École Polytechnique — IP Paris
Direction du Concours d'Admission

Concours MP - Physique

Nous réunissons dans ce document 40 sujets d'oral de physique posés lors des sessions 2018 et 2019 du concours. Ils sont accompagnés d'éléments de résolution, permettant aux futurs candidats de se préparer à cette épreuve.

Exercice 1 : émission d'électrons entre 2 plaques

Deux plaques métalliques de surface S sont distantes de d et sont soumises dans le vide à une ddp V. La plaque de gauche de potentiel nul émet des électrons (initialement de vitesse nulle) qui sont ensuite captés par la plaque de droite au potentiel V. On suppose le régime stationnaire établi: le courant I est uniforme entre les plaques.

Déterminer la relation $I(V)$ et discuter le résultat.

Eléments de solution

Il faut bien comprendre la situation physique. Entre les deux plaques, il va y avoir une densité de charge d'électrons $\rho(x)$ à déterminer. Et donc un potentiel $V(x)$ dont on connait les conditions aux limites: $V(0) = 0$ et $V(d) = V$. Il y a évidemment une 3è fonction inconnue avec la vitesse des électrons $v(x)$ qui est directement reliée au potentiel par la conservation de l'énergie:

$$\frac{1}{2}mv(x)^2 = eV(x). \qquad (1)$$

Le problème ainsi posé, on sait qu'il y a encore 2 équations à écrire. En régime permanent, on a:

$$\rho(x)v(x) = -j_0. \qquad (2)$$

Avec j_0 une constante positive (module du vecteur courant). Finalement, l'équation qui donne $V(x)$ en fonction de la densité de charge (équation de Poisson):

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = -\rho(x)/\epsilon_0 = j_0/(v(x)\epsilon_0). \tag{3}$$

Avec (2) et (3), on obtient une équation pour $V(x)$ seul qui se résout facilement. On peut ensuite directement calculer $\rho(x)$ puis $v(x)$ pour en déduire le courant:

$$I = \frac{4S\epsilon_0}{9d^2}\sqrt{\frac{2e}{m}}\, V^{3/2}.$$

Comme on s'y attendait, on n'obtient pas une relation linéaire entre V et I. En fait ce montage correspond à une diode à vide.

Exercice 2 : élastique sur une boule

Un élastique circulaire de masse M, de longueur au repos l_0 et de raideur k est placé autour d'une boule de billard de rayon R.

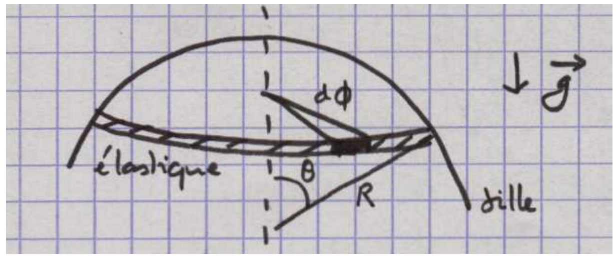
1) Déterminer l'angle θ (repéré par rapport à l'axe de symétrie vertical de la boule) à l'équilibre mécanique en fonction des paramètres du problème. On négligera les frottements entre l'élastique et la boule.

2) On tient compte maintenant du frottement entre l'élastique et la boule. Déterminer l'angle limite d'équilibre à la limite du glissement.

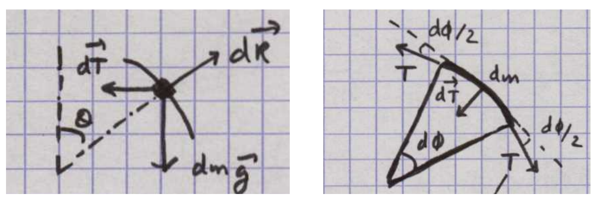
Eléments de solution

Il faut bien se représenter la configuration physique. Voir Figure.

Maintenant il faut écrire la condition d'équilibre de l'élastique dans cette situation. Pour cela, on isole un petit morceau d'élastique de longueur dl et de masse dm et on écrit son équilibre statique. Ce petit morceau est soumis à son poids, la réaction normale de la boule sur l'élastique et aux tensions des parties gauche et droite de l'élastique sur le petit morceau



dl. On représente ceci sur la figure ci-dessous, avec une vue de coté (figure à gauche) et une vue de dessus (figure à droite).



Voilà, le plus dur est fait. Le petit morceau d'élastique est donc en équilibre mécanique lorsque:

$$dm\vec{g} + d\vec{T} + d\vec{R} = \vec{0}. \tag{1}$$

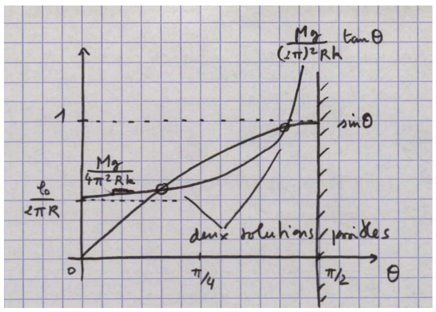
Que l'on va projeter sur la normale à $d\vec{R}$. On peut facilement exprimer $d\vec{T}$ avec la figure de droite (vue de dessus). La tension T le long de l'élastique s'exprime comme la raideur multipliée par l'allongement de l'élastique par rapport à sa longueur au repos, soit:

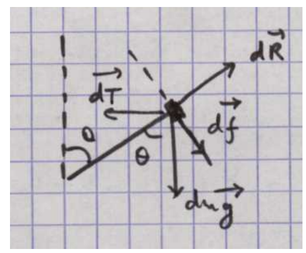
$$T = k(2\pi R \sin\theta - l_0).$$

Alors, on trouve facilement que (1) donne une relation pour θ:

$$\sin\theta = \frac{l_0}{2\pi R} + \frac{Mg}{4\pi^2 kR}\tan\theta. \tag{2}$$

La question est de trouver l'angle θ. Il faut donc résoudre cette équation. Déjà, on voit qu'une solution n'est possible que si $l_0 < 2\pi R$. Alors, une étude graphique montre qu' il y a deux solutions possibles. Voir Figure ci-dessous. La discussion des cas limites, par exemple $\frac{Mg}{4\pi^2 kR} << 1$, est immédiate.





2) Lorsque l'on tient compte des forces de frottement, il faut prendre en compte la force $d\vec{f}$ de la boule sur l'élastique. Voir figure ci-dessus. A la limite du glissement, on a: $df = \mu dR$. Le raisonnement est le même que pour la question 1) sauf qu'ici, on va projeter l'équation d'équilibre mécanique sur la normale à $d\vec{R}$ puis sur $d\vec{R}$ afin d'obtenir 2 équations et d'éliminer dR. On obtient:

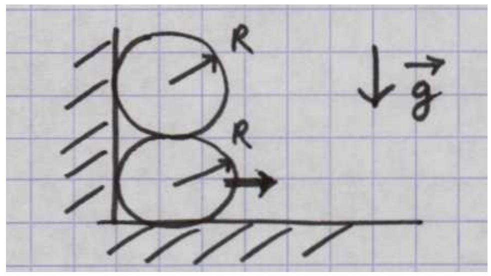
$$\sin\theta = \frac{l_0}{2\pi R} + \frac{Mg}{4\pi^2 kR}\left(\frac{\tan\theta - \mu}{1 - \mu\tan\theta}\right).$$

Ce qui conclut.

Exercice 3 : 2 cylindres superposés

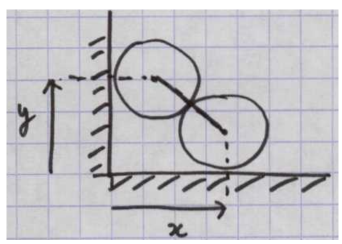
On considère 2 cylindres identiques de rayon R, de masse m posés l'un sur l'autre contre un mur vertical. Voir figure. Le cylindre inférieur commence à glisser (sans rouler) vers la droite. On néglige tout frottement.

Décrire le mouvement des 2 cylindres et déterminer la vitesse finale du cylindre inférieur.



