $\ell = \ell' = \ell''$, ce qui montre bien l'unicité de la limite. Montrons maintenant que $f(x)$ converge vers ℓ lorsque x tend vers a. Supposons le contraire. On a

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists x \in I,\ |x-a| < \eta \text{ et } |f(x) - \ell| \geq \varepsilon.$$

La proposition ci-dessus nous permet de considérer $\varepsilon > 0$ et une suite (x_n) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - a| < \dfrac{1}{n+1}$ et $|f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon$. On en déduit donc que (x_n) converge vers a, mais que $(f(x_n))$ ne converge pas vers ℓ, ce qui est absurde.

□

Proposition .2.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et a un élément de I (ou un bord de I), et soit f une application de I dans $\mathbb{R}$. f possède une limite finie en a si et seulement si la proposition

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x, y \in I,\ |x-a| < \eta \text{ et } |y-a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \tag{2}$$

est vérifiée.

Démonstration.

→ $(\Rightarrow)$ Supposons que f admet une limite finie en a qu'on notera ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. On peut alors considérer $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I$ tel que $|x-a| < \eta$, on ait $|f(x) - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. On a alors pour tout $x, y \in I$ tels que $|x-a| < \eta$ et $|y-a| < \eta$,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - a| + |f(y) - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ce qui est bien le résultat voulu.

→ $(\Leftarrow)$ Supposons que (2) est vérifiée. Cette propriété ressemble fortement au critère de Cauchy, nous allons donc l'utiliser pour montrer l'implication voulue. Soit (x_n) une suite à valeurs dans I qui converge vers a. Soit $\varepsilon > 0$. Considérons $\eta > 0$ tel que (2) est vérifiée. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|x_n - a| < \eta$. On a alors pour tout $m, n \geq N$, $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall m, n \geq N,\ |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon,$$

c'est-à-dire que la suite $(f(x_n))$ est de Cauchy, ce qui nous permet de dire que $(f(x_n))$ est convergente (voir théorème **??** du chapitre des valeurs d'adhérence) et de conclure grâce au rappel 1.

□

Remarque. La proposition ci-dessus est aussi valable lorsqu'on remplace a par $+\infty$ ou $-\infty$. Par exemple, lorsqu'on remplace a par $+\infty$, la proposition devient : f possède une limite finie en $+\infty$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M > 0,\ \forall x, y \in I,\ x > M \text{ et } y > M \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Le lecteur est encourage à écrire la proposition pour $a = -\infty$.

I Définitions et premières propriétés

Dans ce chapitre, on souhaite donner une définition plus générale de l'intégrale par rapport à celle vue en première année. Pour faire cela, on commence tout d'abord par introduire quelques définitions et propriétés.

Définition I.1.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et f une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$. On dit que f est continue par morceaux sur $[a, b]$ lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n \in [a, b]$ tels que $a = a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ et pour tout $i \in [\![1; n-1]\!]$, f est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$ prolongeable en une fonction continue sur $[a_i, a_{i+1}]$.

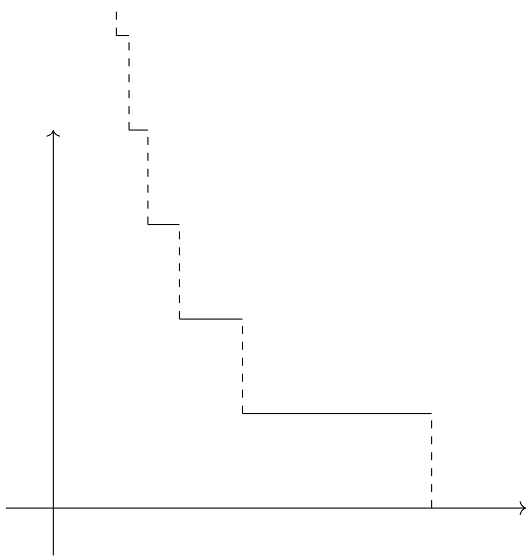
On a défini la continuité par morceaux uniquement pour les intervalles fermés bornés. On étend cette définition aux intervalles ouverts (ou ouverts que d'un seul côté), de la manière suivante.

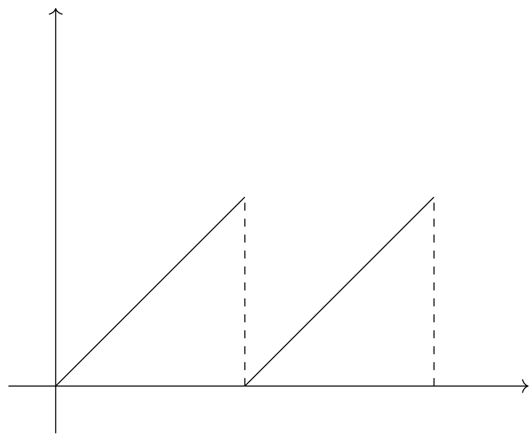
Définition I.2.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, $I \in \{]a, b[, [a, b[,]a, b]\}$ f une fonction de I dans $\mathbb{C}$. On dit que f est continue par morceaux lorsque pour tout intervalle fermé borné J inclus dans I, f est continue par morceaux sur J.

Remarque. Bien entendu, la définition ci-dessus est aussi valable lorsque a ou b est infini.

Exemple. La fonction $x \longmapsto \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ (à gauche) est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$, et $x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$ (à droite) continue par morceaux sur $[0, 2]$.





Attention. Une fonction continue par morceaux sur un intervalle borné n'implique pas forcément qu'elle est bornée, contrairement à une fonction continue (ou continue par morceaux) sur un segment. En effet, $x \longmapsto \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ est continue par morceaux sur $]0, 1]$ mais n'est pas bornée.

On va maintenant définir une notion d'intégrale plus générale que celle vue en première année, mais tout d'abord, donnons une réponse détaillée à la question "qu'est-ce qu'une intégrale ?" d'après le cours de première année. En première année, l'intégrale est en général définie de trois manières équivalentes. Lorsque a, b sont deux réels tels que $a < b$, et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, on peut définir l'intégrale de f entre a et b de trois manières équivalentes.

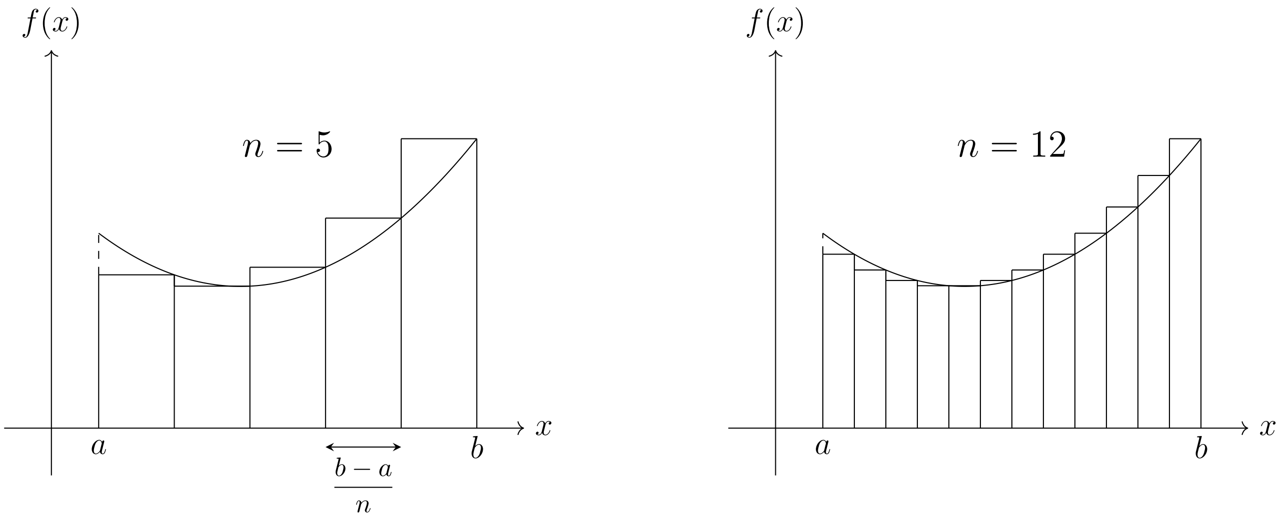
→ La première définition, la plus utilisée en pratique, est $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, où F est une primitive de f.

→ La deuxième, plus intrinsèque et intuitive, consiste à définir $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ comme la surface (algébrique) en dessous de la courbe de f entre a et b.

→ La troisième, encore une fois plus intrinsèque que la première et plus rigoureuse que la deuxième, consiste à définir l'intégrale comme

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right). \tag{3}$$

On peut voir graphiquement pourquoi la deuxième définition de l'intégrale f sur $[a, b]$ est équivalente à la troisième.



Sur chacune des deux figures ci-dessus, la surface du $k-$ième rectangle est égale à $\frac{b-a}{n} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)$, et donc lorsque n est fini, la quantité (3) est bien égale à la surface des rectangles sur la figure, et est intuitivement égale à la surface algébrique sous la courbe de f lorsque n tend vers l'infini. Lorsque f est à valeurs dans $\mathbb{C}$, on définit tout simplement l'intégrale de f comme le nombre complexe de partie réelle l'intégrale de la partie réelle de f et de partie imaginaire l'intégrale de la partie imaginaire de f. Le lecteur curieux est encouragé à montrer que la première définition est équivalente à la troisième.

Ces trois définitions d'intégrale s'étendent facilement aux fonctions continues par morceaux sur un segment, par la somme des intégrales du prolongement de f sur chaque morceau d'une subdivision finie du segment fermé où elle est définie. Cependant, ces définitions sont uniquement valables sur un intervalle fermé, et elles sont difficiles à appliquer pour des fonctions continues par morceaux sur un intervalle ouvert (ou semi-ouvert), surtout lorsque f est irrégulière aux bords, c'est-à-dire lorsqu'elle tend vers l'infini aux bords par exemple. On va donc définir cette intégrale d'une manière assez naturelle : il s'agira de la limite de l'intégrale de f, comme définie auparavant, sur un segment inclus dans l'intervalle où elle est définie, lorsque la taille ce segment tend vers celle de l'intervalle tout entier. Plus rigoureusement, on définit cette intégrale généralisée de la manière suivante. On verra que ceci généralise bien les définitions précédentes.

Définition I.3.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$. On considère la fonction

$$F : \begin{cases} [a, b[& \longrightarrow \mathbb{C} \\ x & \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt. \end{cases}$$

On dit que f admet une intégrale généralisée sur $[a, b[$ lorsque F admet une limite finie en b. Dans ce cas, on dit aussi que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge, et par définition $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b^-} F(x)$.

Remarques.

→ On définit cette intégrale généralisée de la même manière cette intégrale lorsque $b = +\infty$ ou sur l'intervalle $]a, b]$ (il suffit de permuter les rôles de a et b dans ce cas).

→ Bien entendu, les relations suivantes, qui sont vérifiées pour l'intégrale usuelle, le sont aussi pour cette nouvelle définition de l'intégrale : lorsque f admet une intégrale généralisée sur $[a, b[$ et $c \in [a, b[$,

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt \text{ et } \int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt.$$

Proposition I.4.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$. Pour tout $a' \in [a, b[$, on a

$$\int_a^b f(t)dt \text{ converge} \Longleftrightarrow \int_{a'}^b f(t)dt \text{ converge.}$$

Démonstration. Il suffit de voir que les deux applications

$$F_1 : \begin{cases} [a, b[& \longrightarrow \mathbb{C} \\ x & \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt \end{cases} \text{ et } F_2 : \begin{cases} [a, b[& \longrightarrow \mathbb{C} \\ x & \longmapsto \displaystyle\int_{a'}^x f(t)dt \end{cases}$$

diffèrent d'une constante. En effet, on a pour tout $x \in [a, b[$,

$$F_1(x) - F_2(x) = \int_a^x f(t)dt - \int_{a'}^x f(t)dt = \underbrace{\int_a^{a'} f(t)dt}_{\text{constante}}.$$

La suite de la preuve est immédiate. □

Remarques.