Eléments de solution

L'exercice ne pose pas de difficulté de principe mais il faut bien poser le problème. Lorsque le cylindre du dessous glisse vers la droite, celui du dessus tombe verticalement, les 2 cylindres restant en contact comme sur la figure ci-dessous. Puis à la limite où il y a rupture du



contact, le cylindre du dessus tombe avec l'accélération g pendant que celui du dessous n'est plus soumis à aucune force horizontale, donc il conserve sa vitesse. On doit trouver cette vitesse. Il y a deux équations que l'on peut écrire, en utilisant les notations de la figure: (1) la distance entre les axes des 2 cylindres est fixe jusqu'à la rupture du contact, (2) la conservation de l'énergie entre la position initiale (au repos) et l'instant de rupture du contact. Soit:

$$(x - R)^2 + (y - R)^2 = 4R^2. \tag{1}$$

$$\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = mg(3R - y) \tag{2}$$

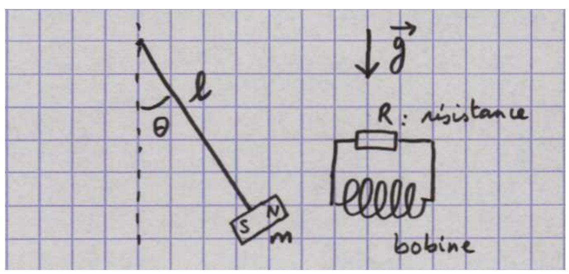
On peut alors dériver 2 fois par rapport au temps l'équation (1) pour exprimer $(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ à la rupture du contact. En combinant avec (2), cela donne la valeur de y à la rupture du contact, soit: $y = 7R/3$. On en déduit donc x puis la vitesse finale du cylindre du dessous:

$$\dot{x} = \frac{4}{3}\sqrt{gR/3}.$$

Ce qui conclut.

Exercice 4 : pendule et induction

On considère un aimant de masse m attaché à une tige de longueur fixe l et de masse négligeable. De plus une bobine est placée au voisinage du pendule comme sur la figure. Alors le flux magnétique à travers la bobine va changer en fonction de l'angle θ et on admet



que:

$$\Phi(t) = \Phi_0 + \Phi_b\theta(t).$$

La bobine est reliée à une résistance pour former un circuit fermé. On supposera que $\theta(t)$ peut s'écrire comme suit:

$$\theta(t) = A(t)\cos(\omega t).$$

Avec l'amplitude $A(t)$ qui varie peu sur une oscillation et ω qui est la pulsation du pendule en l'absence de bobine.

Déterminer l'expression de l'amplitude des oscillations du pendule $A(t)$ en fonction des paramètres du montage.

Eléments de solution

Il faut écrire que l'énergie mécanique du pendule va diminuer au cours du temps du fait de la dissipation de puissance par effet Joule dans la résistance. Donc, l'amplitude des oscillations $A(t)$ va diminuer au cours du temps.

Si on néglige l'inductance propre de la bobine:

$$e = -\Phi_b \dot{\theta} = \Phi_b \omega A(t) \sin(\omega t) = Ri.$$

Avec l'approximation $\dot{A} << \omega A$ (énoncé). On en déduit immédiatement la puissance dissipée par effet Joule P et on peut donc écrire ce que l'on souhaite:

$$P = -\frac{dU}{dt}.$$

Avec $U \simeq \frac{1}{2} mglA(t)^2$. Soit:

$$A(t) = A_0 e^{-\frac{\Phi_b^2 \omega^2}{2mglR} t}.$$

Avec $\omega^2 = g/l$.

Si on ne néglige pas l'inductance propre de la bobine, l'équation électrique devient:

$$e = \Phi_b \omega A(t) \sin(\omega t) = Ri + L\dot{i}.$$

Cette relation est celle d'un circuit RL en régime sinusoidal forcé, ce qui permet d'obtenir l'intensité en fonction de ω. On obtient:

$$i(t) = \frac{\Phi_b \omega A(t)}{R^2 + L^2\omega^2} (R \sin(\omega t) - L\omega \cos(\omega t)).$$

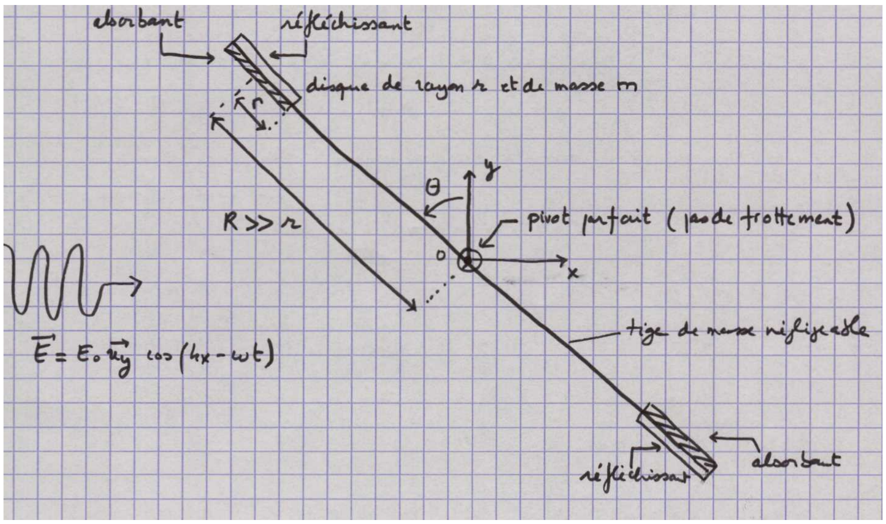
Donc:

$$P = \frac{\Phi_b^2 \omega^2 A(t)^2}{2R(1 + L^2\omega^2/R^2)} - \frac{dU}{dt}.$$

Ce qui donne le résultat.

Exercice 5 : anémomètre EM

On considère le dispositif expérimental suivant (figure).



Déterminer l'accélération angulaire du montage en moyenne sur un tour en fonction des paramètres du problème.

Eléments de solution

C'est un exercice sur la pression de radiation de photons sur une surface. Dans le cours, la pression de radiation est calculée sur une surface réfléchissante ou absorbante en incidence normale. Ici, il faut adapter ce calcul dans une configuration un peu différente et donc ne pas se tromper avec les $\cos\theta$ qui vont intervenir dans le calcul.

On peut commencer par relier l'amplitude du champ électrique E_0 (figure de l'énoncé) à un flux de photons. La définition du vecteur de Poynting permet d'écrire:

$$n\hbar\omega c = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}.$$

Avec n la densité volumique de photons associés à l'onde.

Ensuite, il faut calculer la force normale du fait du flux de photons sur les parties absorbantes et réfléchissantes du dispositif. Dans la partie absorbante, chaque photon cède l'impulsion $\hbar k \cos\theta$ au disque de rayon r. Les photons arrivent suivant la direction horizontale, donc pendant δt il y a $nc\delta t \cos\theta \pi r^2$ photons qui sont absorbés. Finalement, la force (normale à la surface) des photons sur le disque s'écrit:

$$F_a = n\hbar k c \cos^2\theta\ \pi r^2 = n\hbar\omega \cos^2\theta\ \pi r^2 = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2} \cos^2\theta\ \pi r^2.$$

Dans la partie réfléchissante, le calcul est similaire excepté que chaque photon se réfléchit symétriquement par rapport à la normale. On trouve la force qui s'exerce sur le disque:

$$F_r = \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2} \cos^2\theta\ \pi r^2.$$

On en déduit que le système va tourner dans le sens trigonométrique. De plus, avec les 2 relations ci-dessus on en déduit l'accélération angulaire en moyenne sur un tour:

$$2mR^2 < \frac{d\omega}{dt} >_{tour} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2} < \cos^2\theta >_{tour}\ \ \pi r^2 = \frac{E_0^2}{4\mu_0 c^2}\ \pi r^2.$$

Ce qui conclut.

Exercice 6 : balle lancée en l'air

Une balle est lancée verticalement vers le haut avec une vitesse v_0. Elle est soumise à la pesanteur et à la force de frottement de l'air sur la balle: $\vec{F} = -\alpha m \vec{v}$. On note v_f la vitesse à laquelle retombe la balle à son altitude de départ.

1) Déterminer la relation entre v_0 et v_f. Commenter.

2) Comparer les temps de vol de la balle dans l'air (montée, descente) et dans le vide.

Eléments de solution

L'idée importante à comprendre dans cet exercice, c'est que la balle ne va pas mettre le même temps à monter à l'altitude h qu'à descendre. On peut le comprendre intuitivement. Quand la balle monte, elle est soumise à la gravité et à la force de frottement qui sont toutes les deux orientés vers le bas. Ce qui veut dire qu'elle décélère avec une décélération moyenne $|a_{0\to h}| > g$. Alors que quand la balle descend, les deux forces ont des directions opposées, donc $|a_{h\to 0}| < g$. Comme on obtient facilement que $t_{0\to h} = \sqrt{\frac{2h}{|a_{0\to h}|}}$ et une relation similaire pour $t_{0\to h}$, on trouve que:

$$\frac{t_{0\to h}}{t_{0\to h}} = \sqrt{\frac{|a_{h\to 0}|}{|a_{0\to h}|}}.$$

Et donc la balle prend plus de temps à descendre. C'est ce que l'on doit formuler plus précisément pour résoudre l'exercice.