→ En fait, la proposition ci-dessus montre que l'existence de l'intégrale de f sur $[a, b[$ dépend uniquement du comportement de f au voisinage de b. On dira donc quelques fois par abus de langage que f admet une intégrale généralisée en b au lieu de "f admet une intégrale généralisée sur $[a, b[$".

→ Lorsque f est définie et continue par morceaux sur $]a, b[$ au lieu de $[a, b[$, on peut facilement étendre la définition I.3 en disant que f admet une intégrale généralisée sur $]a, b[$ lorsqu'il existe $c \in]a, b[$ tel que f admet une intégrale généralisée au sens de la définition I.3 sur $]a,c]$ et $[c,b[$ et alors dans ce cas, l'intégrale de f sur $]a,b[$ est la somme de ses intégrales sur $]a,c]$ et $[c,b[$.

→ En première année, on voit que pour une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, pour tout $c \in [a,b]$, l'application définie sur $[a,b]$, $x \longmapsto \int_c^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en c. Cette propriété reste la même lorsque c est remplacé par $+\infty$ ou $-\infty$: par exemple, lorsque f est continue par morceaux et admet une intégrale généralisée sur $[a,+\infty[$, alors $x \longmapsto \int_{+\infty}^x f(t)dt$ est la primitive de f qui tend vers 0 en $+\infty$.

Proposition I.5.

La somme et la différence de deux fonctions qui admettent une intégrale généralisée sur un intervalle admettent une intégrale généralisée sur ce même intervalle.

Démonstration. La preuve de cette propriété ne présente pas de difficulté et est laissée comme exercice au lecteur. □

La définition suivante est propre à ce cours et n'existe très probablement pas ailleurs. Nous l'utilisons pour expliquer rigoureusement quelques éléments du cours.

Définition I.6.

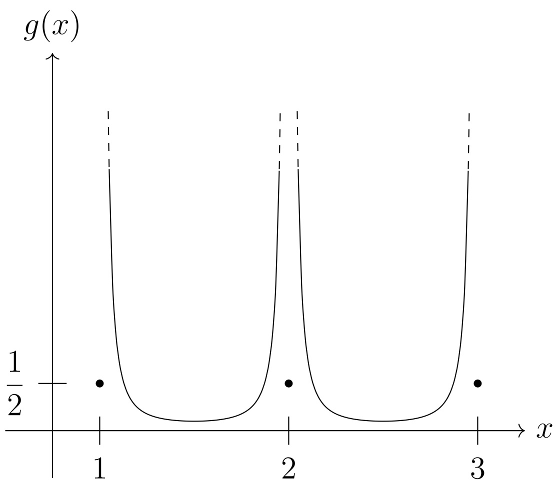
Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$, I un intervalle de bords a et b (ouvert, fermé, ou semi-ouvert) et soit f une fonction de I dans $\mathbb{C}$. On dit que f est presque continue par morceaux sur $]a,b[$, lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $a = s_1 < s_2 < \cdots < s_n = b$ telle que pour tout $i \in [\![1; n-1]\!]$, f est continue par morceaux sur $]s_i, s_{i+1}[$.

Remarque. Il est naturel de se poser la question suivante : pourquoi est-ce que par exemple, une fonction presque continue par morceaux n'est pas nécessairement continue par morceaux ? Pour voir que ce n'est pas la cas, il suffit de remarquer qu'une fonction continue par morceaux sur un intervalle fermé borné est bornée, alors qu'une fonction presque continue par morceaux ne l'est pas forcément.

Par exemple, la fonction dans la figure de droite, définie par

$$g : \begin{cases} [1,3] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{(x-1)^2(x-2)^2} & \text{si } x \in]1,2[\\ \dfrac{1}{(x-2)^2(x-3)^2} & \text{si } x \in]2,3[\\ \dfrac{1}{2} & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

est presque continue par morceaux sur $[1,3]$, mais n'est pas continue par morceaux.



En effet, il est facile de voir que g est continue par morceaux sur $]1,2[$ et $]2,3[$ et donc presque continue par morceaux sur $[1,3]$, mais n'est pas continue par morceaux, car n'est pas bornée sur $[1,3]$.

La définition suivante explique pourquoi nous avons besoin de la définition ci-dessus.

Définition I.7.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de bords $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$ et f une fonction de I dans $\mathbb{C}$ presque continue par morceaux. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ tels que $a = s_1 < s_2 < \cdots < s_n = b$ et pour tout $i \in [\![1; n-1]\!]$, f est continue par morceaux sur $]s_i, s_{i+1}[$. On dit que f admet une intégrale généralisée sur I, lorsque f admet une intégrale généralisée sur $]s_i, s_{i+1}[$ au sens de la définition I.3 pour tout $i \in [\![1; n-1]\!]$. Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} f(t)dt.$$

Remarques.

→ La définition ci-dessus est en général utilisée implicitement pour les intégrales qui ne sont pas continues par morceaux, mais presque continues par morceaux (en général, cette propriété de presque continuité par morceaux n'est pas citée). Par exemple, lorsqu'on demande d'étudier l'intégrale de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{|x-1||x-2||x-3|}}$ sur $[0, 4]$, on demande en fait tout simplement d'étudier les intégrales de cette fonction sur les intervalles où f est continue par morceaux, qui sont ici $]0, 1[,]1, 2[,]3, 4[$. Nous verrons dans une partie ultérieure de ce chapitre comment faire cette étude en pratique.

→ Lorsqu'on veut étudier l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle de la forme $[a, b[$ ou $]a, b]$, il suffit d'appliquer directement la définition I.3, c'est-à-dire étudier la convergence de la fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ en b à gauche ou de $x \longmapsto \int_x^b f(t)dt$ en a à droite. Lorsqu'on veut faire la même chose sur un intervalle ouvert de la forme $]a, b[$ où f est continue par morceaux, il suffit de le faire **séparément** pour $]a, c]$ et $[c, b[$ où c est un élément arbitraire de $]a, b[$. On pourra alors éviter des erreurs comme celle-ci : la fonction tangente a une intégrale sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ égale a 0 car elle est impaire, ce qui est complètement faux car cette intégrale n'est de toute manière pas définie au sens de la définition I.3. En effet, l'application $x \longmapsto \int_0^x \tan t \, dt$ diverge vers l'infini lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2}$.

L'exercice suivant a pour but d'aider le lecteur à se familiariser avec les définitions qu'on vient de voir.

Exercice I.8.

Est-ce que les fonctions suivantes admettent une intégrale généralisée ?

1. $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, 1]$.
2. $x \longmapsto \frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha \in]1, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.
3. $x \longmapsto \tan x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

II Cas des fonctions positives

1. Propriétés générales

On va maintenant appliquer cette généralisation de l'intégrale pour les fonctions positives.

Encore une fois, la proposition ci-dessous, lorsqu'on permute a et b, et qu'on remplace l'intervalle $[a, b[$

par $]a,b]$, reste valable.

Proposition II.1.

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b[$, où $a<b$, et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Si f est positive sur $[a,b[$, alors les propositions suivantes sont équivalentes.

1. f admet une intégrale généralisée sur $[a,b[$.
2. L'ensemble $A = \left\{ \int_c^d f(t)dt, c,d \in \mathbb{R},\ a \leq c < d < b \right\}$ est borné.
3. L'application $x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ est bornée sur $[a,b[$.

Démonstration.

→ (1) $\Leftrightarrow$ (3) Si f est positive, alors l'application $F : x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ est croissante sur $[a,b[$. On en déduit donc que F admet une limite à gauche de b si et seulement si F est majorée sur $[a,b[$.

→ (2) $\Rightarrow$ (3) Si l'ensemble A est borné, alors l'ensemble $\left\{ \int_a^x f(t)dt, x \in [a,b[\right\}$ est borné, ce qui est exactement la proposition (3).

→ (3) $\Rightarrow$ (2) Soit $M>0$ un majorant de l'application $F : x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ sur $[a,b[$. On a alors pour tout $c,d \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq c < d < b$,

$$0 \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ positive}}}{\leq} \int_c^d f(t)dt \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ positive}}}{\leq} \int_a^d f(t)dt = F(d) \leq M,$$

ce qui donne directement que A est majoré par M.

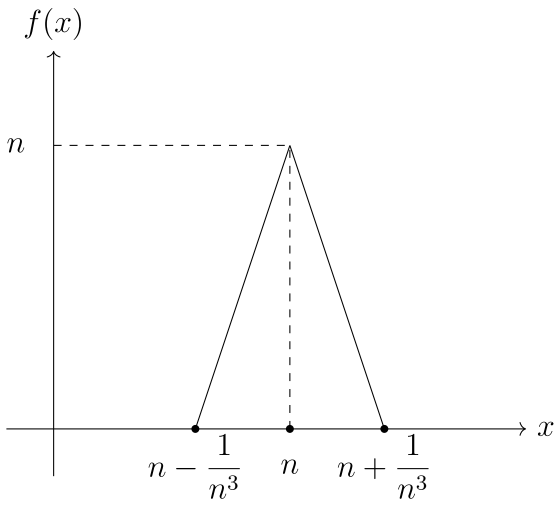
□

Remarque. Attention, même lorsque $b=+\infty$, il est possible que f admette une intégrale généralisée sur $[a,+\infty[$ mais ne soit pas bornée (bien que son intégrale le soit). On peut le voir via l'exemple suivant. Considérons la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} n^4(x-n)+n & \text{si } x \in \left[n - \frac{1}{n^3}, n\right] \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \\ n - n^4(x-n) & \text{si } x \in \left]n, n+\frac{1}{n^3}\right] \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

Comme on peut le voir sur la figure à droite, il est facile de calculer l'intégrale de cette fonction sur un segment, et il est également facile de voir que cette intégrale est bornée. En effet, la courbe de f est une succession de triangles comme celui sur la figure à droite, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale de f de 0 à x pour tout $x \in \left[n+\frac{1}{n^3}, n+1-\frac{1}{(n+1)^3}\right]$ est égale à la somme des surfaces de ces triangles de rang inférieur ou égal à n, c'est-à-dire

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}k \times \frac{2}{k^3} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$



On conclut alors que l'application $x \longmapsto \int_0^x f(t)dt$ est bornée sur $[0,+\infty[$ par $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ (qui est une série convergente), et que donc f admet bien une intégrale généralisée sur $[0,+\infty[$ bien qu'elle ne soit pas bornée.

On énonce maintenant quelques propriétés très utiles pour l'étude des intégrales en pratique.

Proposition (Comparaison d'intégrales) II.2.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et f et g deux fonctions positives continues par morceaux sur $[a, b[$. Les propositions suivantes sont vraies.

1. Si pour tout $x \in [a, b[$, $f(x) \leq g(x)$, alors g admet une intégrale généralisée sur $[a, b[$ implique que f admet une intégrale généralisée sur $[a, b[$.
2. Si $f(x) \underset{x \to b}{=} O(g(x))$, alors g admet une intégrale généralisée sur $[a, b[$ implique que f admet une intégrale généralisée sur $[a, b[$.
3. Si $f \underset{x \to b}{\sim} g$, alors g admet une intégrale généralisée sur $[a, b[$ si et seulement si f admet une intégrale généralisée sur $[a, b[$.

Démonstration. On considère les deux fonctions suivantes

$$F : \begin{cases} [a, b[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \int_a^x f(t)dt \end{cases} \text{ et } G : \begin{cases} [a, b[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \int_a^x g(t)dt. \end{cases}$$

1. Supposons que pour tout $x \in [a, b[$, $f(x) \leq g(x)$ et que g admet une intégrale généralisée sur $[a, b[$. On a pour tout $x \in [a, b[$, $F(x) \leq G(x)$. La proposition II.1 nous permet d'affirmer qu'étant donné que g est positive et admet une intégrale généralisée sur $[a, b[$, alors G est majorée sur $[a, b[$, et donc F aussi, ce qui nous permet de dire que f, étant positive, admet bien une intégrale généralisée sur $[a, b[$.
2. Supposons que $f(x) \underset{x \to b}{=} O(g(x))$ et que g admet une intégrale généralisée sur $[a, b[$. Soit $M \geq 0$ un majorant de G. Il existe alors $\varepsilon > 0$ et $C \geq 0$ tels que pour tout $x \in [b - \varepsilon, b[$, $f(x) \leq Cg(x)$. On a alors pour tout $x \in [a, b[$,
   - $\rightarrow$ Si $x \leq b - \varepsilon$, alors $F(x) = \int_a^x f(t)dt \leq \int_a^{b-\varepsilon} f(t)dt$.
   - $\rightarrow$ Si $x \in]b - \varepsilon, b[$, alors

   $$F(x) = \int_a^x f(t)dt = \int_a^{b-\varepsilon} f(t)dt + \int_{b-\varepsilon}^x f(t)dt \leq \int_a^{b-\varepsilon} f(t)dt + C\int_{b-\varepsilon}^x g(t)dt \leq \int_a^{b-\varepsilon} f(t)dt + CM.$$

   On en déduit alors que pour tout $x \in [a, b[$,

   $$0 \leq F(x) \leq \max\left(\int_a^{b-\varepsilon} f(t)dt + CM, \int_a^{b-\varepsilon} f(t)dt\right) = \int_a^{b-\varepsilon} f(t)dt + CM.$$

   Ceci signifie que F est majorée sur $[a, b[$, et que donc f admet bien une intégrale généralisée sur $[a, b[$.
3. Si $f \underset{x \to b}{\sim} g$, alors $f(x) \underset{x \to b}{=} O(g(x))$ et $g(x) \underset{x \to b}{=} O(f(x))$. On peut alors utiliser le point précédent pour avoir l'équivalence voulue.

□

Remarque. Bien entendu, cette propriété reste valable lorsqu'on remplace b par $+\infty$ ou lorsqu'on étudie l'intégrale sur un intervalle de la forme $]-\infty, b]$.

Notons aussi que la positivité est très importante, on reviendra sur ce point ci-dessous en exhibant un contre-exemple.

2. Critère de Cauchy

La propriété suivante est quelques fois utile en exercices.

Théorème (Critère de Cauchy) II.3.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, et f une fonction de $[a, b[$ dans $\mathbb{C}$ continue par morceaux. f admet une intégrale généralisée sur $[a, b[$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x, y \in [a, b[,\ |x - b| < \eta \text{ et } |y - b| < \eta \Longrightarrow \left| \int_x^y f(t)dt \right| \leq \varepsilon.$$

Démonstration. Pour montrer cette équivalence, il suffit d'appliquer la proposition .2 à la fonction $F : x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$. □

Remarque.

→ Bien entendu, cette proposition est toujours valable lorsqu'on permute les rôles de a et b et qu'on remplace $[a, b[$ par $]a, b]$, ou si on remplace b par $+\infty$ ou a par $-\infty$. Par exemple, lorsqu'on remplace b par $+\infty$, la proposition devient : Si f est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$, alors f admet une intégrale généralisée sur $[a, +\infty[$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M > 0,\ \forall x, y \in [a, b[,\ x > M \text{ et } y > M \Longrightarrow \left| \int_x^y f(t)dt \right| \leq \varepsilon.$$

→ Ce théorème peut être interprété de la manière suivante : une fonction f continue par morceaux admet une intégrale généralisée sur un intervalle $[a, b[$ si et seulement l'ensemble des valeurs possibles de l'intégrale de f sur un intervalle inclus dans $[a, b[$ deviennent de plus en plus proches de 0 plus les bornes de cet intervalle sont proches de b.

Exercice II.4.

Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On considère l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$, $G : (x, y) \longmapsto \int_x^y f(t)dt$. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes.

1. f admet une intégrale généralisée sur $\mathbb{R}$.
2. $G(x, y)$ admet une limite finie lorsque x tend vers $-\infty$ et y vers $+\infty$, *i.e.*

$$\exists \ell \in \mathbb{C},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists A < 0,\ \exists B > 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ x < A \text{ et } y > B \Longrightarrow |G(x, y) - \ell| < \varepsilon.$$

III Fonctions intégrables

On définit à présent une propriété plus forte que la convergence de l'intégrale d'une fonction qui permet de faire des manipulations plus flexibles lors de l'étude d'une intégrale.

Définition III.1.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue par morceaux de I dans $\mathbb{C}$. On dit que f est intégrable sur I lorsque $|f|$ admet une intégrale généralisée sur I ou d'une manière équivalente, l'ensemble

$$A = \left\{ \int_c^d |f(t)|\, dt,\ c, d \in I \right\}$$

est borné.

On énonce maintenant le fait que le fait d'être intégrable est plus fort que le fait d'admettre une intégrale généralisée.

Proposition III.2.

Si f est une fonction d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$ continue par morceaux. Si f est intégrable sur I, alors elle admet une intégrale généralisée sur I.

Démonstration. Supposons que f est intégrable. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^+(x) = \max(0, f(x))$ et $f^-(x) = \max(0, -f(x))$ les parties positives et négatives de f respectivement. f^+ et f^- sont toutes les deux positives, et on a $|f| = f^+ + f^-$. On a alors pour tout $x \in I$, $0 \leq f^+(x) \leq |f(x)|$ et $0 \leq f^-(x) \leq |f(x)|$. On peut alors appliquer la proposition II.2 à f^+ et f^-, ce qui nous permet de dire que f^+ et f^- admettent toutes les deux une intégrale généralisée sur I. On en déduit donc que $f^+ - f^-$ admet également une intégrale généralisée sur I, en on conclut en remarquant que $f = f^+ - f^-$. $\square$

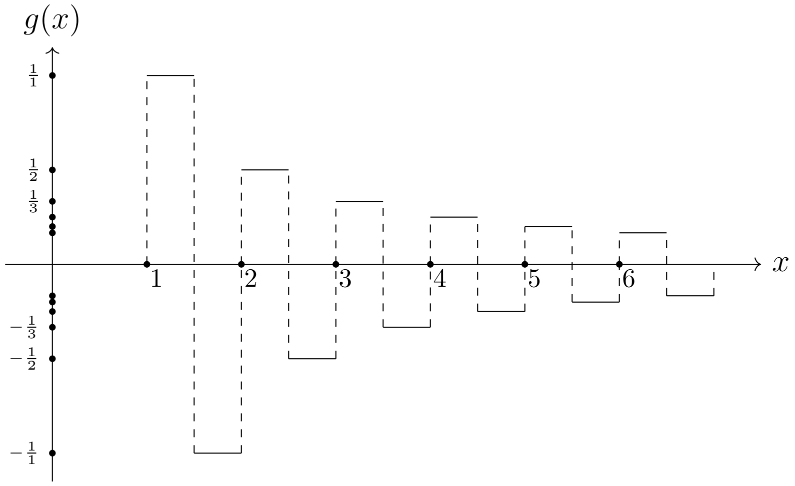
Remarques.

→ Ce résultat est aussi valable lorsque f est à valeurs dans $\mathbb{C}$. Pour le voir, il suffit de remarquer que la valeur absolue des parties réelles et imaginaires de f sont majorées par $|f|$, et qu'elles sont donc intégrables, ce qui implique d'après ce qui précède qu'elles admettent une intégrale généralisée sur I, et donc de même pour f.

→ Comme pour les intégrales généralisées, le fait qu'une fonction f continue par morceaux sur un intervalle $[a, b[$ soit intégrable dépend uniquement du comportement de f en b. On dira donc quelques fois par abus de langage que f est intégrale en b au lieu de "f est intégrable sur $[a, b[$".

Attention, une fonction qui admet une intégrale généralisée sur un intervalle n'est pas forcément intégrable. En effet, on peut facilement construire un contrexemple sur $[1, +\infty[$ (ou même sur un intervalle ouvert borné). Considérons la fonction

$$g : \begin{cases} [1, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } x \in \left[n, n + \dfrac{1}{2}\right[, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \\ -\dfrac{1}{n} & \text{si } x \in \left[n + \dfrac{1}{2}, n + 1\right[, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \end{cases}$$



On a pour tout $x \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\int_1^x g(t)dt &= \sum_{k=1}^{\lfloor x\rfloor -1}\left(\int_k^{k+\frac{1}{2}} g(t)dt + \int_{k+\frac{1}{2}}^{k+1} g(t)dt\right) + \int_{\lfloor x\rfloor}^x g(t)dt \\
&= \sum_{k=1}^{\lfloor x\rfloor -1} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k}\right) + \int_{\lfloor x\rfloor}^x g(t)dt = \int_{\lfloor x\rfloor}^x g(t)dt \\
&= \begin{cases} \dfrac{x-\lfloor x\rfloor}{\lfloor x\rfloor} & \text{si } x-\lfloor x\rfloor \leq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1-(x-\lfloor x\rfloor)}{\lfloor x\rfloor} & \text{si } x-\lfloor x\rfloor > \dfrac{1}{2}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Dans les deux cas ci-dessus, on peut facilement vérifier que

$$\underbrace{-\frac{1}{\lfloor x\rfloor}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}0} \leq \int_1^x g(t)dt \leq \underbrace{\frac{1}{\lfloor x\rfloor}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}0},$$

et donc g admet bien une intégrale généralisée sur $[1,+\infty[$. De plus, on a encore une fois pour tout $x \in [1,+\infty[$

$$\int_1^x |g(t)|\, dt = \sum_{k=1}^{\lfloor x\rfloor -1} \frac{1}{k} + \int_{\lfloor x\rfloor}^x |g(t)|\, dt \geq \sum_{k=1}^{\lfloor x\rfloor -1} \frac{1}{k} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty,$$

et alors g n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$.

Notation. Lorsque I est un intervalle, on note $L^1(I,\mathbb{C})$, ou $L^1(I)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble d'arrivée, l'ensemble des fonctions intégrables de I dans $\mathbb{C}$.

Proposition III.3.

Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, $L^1(I)$ est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel. De plus, pour tout $f \in L^1(I)$ et g continue par morceaux sur I, si g est bornée sur I, alors $f \times g \in L^1(I)$.

Démonstration. Pour montrer que $L^1(I)$ is un $\mathbb{C}-$espace vectoriel, il suffit de montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{C}$. Pour cela, il suffit de montrer que pour tout $f, g \in L^1(I)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, $f + \lambda g \in L^1(I)$. Ceci est facile à voir. En effet, l'intégrale de $|f+\lambda g|$ sur tout segment de I est bornée par $\displaystyle\int_I |f(t)|\, dt + |\lambda| \int_I |g(t)|\, dt$, et donc $|f+\lambda g|$ est bien intégrable.

Pour le deuxième point, il suffit de voir que $|f \times g|$ est majorée par $\|g\|_\infty \times f$ sur I, où $\|g\|_\infty$ est la borne supérieure de $|g|$ sur I, et que $\|g\|_\infty \times |f|$ est intégrable sur I. La proposition II.2 permet de conclure. $\square$

Remarque. Si f est une fonction continue par morceaux et bornée sur I, et que I est borné, alors $f \in L^1(I)$. Le lecteur ayant un doute est encouragé à le montrer lui même.

Exercice III.4.

Étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt$, et calculer sa valeur si elle converge.