1) On écrit le PFD pour la balle qui se résout sans difficulté, on obtient:

$$v_0 + v_f = \frac{g}{\alpha}\ln(\frac{g+\alpha v_0}{g-\alpha v_f}).$$

2) On en déduit:

$$t_{0\to h} = \frac{1}{\alpha}\ln(1+\alpha v_0/g).$$

$$t_{h\to 0} = -\frac{1}{\alpha}\ln(1-\alpha v_f/g).$$

Ce qui confirme plus précisément la discussion de l'introduction. De plus, en utilisant le résultat de la question 1):

$$T = t_{0\to h} + t_{h\to 0} = (v_0 + v_f)/g.$$

Dans le vide: $T = 2v_0/g$. Et comme $v_f < v_0$, $T_{air} < T_{vide}$, ce qui conclut.

Exercice 7 : corde d'explosifs

On considère une corde avec une distribution uniforme d'explosifs le long de la corde. On suppose que les explosions se propagent le long de la corde à la vitesse V. De plus, pour chaque explosion, le choc émis sous forme d'onde sonore se propage dans l'air à la vitesse c_s.

Déterminer la forme de la corde pour que toutes les ondes sonores émises arrivent en un point M quelconque au même instant.

Eléments de solution

On traite déjà les cas simples: si $V < c_s$ il n'y a pas de solution et si $V = c_s$ la solution est évidement que la corde forme le segment de droite du début de la corde jusqu'à M. Si $V > c_s$, c'est un peu plus compliqué. On peut introduire les coordonnées polaires centrées en M. Un point de la corde est donc repéré comme r, θ, où l'angle polaire est déterminé par rapport à un axe fixe quelconque. L'onde sonore émise depuis ce point mettra le temps r/c pour parvenir en M. Ce que l'on doit écrire, c'est que l'onde sonore émise depuis le point $r + dr, \theta + d\theta$ arrivera au même instant en M. Il faut donc que r/c_s soit égal au temps que met l'onde d'explosions le long de la corde pour aller de r, θ à $r + dr, \theta + d\theta$, plus le temps que met l'onde sonore pour parcourir $r + dr, \theta + d\theta$ jusqu'à M. Les calculs sont simples, on trouve:

$$r = r_0 \exp\left(-\frac{\theta - \theta_0}{\sqrt{V^2/c_s^2 - 1}}\right).$$

On peut tracer cette courbe. On obtient une forme en spirale.

Exercice 8 : cloche hémisphérique

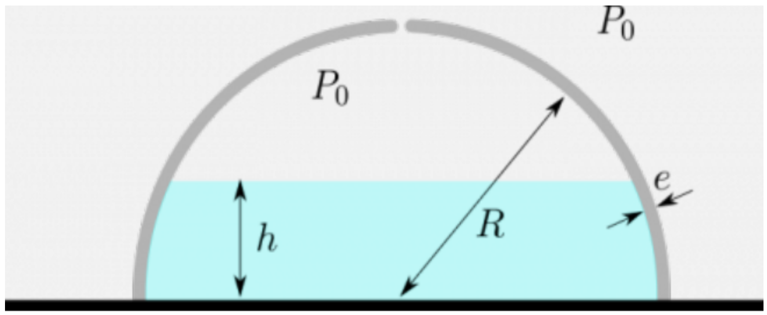
Une cloche hémisphérique de rayon R et de masse $m = 1$ kg est posée sur une table de surface lisse et horizontale. Voir figure. On verse de l'eau par une ouverture existant au sommet de la cloche. Lorsque l'eau atteint une hauteur h, la cloche se soulève.

Expliquer et trouver h. Que peut-on en déduire pour R?

Eléments de solution

Il est clair que la cloche se soulève lorsque le poids de la cloche est compensé par la composante verticale des forces de pression de l'eau (dans la cloche) sur les parois. Il faut donc calculer cette composante F_z puis écrire la condition $F_z > mg$ pour faire l'exercice. La difficulté de l'exercice est de poser ce calcul correctement.

On suppose que l'eau a atteint la cote $z = h$. On note θ l'angle polaire entre la surface



horizontale (table) et un point de la cloche. Alors:

$$F_z = \int_S p(z) \sin\theta dS.$$

avec $dS = 2\pi R \cos\theta R d\theta$ et $p(z) = P_0 + \rho g(h - z)$ (loi de l'hydrostatique), ρ est la masse volumique de l'eau. Dans l'intégrale pour F_z, $p(z)$ est la pression de l'eau sur la paroi de la cloche à la cote z donc à l'angle polaire tel que $z = R \sin\theta$. Après des calculs, on obtient:

$$F_z = \rho g \pi h^3/3.$$

La cloche se soulève donc lorsque:

$$h \geq (\frac{3m}{\pi\rho})^{1/3}.$$

Pour une cloche de 1 kg, cela donne $h = 10$ cm, donc $R > 10$ cm, ce qui conclut.

.

Exercice 9 : onde sur un atome

On éclaire N atomes alignés sur une ligne, régulièrement espacés de a, par une onde plane progressive monochromatique (de longueur d'onde λ) en incidence normale. Ce étudie la figure d'interférence formée par l'onde réfléchie pour ce réseau à une dimension.

1) A quels angles observe-t-on à l'infini les maxima d'intensité. Déterminer ensuite $I(\theta)$. Quelle est la largeur angulaire d'un maximum d'intensité?

2) Déterminer $I(\theta)$ pour une réseau 1D où 2N atomes sont successivement espacés de b, c, b, c etc.

Eléments de solution

1) Les maxima d'intensité de la figure d'interférence correspondent aux angles tels que la différence de chemin optique entre les ondes émises par 2 atomes consécutifs soit égale à un nombre entier de longueur d'onde. Alors, ces 2 ondes interfèrent de manière constructive et c'est donc la même chose pour toutes les ondes émises par chacun des atomes du réseau à une dimension. Cela donne les angles θ_m tels que:

$$\delta_m = a \sin \theta_m = m\lambda.$$

L'intensité s'obtient facilement en faisant la somme sur toutes les ondes émises. Soit pour l'amplitude diffusée:

$$s(\theta) = s_0 \sum_{k=0}^{N} e^{ik2\pi(a \sin \theta)/\lambda}.$$

Ce calcul fait intervenir une série géométrique. On obtient pour l'intensité diffusée:

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2(N\pi(a \sin \theta)/\lambda)}{\sin^2(\pi(a \sin \theta)/\lambda)}.$$

Ce qui donne bien $I(\theta_m) \simeq I_0 N^2$ maxima d'intensité. On trouve alors que la largeur angulaire d'un des maxima d'intensité est $\Delta\theta \sim 2\lambda/L$.

2) On peut faire un calcul proche de celui de la question 1). On note $a = b + c$. On obtient pour l'intensité diffusée:

$$I = I_0 \frac{\sin^2(N\pi(a \sin \theta)/\lambda)}{\sin^2(\pi(a \sin \theta)/\lambda)} \, 4\cos^2(\pi(b \sin \theta)/\lambda).$$

Ce qui conclut.

Exercice 10 : électron dans un cristal

On considère une électron piégé dans le défaut d'un cristal, modélisé par une cavité cubique de volume L^3 et dans laquelle l'électron est libre de se déplacer. On rappelle l'équation de

Schrödinger qui décrit le mouvement de cet électron, de fonction d'onde $\psi(x, y, z)$, dans la cavité:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}) + V(x, y, z)\psi(x, y, z). = E\psi(x, y, z).$$

1) Déterminer les niveaux d'énergie possibles pour l'électron. Déterminer alors la longueur d'onde des photons absorbés qui permettent une transition de l'état fondamental vers le 1er état excité pour $L = 0.5$ nm.

On considère maintenant que la cavité peut se déformer mais en gardant son volume constant L^3, tel que $L_x = \alpha L$ et $L_y = L_z = \beta L$.

2) Déterminer la valeur de α qui minimise l' énergie du 1er état excité. Quelle est alors la longueur d'onde des photons émis lors du retour du 1er état excité vers le fondamental pour $L = 0.5$ nm?

Eléments de solution

1) Question proche du cours dans le cas d'une boite avec 3 dimensions.

$$E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m}(n_x^2/L_x^2 + n_y^2/L_y^2 + n_z^2/L_z^2) = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2).$$

Les photons ($E_0 \rightarrow E_1$) ont donc une longueur d'onde telle que:

$$hc/\lambda = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}3.$$

Soit une longueur d'onde de 330 nm (UV) pour $L = 0.5$ nm. Il y a 3 états possibles pour E_1 (tous de même énergie).