IV Intégrales de référence

Nous allons présenter ici quelques intégrales connues qui permettent en général de prouver la convergence d'intégrales grâce à la proposition II.2.

Proposition (Intégrales de Riemann) IV.1.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha \in]1, +\infty[$.
2. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha \in]-\infty, 1[$.

Démonstration. Montrons les deux résultats.

1. Soit $x \geq 1$ et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On a

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < 1 \\ \dfrac{1}{\alpha - 1} & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

   Ceci nous permet de dire que lorsque $\alpha \neq 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha \in]1, +\infty[$. Il reste à traiter le cas $\alpha = 1$, qui est assez facile. En effet, on a

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty.$$

   On a donc bien le résultat voulu.

2. La preuve est quasi identique que celle du point précédent. Soit $\alpha \neq 1$. On a pour tout $x \in]0, 1]$,

$$\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \xrightarrow[x \to 0^+]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1. \end{cases}$$

   On traite enfin le cas $\alpha = 1$. Pour tout $x \in]0, 1]$, on a

$$\int_x^1 \frac{1}{t} = -\ln x \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty,$$

   et alors on a bien le résultat voulu.

$\square$

En fait, le résultat ci-dessus nous donne un moyen pratique (qui fonctionne souvent, mais pas toujours) qui permet souvent d'étudier la convergence d'intégrales.

Proposition IV.2.

Soit f une fonction continue par morceaux positive sur $\mathbb{R}$. Les propriétés suivantes sont vérifiées.

1. S'il existe $\gamma < 1$ tel que $t \longmapsto t^\gamma f(t)$ est majorée sur $]0,1]$, alors f est intégrable sur $]0,1]$. De même, s'il existe $\gamma \geq 1$ tel que $t \longmapsto t^\gamma f(t)$ est minorée par un nombre strictement positif sur $]0,1]$, alors f n'est pas intégrable sur $]0,1]$.
2. S'il existe $\gamma > 1$ tel que $t \longmapsto t^\gamma f(t)$ est majorée sur $[1,+\infty[$, alors f est intégrable sur $[1,+\infty[$. De même, s'il existe $\gamma \leq 1$ tel que $t \longmapsto t^\gamma f(t)$ est minorée par un nombre strictement positif sur $[1,+\infty[$, alors f n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$.

Bien entendu, cette proposition reste valable même lorsqu'on remplace la borne fermée des intervalles (ici égale à 1) par n'importe quel réel strictement positif.

Démonstration.

1. Supposons qu'il existe $\gamma < 1$ tel que $t \longmapsto t^\gamma f(t)$ est majorée sur $]0,1]$, soit M un majorant de cette fonction. On a alors pour tout $t \in]0,1]$, $t^\gamma f(t) \leq M$, *i.e.* $f(t) \leq \dfrac{M}{t^\gamma}$, et alors $f(t) = O\left(\dfrac{1}{t^\gamma}\right)$. $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\gamma}$ est intégrable sur $]0,1]$ d'après la proposition IV.1, et donc d'après la proposition II.2, on peut dire que f est intégrable sur $]0,1]$.

   Supposons maintenant qu'il existe $\gamma \geq 1$ tel que $t \longmapsto t^\gamma f(t)$ est minorée sur $[1,+\infty[$ par un réel strictement positif qu'on note m. On a alors pour tout $t \in [1,+\infty[$, $t^\gamma f(t) \geq m$, *i.e.* $\dfrac{1}{t^\gamma} \leq \dfrac{1}{m} f(t)$, et alors $\dfrac{1}{t^\gamma} = O(f(t))$. On en déduit que f ne peut pas être intégrable, car si elle l'était, $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\gamma}$ le serait aussi d'après la proposition II.2, ce qui est impossible d'après la proposition IV.1.

2. La preuve du second point est quasi identique à celle du premier point, mais nous la faisons quand même dans le but de mettre le lecteur à l'aise avec ce type de raisonnement. Le lecteur à l'aise est libre de sauter cette preuve. Supposons qu'il existe $\gamma > 1$ tel que $t \longmapsto t^\gamma$ est majorée sur $[1,+\infty[$, et notons M un majorant de cette fonction. On a alors pour tout $t \in [1,+\infty[$, $f(t) \leq \dfrac{M}{t^\gamma}$, et donc $f(t) = O\left(\dfrac{1}{t^\gamma}\right)$, ce qui nous permet de dire que f est intégrable sur $[1,+\infty[$ d'après les propositions II.2 et IV.1.

   Supposons maintenant qu'il existe $\gamma \leq 1$ tel que $t \longmapsto t^\gamma f(t)$ est minorée par un nombre réel strictement positif qu'on notera m. On a alors pour tout $t \in [1,+\infty[$, $t^\gamma f(t) \geq m$, et alors $\dfrac{1}{t^\gamma} = O(f(t))$, ce qui nous donne directement que f n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$, car si ce n'était pas le cas, $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\gamma}$ serait intégrable d'après la proposition II.2, ce qui est absurde d'après la proposition IV.1.

□

Exercice IV.3.

Étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} |\ln t|^\beta \, dt$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}$.

Exercice IV.4.

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt$.

Exercice IV.5.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ un nombre complexe de partie réelle strictement positive, P un polynôme réel non constant, et f une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O(P(t))$. Soit $\alpha > 0$. Étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t^\alpha} f(t) dt$.

Exercice IV.6.

Étudier pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{a+1} \frac{1}{|t-a|^\alpha} dt$.

Exercice IV.7.

Étudier la convergence des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(\ln t)^{\ln t}} dt$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin \frac{1}{t^2} dt$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan\left(1+t^3\right) - \arctan(t^3) dt$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x\,|x-1|\,|x-2|}} dt$

Exercice IV.8.

Soit P un polynôme réel de degré 3. Etudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|P(t)|^{\frac{1}{2}}} dt$.

Exercice IV.9.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^a - 1}{\ln t} dt$.

V Intégration par parties

On peut utiliser la formule d'intégration par parties pour déduire des propriétés de convergences d'intégrales. On commence par rappeler la formule.

Rappel (Intégration par parties) V.1.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et f, g deux fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$ continument dérivables. L'égalité suivante est vérifiée.

$$\int_a^b f'(t)g(t) = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$$

Démonstration. Il suffit de mettre les deux intégrales du même côté de l'égalité et d'utiliser la formule de la dérivée d'un produit de deux fonctions $(fg)' = f'g + g'f$. □

On énonce maintenant la propriété que nous permet cette formule de déduire.

Proposition V.2.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, tels que $a < b$. Soit f, g deux fonctions de $[a, b[$ dans $\mathbb{C}$ continument dérivables. Si $t \longmapsto f(t)g(t)$ admet une limite finie en b, alors l'intégrale $\int_a^b f'(t)g(t)$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_a^b f(t)g'(t)dt$ converge.

Démonstration. Par symétrie des rôles de f et g, il suffit de montrer l'implication dans un seul sens. Montrons l'implication de droite à gauche. Supposons que $t \longmapsto f(t)g(t)$ admet une limite finie en b. La formule d'intégration par partie nous donne pour tout $x \geq a$,

$$\int_a^x f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^x - \int_a^x f(t)g'(t)dt.$$

Le premier terme du côté droit de l'égalité admet une limite finie, on peut alors clairement voir que si le second admet une limite finie en b, alors le côté gauche aussi, ce qui permet de conclure. □

Bien entendu, encore une fois, cette proposition reste valable lorsqu'on remplace $[a, b[$ par $]a, b]$ et qu'on permute les rôles de a et b (et aussi lorsque a est remplacé par $-\infty$).

Exercice V.3.

Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Exercice V.4.

Montrer la convergence et calculer la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^2}{t^2} dt$. *Indice : On pourra admettre que* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice V.5.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha} dt$.

Exercice V.6.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue et périodique de période strictement positive. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge si et seulement si f admet une primitive périodique.

VI Découpe

La proposition suivante est assez utile en exercices.

Proposition VI.1.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$ continue par morceaux, et soit (a_n) une suite croissante à valeurs positives qui diverge vers $+\infty$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} |f(t)|\, dt$ converge si et seulement si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} |f(t)|\, dt$ converge.

Démonstration.

→ (⇒) Si $\int_0^{+\infty} |f(t)|\, dt$, alors par définition, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=0}^{N} \int_{a_n}^{a_{n+1}} |f(t)|\, dt = \int_{a_0}^{a_{N+1}} |f(t)|\, dt \leq \int_0^{+\infty} |f(t)|\, dt.$$

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} |f(t)|\, dt$ à termes positifs est majorée, elle est donc convergente.

→ (⇐) Supposons que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} |f(t)|\, dt$ est convergente. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_{N+1} \geq x$. On a

$$\int_0^{x} |f(t)|\, dt \leq \int_0^{a_{N+1}} |f(t)|\, dt \leq \int_0^{a_0} |f(t)|\, dt + \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} |f(t)|\, dt.$$

$x \longmapsto \int_0^{x} |f(t)|\, dt$ est croissante majorée, elle est alors convergence.

□

Remarque. Attention, le fait qu'on considère l'intégrale du module de f plutôt que l'intégrale de f est nécessaire pour que cette propriété soit vraie.

Exemple. Comme promis, on revient pour exhiber un contre-exemple à II.2 quand la condition de positivité n'est pas vérifiée. Prenons $x > 1$ et posons sur $[1, +\infty[$ les applications

$$f : t \longmapsto \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} \text{ et } g : t \longmapsto f(t)(1 + f(t)).$$

Remarquons que $t \longmapsto \frac{-\cos(t)}{\sqrt{t}}$ admet une limite finie en $+\infty$ et que $\int_1^{\infty} \frac{\cos(t)}{2t\sqrt{t}}$ converge bien et est même intégrable, étant donnée que l'intégrande est (continue et) dominée, en valeure absolue, par $t \longmapsto \frac{1}{2t\sqrt{t}}$, qui est bien intégrable.

On déduit donc d'après V.2 que $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge bien. Cependant, même si $f \underset{+\infty}{\sim} g$, $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ ne converge pas. En effet, supposant par absurde l'inverse, on a alors que $\int_1^{+\infty} f^2(t)dt$ converge.
Posons alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \pi n$, on a d'après la proposition VI.1 et par positivité de f^2 que $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f^2(t)dt$ converge. Or, toujours par positivité de f^2, remarquons que pour tout $N \geq 1$ on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f^2(t)dt &\geq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\pi n+\frac{\pi}{4}}^{\pi n+\frac{3\pi}{4}} f^2(t)dt \geq \sum_{n=1}^{N} \int_{\pi n+\frac{\pi}{4}}^{\pi n+\frac{3\pi}{4}} f^2(t)dt \geq \sum_{n=1}^{N} \int_{\pi n+\frac{\pi}{4}}^{\pi n+\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{2t}dt \\
&\geq \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{N} \int_{\pi n+\frac{\pi}{4}}^{\pi n+\frac{3\pi}{4}} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t}\right) dt \geq \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{N} \int_{\pi n+\frac{\pi}{4}}^{\pi n+\frac{3\pi}{4}} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+\frac{\pi}{2}}\right) dt \\
&\geq \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{N} \int_{\pi n+\frac{\pi}{4}}^{\pi(n+1)+\frac{\pi}{4}} \frac{1}{t}dt \geq \frac{1}{4}\int_{\pi+\frac{\pi}{4}}^{\pi(N+1)+\frac{\pi}{4}} \frac{1}{t}dt \\
&\geq \frac{1}{4}\ln\left(\pi(N+1)+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{4}\ln\left(\frac{5\pi}{4}\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty
\end{aligned}$$

ce qui est absurde.

Exercice VI.2.

Montrer la convergence et calculer la valeur de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{t-\lfloor t \rfloor}{t^2}dt$.

Exercice VI.3.

Soit f une fonction positive décroissante et continue par morceaux de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t)(\sin t)^2 dt$ converge si et seulement si $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Exercice VI.4.

Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2|\sin t|}dt$.

VII Comportement à l'infini

Dans cette partie, on fait le lien entre le comportement d'une fonction à l'infini et la convergence de son intégrale.

Proposition VII.1.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ continue par morceaux telle que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge. S'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$, alors $\ell = 0$.

Démonstration. Supposons que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge et qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$. Supposons sans perte de généralité que $\ell \geq 0$ (quitte à remplacer f par $-f$). Soit $A > 0$ tel que pour tout $x \geq A$, $x \geq \frac{\ell}{2}$. On a alors pour tout $x \geq A$,

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^A f(t)dt + \int_A^x f(t)dt \geq \int_0^A f(t)dt + \frac{\ell}{2}(x - A).$$

Si $\ell > 0$, $x \longmapsto \frac{\ell}{2}(x-A)$ diverge vers $+\infty$ lorsque x tends vers $+\infty$. On en déduit qu'on a nécessairement $\ell = 0$. □

Remarque. Cette propriété est aussi valable lorsque l'ensemble d'arrivée de f est $\mathbb{C}$ et que $\ell \in \mathbb{C}$. Le lecteur est encouragé à le montrer à titre d'exercice.

Exercice VII.2.

Soit une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$ continument dérivable. On suppose que les intégrales $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_0^{+\infty} |f'(t)|\, dt$ convergent. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Exercice VII.3.

Soit une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ décroissante, telle que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ soit convergente. Montrer que $t \longmapsto tf(t)$ converge vers 0 lorsque t tend vers l'infini.

Exercice VII.4.

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$ qui admet une intégrale généralisée sur $[0, +\infty[$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Exercice VII.5.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ continument dérivable telle que les intégrales $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_0^{+\infty} (f'(t))^2 dt$ convergent. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Correction de l'exercice I.8 :

1. On a pour tout $x \in]0,1]$,

$$\int_x^1 \frac{1}{t} dt = -\ln x \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty.$$

On en déduit alors que $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ n'admet pas d'intégrale généralisée sur $]0,1]$.

2. Soit $\alpha \in]1,+\infty[$. On a pour tout $x \in [1,+\infty[$,

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{1}{\alpha - 1}.$$

On en déduit donc que $x \longmapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ admet bien une intégrale généralisée sur $]1,+\infty[$.

3. On a pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$,

$$\int_0^x \tan t \; dt = \int_0^x \frac{\sin t}{\cos t} dt = \int_0^x -\frac{\cos' t}{\cos t} dt = -\ln\cos x + \ln\cos 0 = -\ln\cos x \xrightarrow[x \to \frac{\pi}{2}^-]{} +\infty.$$

On en déduit alors que $x \longmapsto \tan x$ n'admet pas d'intégrale généralisée sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Correction de l'exercice II.4 :

→ (1) ⇒ (2) Supposons que f admet une intégrale généralisée sur $\mathbb{R}$. On en déduit donc que Les application $F_d : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ et $F_g : x \longmapsto \displaystyle\int_x^0 f(t)dt$ convergent respectivement en $+\infty$ et $-\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. En posant ℓ_d et ℓ_g les limites respectifs de F_d et F_g en $+\infty$ et $-\infty$, on peut considérer $A > 0$ et $B < 0$ tels que

$$\forall y > A, |F_d(y) - \ell_d| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \forall x < B,\ |F_g(x) - \ell_g| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit donc que pour tout $y > A$ et $x < B$,

$$|F_g(x) + F_d(y) - (\ell_g + \ell_d)| \leq |F_d(y) - \ell_d| + |F_g(x) - \ell_g| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

L'inégalité ci-dessus se réécrit

$$\left|\int_x^y f(t)dt - \underbrace{(\ell_g + \ell_d)}_{\ell}\right| < \varepsilon,$$

ce qui est bien le résultat voulu.

→ (2) ⇒ (1) L'idée ici est d'utiliser le critère de Cauchy (Théorème II.3). Soit $\ell \in \mathbb{R}$ vérifiant la proposition (2). Soit $\varepsilon > 0$. $A < 0$ et $B > 0$ tels que pour tout $x < A$ et $y > B$, $|G(x,y) - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Soit $y, y' \in]B + \infty[$. On a

$$\left|\int_y^{y'} f(t)dt\right| = \left|\int_{A-1}^y f(t)dt - \int_{A-1}^{y'} f(t)dt\right| \leq \left|\int_{A-1}^y f(t)dt - \ell\right| + \left|\int_{A-1}^{y'} f(t)dt - \ell\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On en déduit donc d'après le critère de Cauchy que f admet une intégrale généralisée sur $[0,+\infty[$. On peut montrer de la même manière que f admet également une intégrale généralisée sur $]-\infty, 0]$. f admet donc bien une intégrale généralisée sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice III.4 :

Remarquons d'abord que $g : t \longmapsto \frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor$ admet bien une intégrale généralisée. En effet, g est continue par morceaux sur $]0, 1]$, positive et majorée par la fonction positive constante égale à 1, qui est admet une intégrale généralisée sur $]0, 1]$. Ceci implique donc grâce à II.2 que g admet bien une intégrale généralisée sur $]0, 1]$.

On fait face à une intégrale avec une partie entière. On isole donc la partie de l'intégrale où est la partie entière, qui est une fonction constante par morceaux. Ensuite, on découpe cette intégrale sur les intervalles où la fonction à intégrer est constante. En particulier, la fonction $t \longmapsto \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor$ est constante sur les intervalles de la forme $\left]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$. On a pour tout $x \in]0, 1]$,

$$\begin{aligned}
\int_x^1 \frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt &= -\ln x - \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor - 1} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt - \int_x^{\frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}} \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt \\
&= -\ln x - \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor - 1} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} k\ dt - \int_x^{\frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}} \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor dt \\
&= -\ln x - \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor - 1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) k - \left(\frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} - x\right) \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \\
&= -\ln x - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor - 1} \frac{1}{k+1} + x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.
\end{aligned}$$

On remarque tout d'abord que

$$x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1 - x \underbrace{\left(\frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor\right)}_{\in[0,1]} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1.$$

Ensuite, on réarrange les termes de l'égalité ci-dessus pour obtenir, grâce à la continuité du logarithme en 1

$$\int_x^1 \frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt = \ln \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor - \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} \frac{1}{k} + \underbrace{x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor - \ln\left(x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor\right)}_{\xrightarrow[x \to 0^+]{} 1}.$$

On en déduit alors qu'il suffit de trouver la limite (qui existe, étant donné que g admet bien une intégrale généralisée) de la fonction $x \longmapsto \ln \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor - \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} \frac{1}{k}$ lorsque x tend vers 0 à droite. Pour cela, on peut utiliser le lemme très important suivant.

Lemme VII.6.

Il existe une constante γ positive appelée constante gamma d'Euler, telle que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \underset{n \to +\infty}{=} \gamma + o(1).$$

Démonstration. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{=} \underbrace{-\frac{1}{n(n+1)}}_{=O\left(\frac{1}{n^2}\right)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série absolument convergente, et donc $u_{n+1} - u_n$, aussi, ce qui signifie que la suite u_n est bien convergente, ce qui donne le résultat voulu.
Montrons désormais la (stricte) positiviste de γ et posons pour ceci pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.
Il est clair que v_n converge vers γ et que $v_1 = 0$. Ainsi, il suffit de montrer la (stricte) croissance de v_n.
Fixons alors $n \in \mathbb{N}^*$ et remarquons que

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0$$

étant donné que $\forall x > 0,\ x - \ln(x+1) > 0$. On conclue donc que $\gamma > 0$. $\square$

L'application du lemme ci-dessus nous donne directement que la fonction $x \longmapsto \ln\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor - \sum_{k=1}^{\lfloor\frac{1}{x}\rfloor} \frac{1}{k}$ admet $-\gamma$ comme limite pour x tendant vers 0^+, et on en déduit finalement que $t \longmapsto \frac{1}{t} - \left\lfloor\frac{1}{t}\right\rfloor$ admet bien une intégrale généralisée sur $]0,1]$ égale à $1-\gamma$.
Remarquons au passage que ceci donne, comme conséquence directe, que $1-\gamma > 0$ i.e. que $\gamma < 1$.
En effet, l'inégalité large est claire du fait que $g \geq 0$, tandis que la stricte provient, par exemple, du fait que $\int_0^1 g(t)dt \geq \int_{\frac{3}{5}}^{\frac{4}{5}} g(t)dt$ et que $g\big|_{\left[\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right]}$ est continue et strictement positive, et donc d'intégrale strictement positive sur $\left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right]$.

Correction de l'exercice IV.3 :

Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Si $\beta \leq 0$, alors $t \longmapsto |\ln t|^\beta$ est bornée sur l'intervalle borné $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ et admet donc bien une intégrale généralisée sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$. On suppose maintenant que $\beta > 0$. On a alors pour tout $t \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$

$$t^{\frac{1}{2}} |\ln t|^\beta = \left|2\beta t^{\frac{1}{2\beta}} \ln\left(t^{\frac{1}{2\beta}}\right)\right|^\beta \xrightarrow[t\to0^+]{} 0.$$

On en déduit alors d'après la proposition IV.2 que $t \longmapsto |\ln t|^\beta$ admet bien une intégrale généralisée sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ pour $\beta > 0$. Finalement, on conclut que $t \longmapsto |\ln t|^\beta$ admet bien une intégrale généralisée sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice IV.4 :

→ On remarque tout d'abord que lorsque $\alpha > 1$ et $\beta \geq 0$, on peut facilement voir que l'intégrale converge, car le terme $(\ln t)^\beta$ ne fait que contribuer à la vitesse de convergence vers 0 de la fonction. En effet, on a $\frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} = O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$. On en déduit donc d'après les propositions II.2 et IV.1 que l'intégrale est convergente.

→ Si $\alpha > 1$ et $\beta < 0$, alors on peut voir que la contribution de $(\ln t)^\beta$ est négligeable devant celle de t^α. En effet, on a en $+\infty$,

$$\frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta} = \frac{1}{t^{\frac{1+\alpha}{2}}}\frac{(\ln t)^{-\beta}}{t^{\frac{\alpha-1}{2}}} = \frac{1}{t^{\frac{1+\alpha}{2}}}\underbrace{\left(\frac{\frac{2\beta}{1-\alpha}\ln t^{\frac{1-\alpha}{2\beta}}}{t^{\frac{1-\alpha}{2\beta}}}\right)^{-\beta}}_{\xrightarrow[t\to+\infty]{}0} = O\left(\frac{1}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}}\right).$$

Étant donné que $\dfrac{1+\alpha}{2} > 1$, on obtient bien en utilisant les propositions IV.1 et II.2 que l'intégrale est bien convergente. L'idée ici était d'écrire t^α sous la forme $t^{\alpha-\varepsilon}t^\varepsilon$, où ε est un nombre strictement positif tel qu'on ait $\alpha-\varepsilon > 1$, et d'ensuite contrôler le terme $(\ln t)^\beta$ en utilisant le terme t^ε.

→ Supposons maintenant que $\alpha < 1$. Si $\beta \leq 0$, on peut facilement voir que le terme $(\ln t)^\beta$ ne fait qu'accentuer la divergence vers l'infini de la fonction $\dfrac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$. En particulier, on a en $+\infty$,

$$\frac{1}{t^\alpha} = O\left(\frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}\right).$$

On en déduit donc en utilisant les propositions IV.1 et II.2 que l'intégrale est divergente.