2) On trouve facilement que l'énergie du 1er état excité est minimale pour $n_x = 2$, $n_y = n_z = 1$ et $\alpha^3 = 4$. On peut noter que les 3 états possibles pour le 1er état excité de la question 1) n'ont ici plus la même énergie. L'état $n_x = 2$, $n_y = n_z = 1$ est bien celui de plus basse énergie parmi les 3 et donc constitue le 1er état excité de la boite modifiée. Pour cette valeur de α, on trouve que la longueur d'onde du photon émis est alors de 830 nm.

Exercice 11 : compression d'une chaine d'ions

On considère une chaine 1D infinie d'ions espacés de R_0 de charges alternées $+q, -q, +q, -q$ etc.

1) Quelle est l'énergie potentielle électrostatique de l'ion placé à l'origine dans le champs de tous les autres. En déduire que la chaine tend à se comprimer.

Pour contrer cet effet, on suppose qu'il y a en plus une force répulsive entre 2 voisins qui dérive d'une énergie potentielle de la forme A/R^p avec $p > 1$.

2) Déterminer A à l'équilibre pour $R = R_0$. Déterminer le travail de compression de la chaine de R_0 à R avec $\Delta R = R_0 - R << R_0$. Commenter.

Eléments de solution

1) On fait la somme sur toutes les charges à partir de la charge située à l'origine. On obtient l'énergie potentielle:

$$E_p^0 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R_0}\, 2\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n} = \alpha\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R_0}$$

Cette série est convergente et négative et d'autant plus négative que R_0 diminue. Cela veut dire que la chaine de charges va se comprimer.

2) Avec la force de répulsion entre les charges voisines, l'énergie potentielle pour la charge située à l'origine s'écrit:

$$E_p = E_p^0 + 2A/R^p.$$

A l'équilibre, on doit avoir $dE/dR = 0$ pour $R = R_0$, soit:

$$A = -\alpha\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 p}R_0^{p-1} > 0.$$

Pour déterminer le travail de compression W on doit calculer:

$$W = \Delta E_p.$$

Après calculs, on obtient:

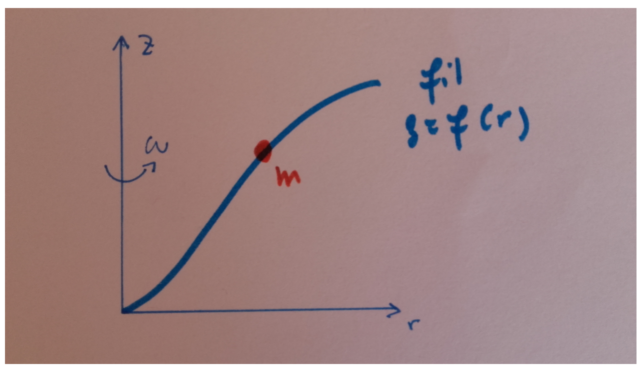
$$W = \frac{C}{2}(\frac{\Delta R}{R_0})^2.$$

Avec $C = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R_0^2}\alpha(1-p) > 0$. Ce travail est bien positif.

Exercice 12 : masse contrainte sur un fil

On considère un fil rigide de profil $z = f(r)$ en rotation à vitesse angulaire constante autour de l'axe vertical (z). Voir figure. Une masse m peut coulisser sans frottement sur ce fil.

Trouver une condition sur la fonction $f(.)$ pour qu'il existe une position possible de la masse m telle qu'elle soit en mouvement circulaire uniforme. Discuter la stabilité de ce mouvement.



Eléments de solution

La masse m est en mouvement circulaire uniforme si $\dot{r} = 0$. Alors, les équations du mouvement de m (dans le référentiel tournant à la vitesse angulaire ω,) s'écrivent au point r_0 où ce mouvement est possible: $mg = N\cos\alpha$ et $m\omega^2 r_0 = N\sin\alpha$ (1), avec $f'(r) = \tan\alpha$. Ici N est la composante de la réaction normale du fil sur m projetée dans le plan (z,r). Il y a aussi une composante de la réaction normale perpendiculaire à ce plan nécessaire pour compenser la force de Coriolis dans le référentiel tournant. Cela donne immédiatement:

$$\omega^2 r_0/g = f'(r)|_{r_0}.$$

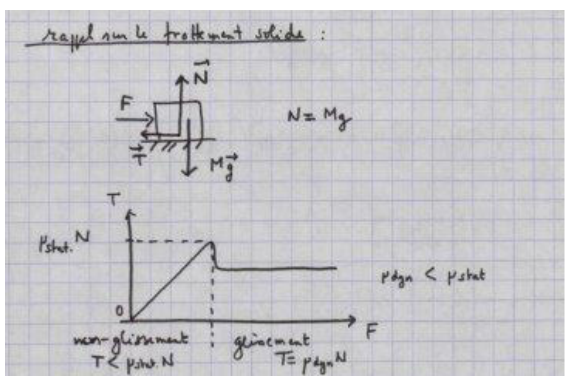
Toujours dans le référentiel tournant à la vitesse angulaire ω, on peut projeter l'équation du mouvement suivant (r) au voisinage du point $r = r_0$. Du fait de l'équation (1) plus haut, il ne reste qu'un terme $m\omega^2\epsilon$ comme force où ϵ est la petite variation par rapport à r_0. On voit donc immédiatement que le mouvement n'est pas stable.

Exercice 13 : règle horizontale posée sur 2 doigts

Une règle horizontale de longueur $2L$ est tenue sur 2 doigts A et B. On déplace les doigts l'un vers l'autre en gardant la règle horizontale et en supposant qu'elle ne bouge pas.

Décrire autant que possible ce qui va se passer.

Aide: il va y avoir des forces de frottement des doigts sur la règle qu'il faut prendre en compte pour résoudre l'exercice. Rappel des lois du frottement solide.



Eléments de solution

Il faut bien s'imaginer le problème, voir ce qu'il va se passer et alors le problème est simple. La somme des forces qui s'exercent sur la règle est nulle. Donc sur l'axe vertical cela donne avec des notations évidentes:

$$N_A + N_B = mg.$$

Comme la règle ne bascule pas, on a aussi que la somme des moments est nulle par rapport au centre G de la règle:

$$N_B GB = N_A GA.$$

Cela donne: $N_A = mg\frac{GB}{AB}$ et $N_B = mg\frac{GA}{AB}$.

Ensuite, le doigt A exerce une force $F > 0$ dans un sens sur la règle et le doigt B la force $-F$ (dans l'autre sens). Donc, tant que $F < \mu_s N_A = \mu_s mg\frac{GB}{AB}$, le doigt A est techniquement dans le domaine du frottement statique et donc ne commence pas à glisser. De même pour le doigt B. Tant que $F < \mu_s N_B = \mu_s mg\frac{GA}{AB}$, le doigt B est techniquement dans le domaine du frottement statique et donc ne commence pas à glisser.

Alors, imaginons que l'on parte de la situation $GB < GA$. D'après les relations plus haut, cela veut dire que la force maximale que le doigt A va exercer sur la règle pour atteindre le glissement est plus faible que pour B. Donc le doigt A commence à glisser le premier. Cela signifie qu'à ce moment, A glisse et $T_A = \mu_d mg\frac{GB}{AB}$ (avec $\mu_d < \mu_s$), B lui reste fixe en exerçant pour l'instant une force trop faible pour glisser.

Ensuite, lorsque:

$$\mu_d \frac{GB}{A'B} = \mu_s \frac{GA'}{A'B}.$$

C'est le doigt B qui va pouvoir glisser et c'est A va s'arrêter. En effet, à cet instant, on a :

$$GA' = \frac{\mu_d}{\mu_s} GB < GB.$$

Et ainsi de suite... En suivant ce raisonnement, on comprend que A et B vont converger progressivement vers G. On obtient immédiatement:

$$GB_n = \left(\frac{\mu_d}{\mu_s}\right)^{2n} GB_0.$$

$$GA_n = \left(\frac{\mu_d}{\mu_s}\right)^{2n-1} GB_0.$$

Ce qui conclut.

Exercice 14 : bouchon de champagne

Expliquer et décrire la dynamique d'éjection d'un bouchon de champagne. Une pression dans la bouteille de 5 *bars dans la bouteille expulse le bouchon à* 40 *km/h. Vérifier.*

Aide. Rappel des lois du frottement solide.

Eléments de solution

C'est un exercice de modélisation. A partir du moment où le bouchon va commencer à glisser dans le goulot, la force de frottement du goulot sur le bouchon s'écrit $F = \mu_d N$ avec N la réaction normale. Mais il est évident que N correspond à une force de pression latérale bouchon-goulot. Donc, N est proportionnel à la surface de contact bouchon-goulot.