→ Si $\alpha < 1$ et $\beta > 0$, on peut considérer $\varepsilon > 0$ tel que $\alpha+\varepsilon < 1$. Dans ce cas, on a

$$t^{\alpha+\varepsilon}\frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta} = \frac{t^\varepsilon}{(\ln t)^\beta} = \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\frac{t^{\frac{\varepsilon}{\beta}}}{\ln(t^{\frac{\varepsilon}{\beta}})}\right)^\beta \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty.$$

On peut alors déduire de la proposition IV.2 que l'intégrale est divergente.

→ Si $\alpha = 1$ et $\beta \neq 1$, alors on a pour tout $x \geq 2$,

$$\int_2^x \frac{1}{t(\ln t)^\beta}dt = \int_2^x \frac{\ln' t}{(\ln t)^\beta}dt = \frac{1}{1-\beta}(\ln x)^{1-\beta} - \frac{1}{1-\beta}(\ln 2)^{1-\beta}$$
$$\xrightarrow[x\to+\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } \beta < 1 \\ \dfrac{1}{\beta-1}(\ln 2)^{1-\beta} & \text{sinon.}\end{cases}$$

On en déduit donc que l'intégrale converge si et seulement si $\beta > 1$.

→ Si $\alpha = 1$ et $\beta = 1$, alors pour tout $x \geq 2$,

$$\int_2^x \frac{1}{t\ln t} = \int_2^x \frac{\ln' t}{\ln t}dt = \ln\ln t - \ln\ln 2 \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty,$$

et donc l'intégrale diverge.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_2^x \frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$, ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Correction de l'exercice IV.5 :

Pour tout $x \geq 0$, on a

$$\left|e^{-\lambda t^\alpha}f(t)\right| \leq e^{-|\mathrm{Re}\,\lambda|t^\alpha}\,|f(t)| = e^{-\frac{|\mathrm{Re}\,\lambda|}{2}t^\alpha}\underbrace{e^{-\frac{|\mathrm{Re}\,\lambda|}{2}t^\alpha}\,|f(t)|}_{\xrightarrow[t\to+\infty]{}0} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(e^{-\frac{|\mathrm{Re}\,\lambda|}{2}t^\alpha}\right) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

L'avant-dernière égalité est vraie car f est dominée par une fonction polynomiale. On en déduit finalement, en utilisant les propositions II.2 et IV.1 que l'intégrale est convergente.

Correction de l'exercice IV.6 :

Il suffit de faire le changement de variable $u = t - a$ et d'utiliser la proposition IV.1. L'intégrale converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Correction de l'exercice IV.7 :

1. En 1^+, la fonction tend vers un réel fini. En effet,
$$\frac{1}{(\ln t)^{\ln t}} = \frac{1}{e^{(\ln t)(\ln \ln t)}} \xrightarrow[t\to 1^+]{} 1.$$
La limite ci-dessus est obtenue par changement de variable et utilisation de la limite connue $t \ln t \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$. Étudions maintenant la fonction en $+\infty$ a pour tout $t \geq 1$,
$$\frac{1}{(\ln t)^{\ln t}} = \frac{1}{e^{(\ln t)(\ln \ln t)}} = \frac{1}{t^{\ln \ln t}}.$$
On remarque que la puissance de t tend vers l'infini, et donc est supérieure à 2 pour t assez grand. En particulier, on a
$$t^2 \frac{1}{(\ln t)^{\ln t}} = \frac{1}{t^{-2+\ln \ln t}} \xrightarrow[t\to +\infty]{} 0.$$
On déduit donc d'après la proposition IV.2 que l'intégrale est bien convergente.
2. En 0, $t \longmapsto \sin \dfrac{1}{t^2}$ est bornée. En $+\infty$, on voit facilement que $\sin \dfrac{1}{t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ et donc en utilisant les propositions IV.1 et II.2, on voit que l'intégrale converge.
3. Utilisons la formule suivante. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $ab \neq -1$, on a
$$\arctan a - \arctan b = \arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right).$$
On a pour tout $t \geq 0$,
$$0 \leq \arctan(1+t^3) - \arctan(t^3) = \arctan\left(\frac{1}{1+t^3(1+t^3)}\right) \leq \frac{1}{1+t^3(1+t^3)} = O\left(\frac{1}{t^6}\right).$$
On en déduit donc d'après les propositions IV.1 et II.2 que l'intégrale est convergente.
4. Étudions cette intégrale en chaque valeur singulière.
   - $\rightarrow$ En 0^+, on a $\dfrac{1}{\sqrt{x\,|x-1|\,|x-2|}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$, et la fonction de droite est intégrable au voisinage de 0.
   - $\rightarrow$ En 1, $\dfrac{1}{\sqrt{x\,|x-1|\,|x-2|}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{|x-1|}}$, et la fonction de droite est intégrable au voisinage de 1.
   - $\rightarrow$ En 2, $\dfrac{1}{\sqrt{x\,|x-1|\,|x-2|}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{2\,|x-2|}}$, et la fonction de droite est intégrable au voisinage de 2.
   - $\rightarrow$ En $+\infty$, $\dfrac{1}{\sqrt{x\,|x-1|\,|x-2|}} \sim \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$, et la fonction de droite est intégrable en $+\infty$.

   On en déduit alors que l'intégrale est convergente.

Correction de l'exercice IV.8 :

On commence d'abord par voir où sont les singularités pour cette fonction sur $\mathbb{R}$.

→ Si P admet une racine $a \in \mathbb{R}$ de multiplicité égale à 2, alors on peut écrire

$$\forall t \in \mathbb{R},\ P(t) = C(t-a)^2(t-b),$$

où $b \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$ et $C \neq 0$. On a alors au voisinage de a,

$$\frac{1}{|P(t)|^{\frac{1}{2}}} \sim \frac{1}{|C|^{\frac{1}{2}}\,|a-b|^{\frac{1}{2}}\,|t-a|}.$$

Cette fonction n'admet pas d'intégrale généralisée au voisinage de a, et donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|P(t)|^{\frac{1}{2}}} dt$ est divergente.

→ Si P admet une racine $a \in \mathbb{R}$ de multiplicité a égale à 3, alors on peut écrire

$$\forall t \in \mathbb{R},\ P(t) = C(t-a)^3,$$

où $C \neq 0$. On a alors au voisinage de a,

$$\frac{1}{|P(t)|^{\frac{1}{2}}} \sim \frac{1}{|C|^{\frac{1}{2}}\,|t-a|^{\frac{3}{2}}}.$$

Cette fonction n'admet pas d'intégrale généralisée au voisinage de a, et donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|P(t)|^{\frac{1}{2}}} dt$ est divergente.

→ Si toutes les racines réelles de P sont simples, alors deux cas se présentent. Si P admet une seule racine réelle $a \in \mathbb{R}$, et dans ce cas, il existe Q un polynôme unitaire de degré 2 sans racines, et $C \neq 0$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ P(t) = CQ(t)(t-a).$$

$t \longmapsto \dfrac{1}{|P(t)|^{\frac{1}{2}}}$ admet alors une singularité en a. On doit alors étudier le comportement de cette fonction en $+\infty$, $-\infty$ et a. On a en $+\infty$ et $-\infty$,

$$\frac{1}{|P(t)|^{\frac{1}{2}}} \sim \frac{1}{|C|^{\frac{1}{2}}\,|t|^{\frac{3}{2}}}.$$

La fonction de droite est intégrable en $+\infty$ et $-\infty$, et donc $t \longmapsto \dfrac{1}{|P(t)|^{\frac{1}{2}}}$ est intégrable en $+\infty$ et $-\infty$. De plus, au voisinage de a, on a

$$\frac{1}{|P(t)|^{\frac{1}{2}}} \sim \frac{1}{|C|^{\frac{1}{2}}\,|Q(a)|^{\frac{1}{2}}\,|t-a|^{\frac{1}{2}}}.$$

La fonction de droite est intégrable en a, ce qui nous permet de dire que $t \longmapsto \dfrac{1}{|P(t)|^{\frac{1}{2}}}$ est également intégrable en a, et que finalement l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|P(t)|^{\frac{1}{2}}} dt$ est convergente.

Il reste le dernier cas à traiter où P admet trois racines distinctes $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dans le cas, on peut affirmer l'existence de $C \neq 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ P(t) = C(t-a)(t-b)(t-c).$$

On en déduit alors que P admet trois singularités en a, b et c, et qu'il faut donc étudier le comportement de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{|P(t)|^{\frac{1}{2}}}$ en $+\infty$, $-\infty$ et a, b, c. En $+\infty$ et $-\infty$, un raisonnement identique au précédent permet de dire que la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{|P(t)|^{\frac{1}{2}}}$ est intégrable en $+\infty$ et $-\infty$. De plus, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|P(t)|^{\frac{1}{2}}} &\underset{t\to a}{\sim} \frac{1}{|C|^{\frac{1}{2}}\,|t-a|^{\frac{1}{2}}\,|a-b|^{\frac{1}{2}}\,|a-c|^{\frac{1}{2}}},\\
\frac{1}{|P(t)|^{\frac{1}{2}}} &\underset{t\to b}{\sim} \frac{1}{|C|^{\frac{1}{2}}\,|t-b|^{\frac{1}{2}}\,|b-a|^{\frac{1}{2}}\,|b-c|^{\frac{1}{2}}},\\
\frac{1}{|P(t)|^{\frac{1}{2}}} &\underset{t\to c}{\sim} \frac{1}{|C|^{\frac{1}{2}}\,|t-c|^{\frac{1}{2}}\,|c-a|^{\frac{1}{2}}\,|c-b|^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Les trois fonctions ci-dessus sont intégrables respectivement en a, b et c. On en déduit donc que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|P(t)|^{\frac{1}{2}}}dt$ est convergente.

Correction de l'exercice IV.9 :

La fonction $t \longmapsto \dfrac{t^a-1}{\ln t}$ admet a priori deux singularités en 0 et 1. étudions donc le comportement de cette fonction en ces deux points. On a en 1^-,

$$\frac{t^a-1}{\ln t} = \frac{t^a-1}{t-1} \times \frac{t-1}{\ln t} \underset{t\to 1^-}{\longrightarrow} \frac{a}{\ln'(1)} = a.$$

$t \longmapsto \dfrac{t^a-1}{\ln t}$ est donc (continue par morceaux et) bornée au voisinage de 1 et y est donc intégrable. En 0^+, lorsque $a > 0$ on a

$$\frac{t^a-1}{\ln t} \sim \frac{-1}{\ln t}.$$

D'après l'exercice IV.3, la fonction de droite est intégrable en 0, et donc, vu que cette dernière garde un signe constant, la fonction $t \longmapsto \dfrac{t^a-1}{\ln t}$ aussi.
Si $a = 0$, on peut également facilement que la fonction est intégrable sur $]0, 1]$ car elle est nulle. Enfin, il reste a traiter le cas $a < 0$. Dans ces cas, on a en 0^+,

$$\frac{t^a-1}{\ln t} \sim \frac{1}{t^{-a}\ln t}.$$

On peut facilement montrer que la fonction de droite est intégrable si et seulement si $a > -1$. La preuve de ce résultat est laissée comme exercice au lecteur. On en déduit alors finalement, toujours vu que cette dernière garde un signe constant et d'après la proposition II.2, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^a-1}{\ln t}dt$ converge si et seulement si $a > -1$.