Si on note $z = z(t)$ le déplacement vertical du bouchon par rapport à sa position de départ. On peut prendre la base du bouchon pour caractériser ce déplacement z. On oriente (z) vers le haut. Alors, le raisonnement plus haut permet d'écrire:

$$F_z = -F_0(1 - z/L).$$

Quand $z = L$ (bouchon sorti de la bouteille) alors, il n'y a bien évidemment plus de force de frottement. On peut maintenant écrire l'équation du mouvement du bouchon lors de son éjection:

$$m\ddot{z} = P_0 S - F_0(1 - z/L).$$

Evidemment $P_0 S > F_0$ sinon il n'y aura pas de glissement et le bouchon va rester en place sans bouger. Cela donne la solution pour $z(t)$:

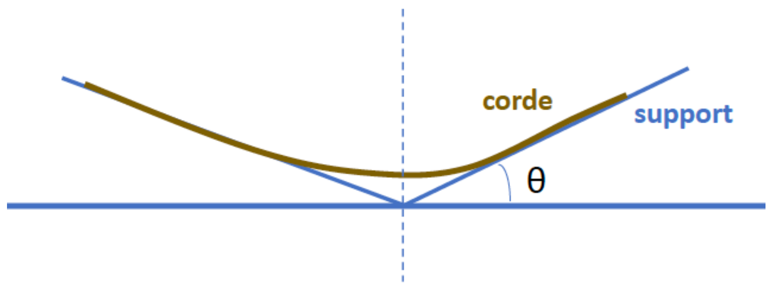
$$z(t) = L(P_0 S/F_0 - 1)\left(ch(\sqrt{\frac{F_0}{mL}}\ t) - 1\right).$$

Il y a bien une divergence exponentielle, ce qui décrit le phénomène observé.

Pour l'AN, on peut prendre des valeurs raisonnables: $L = 2$ cm, $S = 1$ cm^2, $m = 10$ g et on peut prendre $F_0 \simeq P_0 S$ pour le calcul de $\sqrt{\frac{F_0}{mL}}$. On vérifie alors facilement que l'expression plus haut explique l'observation.

Exercice 15 : corde sur un support

On considère une corde de masse linéique λ que l'on pose sur un support fixe comme sur la figure ci-dessous (avec un symétrie gauche-droite). Pour que la corde puisse rester dans une configuration comme celle-ci, cela implique qu'il y a un frottement entre la corde et le support. On prendra pour coefficient de frottement $\mu = 1$.



Quelle est la plus grande fraction possible de la corde ne touchant pas le support, pour une valeur de θ donnée? Quel est alors la valeur maximale accessible quelque soit θ?

Eléments de solution

Il faut écrire l'équilibre mécanique de la corde sur le support à la limite du glissement, afin d'avoir une relation entre la réaction normale du support sur la corde et la force de frottement. Dans la suite, on note ϕ la fraction de la corde qui n'est pas en contact avec le support. Donc $1-\phi$ est la fraction de la corde en contact avec le support. Il est bien évident que la réaction normale (support-corde en contact) et donc la force de frottement doivent être proportionnel à $1-\phi$. On obtient facilement que le module de la réaction normale N par exemple pour le morceau de corde (coté droit) en contact avec le support s'écrit:

$$N = ((1-\phi)mg\cos\theta)/2.$$

Alors, l'équation pour l'équilibre pour toute la corde donne:

$$(1-\phi)(\cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta) = 1.$$

Soit une relation de la forme: $\phi = F(\theta)$ où $F(.)$ est une fonction croissante. Donc la valeur maximale de ϕ est atteinte pour $F(\theta)$ maximale. Soit:

$$\phi_{max} = (\sqrt{2} - 1)^2 = 0.17.$$

Ce qui conclut.

Exercice 16 : trajectoire d'une comète

Une comète de masse m se trouve sur une trajectoire parabolique (énergie mécanique nulle) autour du soleil de masse M.

En supposant que le plan de sa trajectoire est le même que celui de la trajectoire terrestre (que l'on supposera circulaire), déterminer sous quelle(s) condition(s) le temps T passé par la comète à l'intérieur de la trajectoire terrestre est maximal et déterminer cette valeur.

Eléments de solution

On écrit l'énergie mécanique de la comète dans le champ de gravité du soleil:

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GMm}{r} = 0.$$

Avec $r^2\dot{\theta} = A$ constante. Ce qui donne:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2GM}{r} - \frac{A^2}{r^2}}.$$

Le point de rebroussement de la trajectoire de la comète est tel que $\dot{r} = 0$, soit:

$$r_{min} = \frac{A^2}{2GM}.$$

Ce qui permet de simplifier l'expression précédente en utilisant la variable sans dimension $x = r/r_{min}$. On obtient:

$$\dot{r} = \frac{2GM}{A}\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}. \quad (1)$$

Pour que la trajectoire de la comète soit incluse dans l'orbite terrestre, il faut que $r_{min} \leq r \leq R_T$ avec R_T le rayon de l'orbite terrestre autour du soleil. Et donc, le temps passé par la comète à l'intérieur de cette orbite est:

$$T = 2\int_{r_{min}}^{R_T} \frac{dr}{\dot{r}}.$$

Ce qui donne $T(r_{min})$ en utilisant (1) et après calcul de l'intégrale. Le seul paramètre ajustable est r_{min}. Tout calculs faits, on trouve que $T(.)$ est maximal pour $r_{min} = R_T/2$ et alors:

$$T = T_{max} = \frac{4}{6\pi} T_{terre} \simeq 78\ jours.$$

Ce qui conclut.

Exercice 17 : glaçon dans l'eau

Un glaçon sphérique de rayon initial 1 cm est immergé dans de l'eau liquide de température 10^o C. On suppose que la glaçon fond suffisamment lentement pour rester sphérique au cours du temps.

Déterminer l'évolution du rayon du glaçon en fonction du temps. En déduire la durée de fusion complète du glaçon.

On utilisera:
$\lambda = 0.6$ W/m/K la conductivité thermique de l'eau, $\rho = 917$ kg/m^3 la masse volumique de la glace et $L_f = 3.3\ 10^5$ J/kg la chaleur latente (ou enthalpie) de fusion de la glace. On supposera que la capacité calorifique massique de l'eau liquide est négligeable.

Rappel: la chaleur latente de fusion de la glace est l'énergie absorbée sous forme de chaleur par la glace lorsqu'elle passe de l'état solide à l'état liquide à température et pression constante.

Relations utiles: soit une fonction $f(.)$ qui ne dépend que de la distance à l'origine des coordonnées (r) -coordonnée sphérique radiale-, alors le Laplacien de f s'écrit:

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}).$$

De plus, le gradient de f est égal à: $\frac{\partial f}{\partial r}\vec{e_r}$.

Eléments de solution

Le plus simple est d'avoir une idée de ce qui se passe avant de commencer. Du fait de la présence du glaçon la température de l'eau ne va plus être uniforme. Il sera assez facile de la trouver avec l'équation de la chaleur. La gómétrie du problème nous amène à écrire cette température de l'eau sous la forme $T(r,t)$. Le rayon $R(t)$ du glaçon va intervenir comme une des conditions aux limites qui permettent de trouver complètement $T(r,t)$. Ensuite, à partir de $T(r,t)$, on va déduire le vecteur densité de courant thermique dans l'eau, en particulier au niveau du glaçon. Alors, on va pouvoir calculer quelle quantité de chaleur est fournie au glaçon par unité de temps. Donc, pendant un intervalle de temps dt, on pourra calculer quelle quantité de glace est transformée en liquide et donc la variation de taille du glaçon. Comme la quantité de liquide augmente, on peut se dire qu'il y a complication car il faut recalculer $T(r,t)$. Mais, on va suivre l'énoncé et négliger la capacité calorifique massique de l'eau, ce qui enlève cette difficulté.

L'objectif de l'exercice est décrire tout cela un peu plus précisément. On note donc $T(r,t)$ la température dans l'eau, l'origine des coordonnées étant prise au centre du glaçon. Alors, il existe un vecteur densité de courant thermique $\vec{j}(r,t)$, tel que: $\vec{j}(r,t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e_r}$. En faisant un bilan énergétique entre 2 sphères de rayons r et $r + dr$ on peut écrire:

$$4\pi r^2 \mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial}{\partial r}[4\pi r^2 \frac{\partial T}{\partial r}],$$

où $4\pi r^2 \mu dr$ est la masse de l'eau entre les 2 sphères et c la capacité calorifique massique de l'eau. Comme on suppose que c est nulle, on obtient:

$$\frac{\partial}{\partial r}[r^2 \frac{\partial T}{\partial r}] = 0.$$

C'est également $\Delta T = 0$ avec le Laplacien donné dans l'énoncé (si on utilise ce résultat comme un point du cours). On en déduit que $T(r,t)$ est de la forme $-A(t)/r + B(t)$. Lorsque r est très grand devant le rayon $R(t)$ du glaçon, l'eau est à sa température en l'absence du glaçon, $T_0 = 10^o$ C et lorsque $r = R(t)$, la température est celle du glaçon, donc $T_f = 0^o$ C (273 K). On obtient donc:

$$T(r,t) = (T_f - T_0)\frac{R(t)}{r} + T_0.$$

De plus, comme indiqué dans l'introduction, au niveau du glaçon, la quantité de chaleur fournie par l'eau: $4\pi R(t)^2|j(\vec{R(t)}, t|dt$ sert à faire fondre une petite masse dm de glace, soit:

$$\delta Q = 4\pi R(t)^2|j(\vec{R(t)}, t|dt = 4\pi\lambda(T_0 - T_f)R(t)dt = dmL_f.$$

Avec: $m = \frac{4}{3}\pi R(t)^3\rho$, soit $dm = -4\pi R(t)^2 dR\rho$. Attention: il faut mettre un signe $-$ car $dm > 0$ (le glaçon perd une masse $dm > 0$ en recevant la quantité de chaleur $\delta Q > 0$) mais $dR < 0$. On regroupe:

$$\frac{\lambda(T_0 - T_f)}{\rho L_f} = -R(t)\frac{dR}{dt}.$$

Soit:

$$R(t)^2 = R_0^2 - \frac{2\lambda(T_0 - T_f)}{\rho L_f}t.$$

Ce qui est l'expression cherchée pour $R(t)$. Le temps pour que le glaçon fonde totalement est alors:

$$T = R_0^2\ \frac{\rho L_f}{2\lambda(T_0 - T_f)}.$$

L'application numérique donne une durée de 42 minutes.

Exercice 18 : expérience de J. Perrin

On considère une atmosphère isotherme à la température T, composée de N particules de masses m dans un volume $V = LS$ (colonne de surface S de hauteur L). Les particules sont sans interaction et soumises uniquement à l'action du champ de gravité supposé uniforme.

1) Déterminer la densité de particules $n(z)$ à l'altitude z.

Maintenant, on considère que l'atmosphère est constituée de petites gouttes de rayon $r = 0.212\mu$m de masse volumique $\rho = 1.194$ g/cm^3 dans de l'eau de masse volumique $\rho = 1.003$ g/cm^3. On prend également $T = 293$ K. Alors, dans une colonne d'atmosphère de petite surface, Jean Perrin a compté 100 gouttes à l'altitude nulle puis 17 gouttes à l'altitude $z = 90\mu$m.

2) Avec ces données, déterminer la constante d'Avogadro.

Eléments de correction

C'est un exercice proche du cours.

1) Question de cours. On trouve:

$$n(z) = \frac{mg}{Sk_BT} e^{-mgz/(k_BT)}.$$

2) Avec les données de l'énoncés, on trouve facilement:

$$\mathcal{N} \simeq 10^{24}.$$

Ce qui est une valeur tout à fait raisonnable.

Exercice 19 : une masse sur une corde

On considère une corde horizontale très longue de masse linéique μ tendue avec une tension T. une masse m est attaché en un point de la corde. Une vibration sous la forme d'une onde plane progressive de pulsation ω se propage le long de la corde en provenance de la partie gauche (dans le sens gauche-droite).

1) Déterminer la fraction de l'énergie incidente de l'onde qui est réfléchie par la masse m.

On remplace que la masse m par un ressort de masse linéique $\mu_m >> \mu$ et de longueur $l = m/\mu_m$ (le ressort a une masse m).

2) A quelle condition sur l le résultat de la question 1) est valide dans cette configuration?

Eléments de solution

C'est un exercice classique mais dans lequel il faut faire attention aux définitions des coefficients de réflexion en amplitude ou en énergie. On note (x) l'axe de la corde et on considère que la masse m est située en $x = 0$. Les vibrations de la corde se feront donc suivant l'axe

(y). Dans la partie $x < 0$ de la corde il y a l'onde incidente qui se propage de la gauche vers la droite mais aussi l'onde réfléchie du fait de la masse m. L'amplitude de la vibration de la corde s'écrit donc:

$$y(x < 0, t) = (e^{ikx} + Ae^{-ikx})e^{-i\omega t}. \tag{1}$$

Avec A (a priori complexe) le coefficient de réflexion en amplitude. De plus $k = \omega/v$ avec $v = \sqrt{T/\mu}$. Aussi, dans la partie $x > 0$, il y a l'onde transmise avec le coefficient de transmission en amplitude B (complexe):

$$y(x > 0, t) = Be^{ikx}e^{-i\omega t}. \tag{2}$$

Il doit y avoir continuité de la fonction $y(x, t)$ en $x = 0$, donc $1 + A = B$. Comme autre relation entre A et B, il faut écrire l'équation du mouvement d'un petit morceau de corde qui entoure m. Cela donne:

$$m\ddot{y}|_{x=0} = (T\frac{\partial y}{\partial x}|_{x=0^+} - T\frac{\partial y}{\partial x}|_{x=0^-})e^{-i\omega t}. \tag{3}$$

Au final, en utilisant les relations (1), (2) et (3), on obtient la fraction de l'énergie incidente réfléchie (soit $|A|^2$):

$$|A|^2 = |\frac{m^2\omega^4}{4k^2T^2 + m^2\omega^4}|^2.$$

2) Le résultat de la question 1) est évidemment valide tant que $l << \lambda = 2\pi/k$.

Exercice 20 : 2 masses sur une table

Une masse m_1 se déplace sans frottement sur une table horizontale. Dans la table, il y a un trou. La masse m_1 est attachée à une corde de longueur L qui passe par le trou. A l'autre extrémité de la corde est suspendue une masse m_2. On néglige la masse de la corde.

1) Montrer qu'un mouvement circulaire est possible pour m_1. Etudier les petites déviations autour de ce mouvement.

2) Discuter ce qui va changer lorsque l'on considère que la corde a une masse linéique uniforme μ. En déduire l'équation qui donne le rayon de la trajectoire circulaire de m_1 dans ces conditions.

Eléments de solution

1) On repère la position de m_1 en coordonnées polaires, de centre O (au niveau du trou). On note T_1 la tension de la corde qui s'exerce sur m_1. On écrit les équations du mouvement pour la masse m_1:

$$m_1(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -T_1$$

$$m_1 r^2 \dot{\theta} = cte = m_1 h.$$

Pour la masse m_2, qui ne peut se déplacer que verticalement, on note T_2 la tension de la corde au niveau de m_2:

$$m_2 \frac{d^2(L-r)}{dt^2} = -m_2\ddot{r} = -T_2 + m_2 g.$$

Soit (avec $T_1 = T_2$):

$$(m_1 + m_2)\ddot{r} - m_1 \frac{h^2}{r^3} + m_2 g = 0. \qquad (1)$$

Les trajectoires circulaires de rayon r_0 sont telles que: $\ddot{r} = 0$, soit: $r_0^3 = m_1 h^2/(m_2 g)$.

Pour étudier les petites déviations par rapport à $r = r_0$, on écrit: $r = r_0 + \delta$ et on cherche l'équation vérifiée par δ. On trouve:

$$\ddot{\delta} + \frac{3m_1 h^2}{(m_1+m_2)r_0^4}\delta = 0.$$

Ce qui donne des oscillations radiales de pulsation: $\omega^2 = \frac{3m_1h^2}{(m_1+m_2)r_0^4} = \frac{3m_2g}{(m_1+m_2)r_0}$.

2) La 1ère question est proche du cours, celle-ci ne l'est pas. Lorsque la corde a une masse linéique non nulle, on peut toujours écrire des équations du mouvement pour m_1 et m_2 comme dans la question 1) mais alors, la tension de la corde au niveau de m_1 (T_1) n'est plus égale à la tension de la corde au niveau de m_2 (T_2). C'est ce qui rend le problème plus compliqué. On peut comprendre qualitativement comment la tension change le long de la corde. Pour la partie horizontale, lorsque la corde tourne, pour chaque petit morceau de corde dx à la cote x (radiale), il y a une force centrifuge qui s'exerce et donc la tension $T^{\parallel}$ le long de la partie horizontale doit équilibrer cet effet:

$$\Delta T^{\parallel} + \mu dx\, \omega^2 x = 0.$$

C'est pourquoi la tension $T^{\parallel}$ au niveau du trou n'est pas celle au niveau de m_1 (lorsque la corde tourne). Ensuite, entre le trou et m_2, c'est évidemment le poids de la corde qui doit intervenir dans le calcul de la tension le long de (y), soit $T^{\perp}$. Pour un morceau vertical dy de la corde, on peut écrire:

$$\Delta T^{\perp} + \mu dy\ g = 0.$$

Ensuite, il reste à relier $T^{\parallel}$ et $T^{\perp}$ au niveau du trou. On va se placer uniquement dans le cas où m_1 a un mouvement circulaire et donc le morceau de corde au niveau du trou va tourner autour du trou si le trou a un petit rayon. Ceci étant, si on considère le trou comme un petit arc de cercle au niveau de son contact avec la corde, alors la vitesse tangentielle du petit morceau de corde au niveau de ce contact est nulle (lorsque m_1 suit un mouvement circulaire). Ce qui revient à dire qu'il n'y a pas de mouvement dans la direction de m_1 ou m_2 du petit morceau de corde. Ce qui permet d'écrire que $T^{\parallel}$ et $T^{\perp}$ sont égaux en module au niveau du trou (loi du moment cinétique pour le petit morceau de corde au niveau du trou).