Correction de l'exercice V.3 :

La fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}$ admet une singularité en 0, il faut donc étudier son comportement en 0 et en $+\infty$. En 0^+, la fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}$ tend vers 1 et est donc bornée au voisinage de 0^+, ce qui fait qu'elle y est intégrable. Étudions maintenant le comportement de cette fonction en $+\infty$. On va utiliser la proposition V.2 pour montrer la convergence de l'intégrale. On va considérer f, g deux fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(t) = \sin t,\ f(t) = -\cos(t),\ g(t) = \frac{1}{t}.$$

La fonction $t \longmapsto f(t)g(t)$ admet une limite finie en $+\infty$ égale à 0, et de plus, on a pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(t)g'(t) = \frac{\cos t}{t^2}.$$

Cette fonction est intégrable en $+\infty$ car dominée par $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$. de plus, f et g sont continument dérivables sur $[1, +\infty[$, et donc d'après la proposition V.2, $t \longmapsto f'(t)g(t)$ admet une intégrale généralisée sur $[1, +\infty[$, et finalement l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente.

Correction de l'exercice V.4 :

On va une fois de plus faire une intégration par parties. Soit $\varepsilon > 0$ et $x \geq \varepsilon$. On a

$$\int_\varepsilon^x \frac{\sin t}{t} dt = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_\varepsilon^x + \int_\varepsilon^t \frac{1-\cos t}{t^2} dt \tag{4}$$

$$= \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_\varepsilon^x + \int_\varepsilon^x \frac{2\left(\sin\frac{t}{2}\right)^2}{t^2} dt \tag{5}$$

$$\underset{u=\frac{t}{2}}{=} \underbrace{\left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_\varepsilon^x}_{A(\varepsilon,x)} + \underbrace{\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{x}{2}} \frac{(\sin u)^2}{u^2} du}_{B(\varepsilon,x)} \tag{6}$$

On a vu dans l'exercice précédent que $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}$ admet une intégrale généralisée sur $]0, +\infty[$. On en déduit donc que

$$\int_\varepsilon^x \frac{\sin t}{t} dt \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \text{ et } \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \xrightarrow[x \to +\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

On a de plus,

$$A(\varepsilon, x) = \underbrace{\frac{1-\cos x}{x}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0} - \underbrace{\frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon}}_{\xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} 0} \xrightarrow[(\varepsilon,x)\to(0^+,+\infty)]{} 0$$

et $u \longmapsto \dfrac{(\sin u)^2}{u^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ (car dominée par $u \longmapsto u^{-2}$ en $+\infty$ et bornée par 1 en 0), et alors

$$B(\varepsilon, x) = \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{x}{2}} \frac{(\sin u)^2}{u^2} dt \xrightarrow[(\varepsilon,x)\to(0^+,+\infty)]{} \int_0^{+\infty} \frac{(\sin u)^2}{u^2} dt.$$

Enfin, en faisant tendre ε vers 0^+ puis x vers $+\infty$ dans l'égalité 6, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^2}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

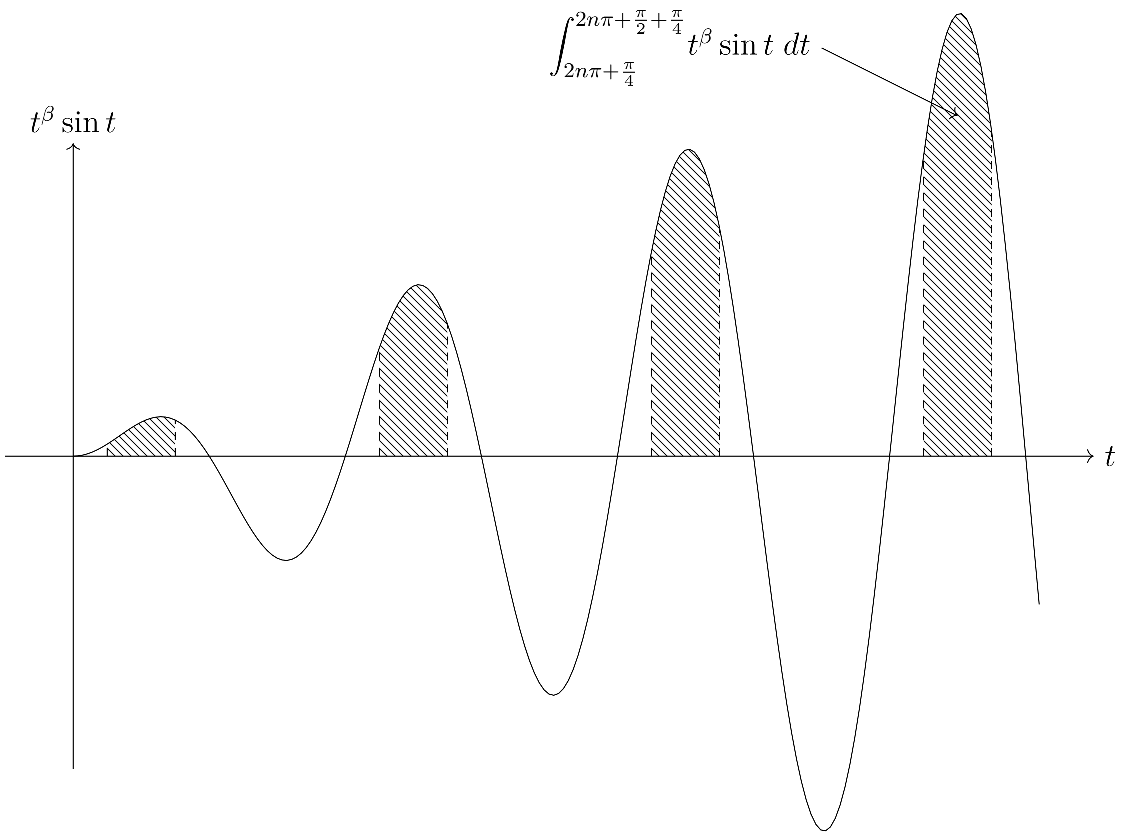
Correction de l'exercice V.5 :

Encore une fois, on pense ici à une intégration par parties. Pour faire converger l'intégrale, on pense poser pour tout $t \geq 1$, $f(t) = \dfrac{1}{t^\alpha}$ et $g'(t) = e^{it}$ (on précisera g un peu plus tard), et dériver f pour augmenter le degré du dénominateur et ensuite utiliser ce qu'on sait sur les intégrales de Riemann pour obtenir la convergence de l'intégrale via la proposition V.2. Pour que cette méthode fonctionne, if faut que $t \longmapsto f(t)g(t)$ converge vers une valeur finie en $+\infty$, et donc il est nécessaire d'avoir $\alpha > 0$. Supposons donc que $\alpha > 0$. Posons pour tout t, $g(t) = -ie^{it}$. On peut facilement voir que $t \longmapsto f(t)g(t)$ tend vers 0 en $+\infty$. De plus, pour tout $t \geq 1$,

$$f'(t)g(t) = \alpha\frac{ie^{it}}{t^{\alpha+1}} = O\left(\frac{1}{t^{\alpha+1}}\right).$$

$t \longmapsto \dfrac{1}{t^{\alpha+1}}$ est intégrable (et donc admet une intégrale généralisée) sur $[1, +\infty[$ d'après la proposition IV.1, donc $f'(t)g(t)$ aussi d'après la proposition II.2, et alors d'après la proposition V.2, f et g étant continument dérivables sur $[1, +\infty[$, la fonction $t \longmapsto f(t)g'(t)$ (qui est égale à $t \longmapsto \dfrac{e^{it}}{t}$) admet une intégrale généralisée sur $[1, +\infty[$.

Il reste maintenant à traiter le cas $\alpha \leq 0$. Lorsque $\alpha = 0$, l'intégrale étudiée n'est clairement pas convergente. Supposons alors que $\alpha < 0$ et posons $\beta = -\alpha > 0$. On veut étudier l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^\beta e^{it} dt$. Étudions la convergence de l'intégrale de la partie imaginaire de l'intégrande, qui est égale à $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^\beta \sin t \, dt$. Les oscillations de cette fonction explosent en $+\infty$, donc notre intuition est de montrer qu'elle diverge en utilisant le critère de Cauchy (Théorème II.3).



On a pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}} t^\beta \sin t \, dt &\underset{(*)}{\geq} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}} t^\beta dt \\
&= \frac{1}{(\beta+1)\sqrt{2}} \left(\left(2n\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)^{\beta+1} - \left(2n\pi + \frac{\pi}{4}\right)^{\beta+1} \right) \\
&= \frac{\left(2n\pi + \frac{\pi}{4}\right)^{\beta+1}}{(\beta+1)\sqrt{2}} \left(\left(1 + \frac{\pi}{2\left(2n\pi + \frac{\pi}{4}\right)}\right)^{\beta+1} - 1 \right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{\left(2n\pi + \frac{\pi}{4}\right)^{\beta+1}}{(\beta+1)\sqrt{2}} \left(\frac{(\beta+1)\pi}{2\left(2n\pi + \frac{\pi}{4}\right)} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{\pi\left(2n\pi + \frac{\pi}{4}\right)^{\beta}}{2\sqrt{2}} + o\left(n^\beta\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.
\end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ est vraie car pour tout $t \in \left[2n\pi + \frac{\pi}{4}, 2n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right]$, $\sin t \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. On en déduit par cette chaine d'inégalités que par exemple, pour tout $\varepsilon = 1$, pour tout $A \geq 0$, il existe $x, y \in [1, +\infty[$ supérieurs à A tels que $\left|\int_x^y t^\beta \sin t \, dt\right| \geq 1$ (il suffit de prendre $x = 2n\pi + \frac{\pi}{4}$ et $y = 2n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ pour n assez grand), et alors d'après le théorème II.3, on peut conclure que l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^\beta \sin t$ est divergente, et par conséquent l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^\beta e^{it} dt$ aussi. Finalement, on conclut que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Correction de l'exercice V.6 :

→ $(\Leftarrow)$ Supposons que f admet une primitive périodique qu'on notera F. On peut alors affirmer que la fonction $t \longmapsto \frac{F(t)}{t}$ converge vers 0 alors que t tend vers $+\infty$, car F est bornée sur $[1 + \infty[$ (car continue periodique). De plus, en posant pour tout $t \geq 1$, $g(t) = \frac{1}{t}$, on voit que $g'(t)F(t) = -\frac{F(t)}{t^2}$. On en déduit donc que la fonction $t \longmapsto g'(t)F(t)$ est dominée par $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$ (car F est bornée) en $+\infty$, et est donc intégrable sur $[1, +\infty[$, et y admet par conséquent une intégrale généralisée. On en déduit alors d'après la proposition V.2, F et g étant continument dérivables sur $[1, +\infty[$ que $t \longmapsto F'(t)g(t)$ (qui est égale à $t \longmapsto \frac{f(t)}{t}$) admet bien une intégrale généralisée sur $[1, +\infty[$.

→ $(\Rightarrow)$ Montrons cette implication par contraposée. Soit T la plus petite période de f. Supposons qu'aucune primitive de F est périodique. On a alors pour tout $x \geq 1$, $\int_x^{x+T} f(t)dt \neq 0$. Posons $C \neq 0$ la valeur de cette intégrale (qui ne dépend pas de x car sa dérivée est nulle). On peut facilement voir que $t \longmapsto f(t) - \frac{C}{T}$ admet une primitive périodique. En effet, pour tout $x \geq 1$, si par exemple F est la primitive de $t \longmapsto f(t) - \frac{C}{T}$ qui s'annule en 1, on a

$$F(x+T) - F(x) = \int_x^{x+T} f(t) - \frac{C}{T} dt = 0,$$

i.e. F est périodique. Maintenant, on peut écrire pour tout $t \geq 1$,

$$\frac{f(t)}{t} = \frac{f(t) - \frac{C}{T}}{t} + \frac{C}{T}\frac{1}{t}.$$

Dans le côté droit de l'égalité, le premier terme admet une intégrale généralisée sur $[1, +\infty[$ d'après le point précédent, car le numérateur est une fonction périodique qui admet une primitive periodique, et le second a une intégrale divergente sur $[1, +\infty[$, et donc la somme des deux n'admet pas d'intégrale généralisée, ce qui montre bien l'implication contraposée voulue.