Au final (en regroupant tout), lorsque m_1 a un mouvement circulaire de rayon r'_0, on trouve:

$$T_2 = T_1 + \mu\omega^2 r_0'^2/2 - \mu g(L - r'_0).$$

Avec $\omega^2 = h^2/r_0'^4$. Alors, en suivant la méthode de la question 1), r'_0 est déterminé par la relation qui donne r'_0:

$$m_2 g + \mu g(L - r'_0) - \frac{\mu h^2}{2r_0'^2} - \frac{m_1 h^2}{r_0'^3} = 0.$$

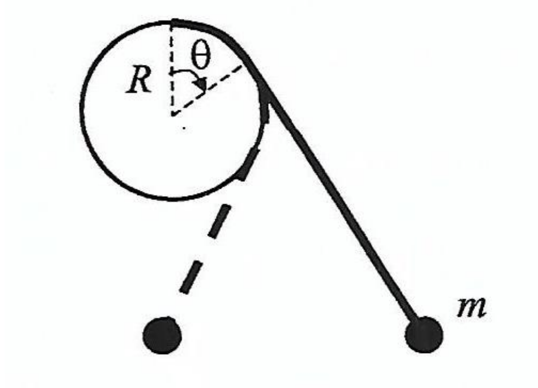
Ce qui conclut.

Une autre idée qui est naturelle est de se dire dès le début de la question que l'on va se débarasser des tensions dans les équations. La seule possibilité est alors de considérer le système 'les 2 masses+corde' et les tensions sont alors des forces intérieures qui ne vont donc pas intervenir dans les équations du mouvement. C'est clairement une approche plus élégante mais qui est un peu à la limite du programme.

Exercice 21 : pendule

On considère un pendule constitué d'une masse m attachée à un fil de longueur l et sans masse. L'autre extrémité du fil est fixée au point haut d'un disque vertical (immobile) de rayon R (tel que $\pi R < l$). Voir figure.

Trouver la position d'équilibre de la masse m et la fréquence des petites oscillations de ce pendule autour de cette position d'équilibre.



Eléments de solution

C'est un exercice proche du cours. Il faut juste faire un peu attention en posant le problème.

On va chercher l'énergie mécanique de la masse m, puis son équation du mouvement... On introduit l'origine des coordonnées comme étant le point haut du disque vertical, là où est attaché le fil. L'axe (Ox) est alors l'axe horizontal et (Oy) l'axe vertical. Dans ce repère, la position de la masse m s'écrit:
$x = R\sin\theta + (l - R\theta)\cos\theta$ et $y = -R(1-\cos\theta) - (l - R\theta)\sin\theta$.
L'énergie mécanique de la masse m est donc:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy.$$

Avec les expressions de x et y plus haut. On en déduit donc immédiatement E en fonction θ, $\dot{\theta}$ et des paramètres de l'exercice. On écrit alors que l'énergie mécanique est constante (dans le temps), soit $\dot{E} = 0$ et on obtient ainsi l'équation du mouvement de m:

$$(l - R\theta)\ddot{\theta} - R\dot{\theta}^2 - g\cos\theta = 0.$$

A l'équilibre: $\dot{\theta} = 0$ et $\ddot{\theta} = 0$, donc $\theta = \theta_0 = \pi/2$. Autour de cette position d'équilibre: $\theta = \theta_0 + \epsilon$, on obtient:

$$\ddot{\epsilon} + \frac{g}{l - R\pi/2}\epsilon = 0.$$

D'où: $\omega^2 = \frac{g}{l-R\pi/2}$.

Exercice 22 : satellite en orbite

Un satellite de masse m est lancé d'un point M_0 à la distance r_0 du centre O de la terre (de masse M), avec la vitesse V. On note V_0 la vitesse de satellisation en orbite circulaire de rayon r_0.

1) Si la vitesse $\vec{V}$ est orthogonale à $O\vec{M}_0$, déterminer les caractéristiques de l'orbite dans l'hypothèse où il y a satellisation. Dans quel domaine faut-il choisir le rapport V/V_0 pour qu'il en soit ainsi?

En supposant que la trajectoire du satellite est une ellipse de demi-grand axe a, on admet que l'excentricité e de cette ellipse est donnée par la relation: $a(1 - e^2) = \frac{L^2}{GMm^2}$, où L est le moment cinétique du satellite.

2) Déterminer e dans les conditions de la question 1).

Eléments de solution

1) Il faut écrire la condition physique pour une orbite circulaire avec les paramètres de l'énoncé, soit: $mV_0^2/r_0 = GMm/r_0^2$, ce qui va fournir GM en fonction des paramètres de l'orbite circulaire. Ensuite, on écrit l'énergie mécanique du satellite (de masse m) lorsqu'il est lancé avec la vitesse V et à l'altitude r_0:

$$E_m = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{GMm}{r_0} \ .$$

La condition de satellisation est que cette énergie mécanique doit être négative (trajectoire fermée et elliptique ou circulaire). On obtient: $V < \sqrt{2}V_0$.

2) Le demi-grand axe de l'ellipse (orbite du satellite) est lié à E_m de la question 1) par la relation connue: $E_m = -\frac{GMm}{2a}$. De plus, comme indiqué dans l'énoncé, le demi-grand axe de l'ellipse (a) est lié au moment cinétique. C'est ici qu'intervient la condition: $\vec{V}$ est orthogonale à $O\vec{M}_0$. En effet, sous cette hypothèse, le moment cinétique du satellite s'écrit simplement comme: $L = mr_0V$. On en déduit un première relation: $a(1-e^2) = \frac{r_0^2V^2}{GM}$. Puis, à l'aide de la question 1), une seconde: $V^2 - 2V_0^2 = -\frac{r_0V_0^2}{a}$. Après calculs, on trouve en combinant les deux:

$$e = |1 - \frac{V^2}{V_0^2}| \ ,$$

qui est bien plus petit que 1 comme il se doit.

Exercice 23 : 3 pendules

Trois pendules, tous de longueur l sont arrangés de manière symétrique. Au bout du pendule du centre est placée une masse $2m$ et au bout de chaque pendule des bords est fixée une masse m. De plus, ces masses sont reliées par 2 ressorts idéaux de constante de raideur k.

1) Etablir les équations du mouvement à l'approximation des petits déplacements.

2) A quelles conditions les trois pendules oscillent-ils à la même fréquence? Commenter. Que se passe-t-il si on remplace la masse $2m$ par une masse M et que l'on prenne $M >> m$?

Eléments de solution

1) On note x_1, x_2 et x_3 les déplacements des masses (x_2 celui de la masse centrale $2m$). Sans les ressorts, on peut par exemple écrire: $m\ddot{x}_1 = -m\omega_0^2 x_1$. Avec les ressorts, cette équation devient:

$$m\ddot{x}_1 = -m\omega_0^2 x_1 - k(x_1 - x_2) \ .$$

Puis: $2m\ddot{x}_2 = -2m\omega_0^2 x_2 - k(x_2 - x_1) - k(x_2 - x_3)$ et $m\ddot{x}_3 = -m\omega_0^2 x_3 - k(x_3 - x_2)$.

2) On cherche des solutions ayant même fréquence, soit en notations complexes: $x_1 = Ae^{i\omega t}$, $x_2 = Be^{i\omega t}$ et $x_3 = Ce^{i\omega t}$. Après calculs, on obtient trois cas possibles:

(a) $\omega^2 = g/l$ avec $A = B = C$,

(b) $\omega^2 = g/l + k/m$ avec $A = -C$ et $B = 0$,

(c) $\omega^2 = g/l + 2k/m$ avec $A = C$ et $B = -C$.

En particulier, on comprend que si $A = B = C$, les ressorts ne sont pas tendus donc ω est minimale. Si on emplace $2m$ par M, et que l'on prend $M >> m$, on n'obtient plus que deux fréquences propres, les deux premières ci-dessus.