Remarque. Attention, si le premier terme n'admettait pas d'intégrale généralisée sur $[1, +\infty[$, on aurait pas pu faire cette conclusion.

Correction de l'exercice VI.2 :

La fonction $t \longmapsto \dfrac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2}$ est positive et dominée par $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ (car le numérateur est borné par 1). On en déduit donc directement d'après les propriétés IV.1 et II.2 que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt$ est convergente. Calculons maintenant la valeur de cette intégrale. Soit $x \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
\int_1^x \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt &= \int_1^x \frac{1}{t} dt - \int_1^x \frac{\lfloor t \rfloor}{t^2} dt \\
&= \ln x - \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor - 1} \int_k^{k+1} \frac{k}{t^2} dt - \int_{\lfloor x \rfloor}^x \frac{\lfloor x \rfloor}{t^2} dt \\
&= \ln x - \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor - 1} k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \lfloor x \rfloor \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\lfloor x \rfloor} \right) \\
&= \ln x - \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor - 1} \frac{1}{k+1} + \frac{\lfloor x \rfloor}{x} - 1 \\
&= \underbrace{\ln\left(\frac{x}{\lfloor x \rfloor} \right)}_{\xrightarrow[x \to +\infty]{} 0} + \underbrace{\ln \lfloor x \rfloor - \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{k}}_{\xrightarrow[x \to +\infty]{} -\gamma \text{ (lemme VII.6)}} + \underbrace{\frac{\lfloor x \rfloor}{x}}_{\xrightarrow[x \to +\infty]{} 1} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1 - \gamma.
\end{aligned}$$

On en déduit alors finalement que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt = 1 - \gamma$.
Remarquons au passage que ce n'est pas une coïncidence qu'on retombe sur $1 - \gamma$, comme pour l'exercice III.4. En effet, les deux intégrales se retrouvent l'une de l'autre par un changement de variable $t = \dfrac{1}{u}$. Vérifions ceci et prenons $x > 1$, on a

$$\int_1^x \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt \underset{\substack{t = \frac{1}{u} \\ dt = \frac{-1}{u^2} du}}{=} \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\frac{1}{u} - \left\lfloor \frac{1}{u} \right\rfloor}{\frac{1}{u^2}} \cdot \frac{-1}{u^2} du = \int_{\frac{1}{x}}^1 \left(\frac{1}{u} - \left\lfloor \frac{1}{u} \right\rfloor \right) du$$

Ainsi, on voit bien que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt$ est bien définie si, et seulement si, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{u} - \left\lfloor \frac{1}{u} \right\rfloor \right) du$ est bien définie et que, si c'est le cas, les deux sont bien égales.

Correction de l'exercice VI.3 :

→ (⇐) Si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge, alors étant donné que f est positive et continue par morceaux, et que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $0 \leq f(t)(\sin t)^2 \leq f(t)$, alors nécessairement, d'après la proposition II.2, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)(\sin t)^2 dt$ converge.

→ (⇒) Supposons que $\int_0^{+\infty} f(t)(\sin t)^2 dt$ converge. On souhaite exploiter la décroissance de f en utilisant un argument de comparaison de série intégrale (comme utilisé pour montrer la convergence des sommes de termes du type $\frac{1}{n^\alpha}$). On utilise la découpe de la proposition VI.1 en posant $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n\pi)_{n\in\mathbb{N}}$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)(\sin t)^2 dt \geq f((n+1)\pi) \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} (\sin t)^2 dt = \frac{\pi}{2} f((n+1)\pi) \geq 0.$$

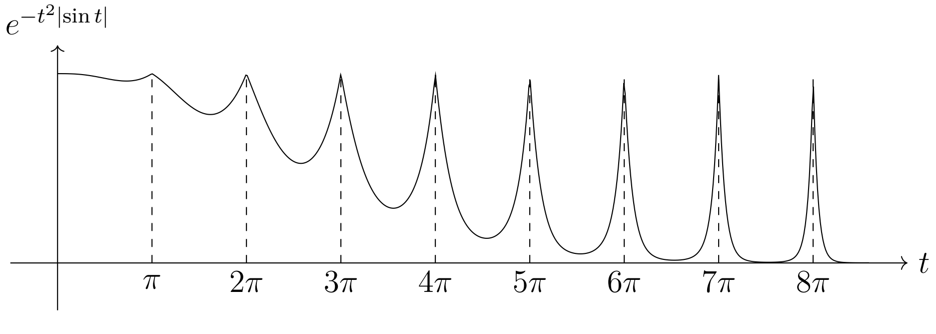
On sait d'après la proposition VI.1 que $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)(\sin t)^2 dt$ est convergente (car $t \longmapsto f(t)(\sin t)^2$ est positive et continue par morceaux, et son intégrale sur $[0, +\infty[$ converge). On en déduit alors que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f((n+1)\pi)$ est également convergente. On a de plus, f étant décroissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} f(t) dt \leq \pi f((n+1)\pi),$$

et donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} f(t) dt$ est convergente, ce qui nous donne encore une fois d'après la propriété VI.1, étant donné que f est positive et continue par morceaux, que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est convergente.

Correction de l'exercice VI.4 :

On commence par regarder la fonction à intégrer. On voit que ce qui pourrait faire diverger $\int_0^{+\infty} e^{-t^2|\sin t|} dt$ est que la puissance de l'exponentielle soit proche de 0 trop longtemps. On veut donc étudier les endroits où cette puissance est proche de 0. Ces endroits apparaissent périodiquement aux points $\{n\pi,\ n \in \mathbb{N}\}$.



On voit que la surface entre deux pics pics qui apparaissent sur la courbe de $t \longmapsto e^{-t^2|\sin t|}$ devient de plus en plus petite, plus on avance sur l'axe des abscisses. On veut donc voir si cette surface rétrécit suffisamment rapidement pour l'intégrale de cette fonction soit convergente. Découpons alors l'intégrale en morceaux, et étudions-les. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-t^2|\sin t|}dt \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-n^2\pi^2|\sin t|}dt &= \int_0^{\pi} e^{-n^2\pi^2|\sin t|}dt \\ &\underset{(*)}{=} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-n^2\pi^2|\sin t|}dt \underset{|\sin t|\geq \frac{2}{\pi}|t|}{\leq} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2n^2\pi t}dt \\ &= \frac{1}{n^2\pi}\left(1-e^{-n^2\pi^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ est vraie car la fonction $t \longmapsto e^{-n^2\pi^2|\sin t|}$ est symétrique par rapport à l'axe d'équation $x = \frac{\pi}{2}$.On en déduit donc que la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-t^2|\sin t|}dt$ est convergente (car la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ est convergente) et qu'alors d'après la proposition VI.1, étant donné que la fonction $t \longmapsto e^{-t^2|\sin t|}$ est positive continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et y admet une intégrale généralisée, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2|\sin t|}dt$ converge.

Correction de l'exercice VII.2 :

Par hypothèse, f' est intégrable sur $[0, +\infty[$, et donc f' y admet une intégrale généralisée, *i.e.* la fonction $x \longmapsto \int_0^x f'(t)dt$ admet une limite finie en $+\infty$, ce qui revient à dire que f admet une limite finie en $+\infty$. De plus, f admet une intégrale généralisée sur $[0, +\infty[$ et est continue par morceaux, ce qui nous permet de dire d'après la proposition VII.1 que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Correction de l'exercice VII.3 :

Tout d'abord, on peut facilement montrer que f est positive. En effet, s'il existe $y \geq 0$ tel que $f(y) < 0$, alors pour tout $x \geq y$,

$$\int_y^x f(t)dt \leq (x-y)f(y) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty,$$

ce qui est impossible car f admet une intégrale généralisée sur $[0, +\infty[$. Montrons maintenant que $xf(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Pour cela, on utilise le critère de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème II.3, étant donné que f est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$, il existe $A > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [A, +\infty[, \ \left|\int_y^x f(t)dt\right| \leq \varepsilon.$$

En substituant y par $\frac{x}{2}$ et en supposant que $x > 2A$, on obtient

$$\left(x - \frac{x}{2}\right)f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ décroissante}}}{\leq} \int_{\frac{x}{2}}^x f(t)dt \leq \varepsilon,$$

ce qui donne $xf(x) \leq 2\varepsilon$. On en déduit donc que

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists A > 0 \ \forall x > 2A, \ 0 \leq xf(x) \leq \varepsilon,$$

c'est-à-dire que $xf(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Correction de l'exercice VII.4 :

L'hypothèse d'uniforme continuité de f impose que cette dernière ne peut pas varier trop brusquement.

Maintenant, essayons de montrer que f tend vers 0 en $+\infty$. Supposons que ce n'est pas le cas, *i.e.*

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall A > 0,\ \exists x > A,\ |f(x)| > \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$ vérifiant la proposition ci-dessus. Ceci signifie que peu importe à quel point on va loin selon l'axe des abscisses, on va trouver des points où $|f|$ est supérieure ou égale à ε. On peut alors construire une suite (x_n) croissante à valeurs positives qui diverge vers $+\infty$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f(x_n)| > \varepsilon$. Sans perte de généralité, quitte à remplacer f par $-f$, on suppose qu'une infinité de termes de la suite (x_n) vérifient $f(x_n) > 0$ (car tous les termes sont soit positifs ou négatifs, donc il existe une infinité de termes de signe positif ou une infinité de termes de signe négatif). Quitte donc à extraire de la suite (x_n), on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N},\ f(x_n) > \varepsilon$. On va maintenant exploiter le fait que f ne varie pas trop brusquement pour trouver des intervalles au voisinage des termes de la suite (x_n) tels que f y est assez éloignée de 0 pour que la surface sous sa courbe sur cet intervalle soit non négligeable. Voici comment on va procéder. Soit $\eta > 0$ tel que pour

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+,\ |x-y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit alors directement que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{x_n-\eta}^{x_n+\eta} f(t)dt \geq 2\eta\left(f(x_n) - \frac{\varepsilon}{2}\right) \geq 2\eta\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \eta\varepsilon.$$

Ceci est en contradiction avec le critère de Cauchy (Théorème II.3). En effet, posons $\varepsilon' = \dfrac{\eta\varepsilon}{2}$. f est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$. Si elle y admet une intégrale généralisée, alors d'après le critère de Cauchy, on peut affirmer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x, y \in [M, +\infty[$ tels que

$$\left|\int_x^y f(t)dt\right| < \frac{\eta\varepsilon}{2}.$$

On en déduit alors que pour $n \in \mathbb{N}^*$ assez grand pour qu'on ait $x_n > M + \eta$,

$$\eta\varepsilon \leq \left|\int_{x_n-\eta}^{x_n+\eta} f(t)dt\right| \leq \frac{\eta\varepsilon}{2},$$

ce qui est absurde. On en déduit donc qu'on a effectivement $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Correction de l'exercice VII.5 :

On va montrer que f est uniformément continue et conclue via l'exercice précédent. On a pour tout $x, y \in \mathbb{R}^+$,

$$|f(x) - f(y)| = \left|\int_x^y f'(t)dt\right| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Cauchy-Schwarz}}}{\leq} \left|\int_x^y 1dt\right|^{\frac{1}{2}} \left|\int_x^y f'(t)^2dt\right|^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{|y-x|}\underbrace{\sqrt{\int_0^{+\infty} f'(t)^2dt}}_{C}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^+$, on a

$$|x-y| < \varepsilon^2 \implies |f(x) - f(y)| \leq C\sqrt{\varepsilon^2} = C\varepsilon.$$

On en déduit alors que f est uniformément continue, et on peut finalement conclure en utilisant l'exercice précédent.