Exercice 24 : membrane vibrante

On considère une membrane vibrante circulaire de rayon R dans le plan Oxy. On note T la tension superficielle de la membrane. C'est-à-dire que pour un élément de longueur dy (suivant Oy) la force de tension suivant Ox est: $T dy \cos(\alpha(x))$, où $\alpha(x)$ est l'angle suivant Ox. Même principe pour la force de tension suivant Oy. On note σ sa masse surfacique. On suppose que la membrane est plane (d'équation $z = 0$) au repos et qu'une perturbation $z(x, y, t)$ se propage.

1) Déterminer l'équation vérifiée par $z(x, y, t)$ en se limitant au premier ordre pour toutes les déviations par rapport à la position de repos de la membrane. On négligera l'effet de la *pesanteur.*

2) On cherchera une solution stationnaire, en utilisant les coordonnées polaires, sous la forme: $r(r,\theta,t) = F(r)G(\theta)H(t)$. De plus, la membrane étant circulaire, on prendra $G(\theta)$ périodique. Etablir les équations pour les composantes radiale et angulaire de z (donc les équations pour F et G). En coordonnées polaires, on rappelle: $\Delta z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial z}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial z}{\partial \theta^2}$. Représenter les noeuds de la composante angulaire sur la membrane sphérique pour les deux premiers modes.

Eléments de solution

1) La solution est une généralisation du calcul pour une corde vibrante (que l'on suppose connu). Dans la limite des petits angles, on trouve que pour un morceau de membrane de dimensions (dx, dy), dF_x, dF_y sont négligeables et:

$$dF_z = \left(T\frac{\partial}{\partial x}\sin(\alpha(x)) + T\frac{\partial}{\partial y}\sin(\beta(y))\right)dxdy \ ,$$

avec $\alpha \simeq \frac{\partial z}{\partial x}$ et $\beta \simeq \frac{\partial z}{\partial y}$. Ce qui permet de simplifier un peu plus l'expression de dF_z. Ensuite, on écrit l'équation du mouvement:

$$dF_z = \sigma dxdy\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \ .$$

Soit:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{T}{\sigma}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) \ .$$

2) L'équation de la question 1) peut s'écrire également:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2\Delta z \ .$$

On va chercher une solution stationnaire sous la forme indiquée dans l'énoncé. On trouve alors que:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{H}}{H} = \frac{F''}{F} + \frac{1}{r}\frac{F'}{F} + \frac{1}{r^2}\frac{G''}{G} = K,$$

avec les dérivées de F par rapport à r et de G par rapport à θ. De plus, K est une constante qui doit être négative pour éviter une fonction du temps ($H(t)$) divergente. On peut donc écrire plus clairement: $K = -\omega^2$. On obtient alors une équation aux dérivées partielles qui associe F et G. En utilisant le fait que l'on prend $G(\theta)$ périodique, alors $\frac{G''}{G} = -m^2$, où m est un entier naturel. On obtient alors les équations pour G puis F. On représente ensuite facilement les noeuds de $G(\theta)$ pour $m = 1$ et 2.

Exercice 25 : particule dans un cône

Une particule de masse m se déplace sans frottement sur la surface intérieure d'un cône de demi-angle au sommet α et d'axe de révolution vertical.

Trouver à quelles conditions la particule se déplace sur une orbite circulaire autour de l'axe de révolution du cône. Discuter la stabilité de ce mouvement.

Eléments de solution

C'est un exercice relativement simple, mais il ne faut pas se perdre dans les calculs. En repérant un point sur le cône avec des coordonnées sphériques (de centre le sommet du cône), les équations du mouvement donnent directement la relation nécessaire pour que la trajectoire de la particule soit circulaire:

$$r\dot{\phi}^2 \sin^2 \alpha = g \cos \alpha.$$

Avec $v = r\dot{\phi} \sin \alpha$ qui est la vitesse de la particule tangentielle à sa trajectoire. Donc, si la condition initiale $r_0\dot{\phi}_0^2 \sin^2 \alpha = g \cos \alpha$ est vérifiée, la trajectoire est circulaire. Pour étudier la stabilité de cette trajectoire, on étudie les petites variations par rapport au mouvement circulaire. On sait également que le moment cinétique suivant (z) est constant car il n'y a pas de force tangentielle s'exerçant sur m. Cela permet de simplifier les calculs. On trouve:

$$\delta\ddot{r} + (3\dot{\phi}_0^2 \sin^2 \alpha)\delta r = 0.$$

Et donc l'orbite de la particule est stable, ce qui conclut.

Exercice 26 : palets cylindriques flottant sur l'eau

On plonge 2 palets cylindriques identiques dans un grand récipient d'eau (surface horizontale S). Chaque palet a une masse m, un rayon R et une hauteur $h < R$ et sa masse volumique ρ_1 est plus petite que celle de l'eau (notée ρ_0).

1) Pourquoi les palets sont-ils à plat à l'équilibre?

2) On étudie les petits écarts à l'équilibre. Quelles sont les oscillations harmoniques possibles?

Eléments de solution

1) Question de cours: poussée d'Archimède avec $\rho_0 > \rho_1$.

2) On cherche à écrire les équations du mouvement pour chacun des palets. Il faut bien définir les variables utiles. On note x_1 la petite variation de hauteur du palet 1 par rapport à sa position d'équilibre. De même x_2 pour le palet 2. Alors x représente la variation du niveau de l'eau par rapport à la position d'équilibre. En faisant attention à la configuration géométrique du système, on obtient alors facilement, en supposant que la surface de l'eau reste plane (pas de vague):

$$m\dot{x}_1 = -\rho_0(x_1 - x)\pi R^2 g.$$

$$m\dot{x}_2 = -\rho_0(x_2 - x)\pi R^2 g$$

Avec:

$$x(S - 2\pi R^2) = -\pi R^2(x_1 + x_2).$$

On peut alors résoudre sans difficulté. On introduit (avec $s = \pi R^2$): $\omega_1^2 = \frac{\rho_0 g}{m}\frac{s(S-s)}{S-2s}$ et $\omega_2^2 = \frac{\rho_0 g}{m}\frac{s^2}{S-2s}$. Alors $x_1 + x_2$ obéit à une équation d'oscillateur harmonique de pulsation Ω_+ et $x_1 - x_2$ de pulsation Ω_- avec:

$$\Omega_+^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2.$$

$$\Omega_-^2 = \omega_1^2 - \omega_2^2.$$

Cela veut dire que physiquement on peut avoir une solution $x_1 = x_2$ qui oscille à la pulsation Ω_+ (rapide) ou ne solution $x_1 = -x_2$ qui oscille à la pulsation Ω_- (lent), plus lent car dans ce cas la surface de l'eau reste fixe par rapport à sa position d'équilibre. Ce qui conclut.

Exercice 27 : étoile, trou noir

Une étoile de rayon $R = 10^{11}$ cm et de masse $M = 10^{33}$ g se déplace sur une orbite parabolique (énergie mécanique nulle) autour d'un trou noir de masse $M_0 = 10^{40}$ g. Le moment angulaire par unité de masse de l'étoile sur cette trajectoire est $L = 10^{23}$ cm^2/s. On suppose que le potentiel gravitationnel du trou noir est de la forme:

$$V(r) = -\frac{GM_0}{r - R_0}.$$

pour $r > R_0$ et $-\infty$ sinon.

Exprimer R_0 sachant que la surface du trou noir correspond à une vitesse de libération de c. L'orbite présente-t-elle un point de rayon minimal? Est-ce que l'étoile peut rester intacte lors de cette trajectoire?

Eléments de solution

Déjà, $R_0 = 2GM_0/c^2$. En écrivant l'équation de la trajectoire, soit énergie mécanique nulle, on trouve immédiatement le point de rebroussement de l'orbite $\dot{r} = 0$, soit:

$$r_{min} = \frac{2R_0}{1 - \sqrt{1 - 4c^2R_0^2/L^2}} \simeq 3.5R_0.$$

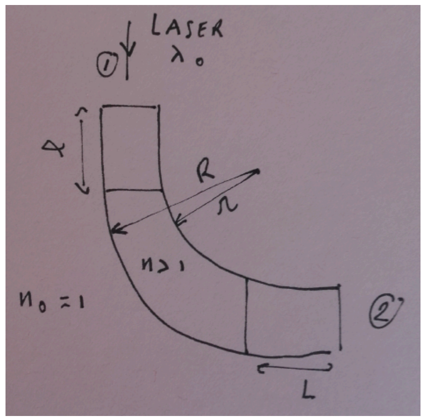
L'étoile va être détruite par les effets de marée. En effet, on peut montrer que l'accélération de marée est de la forme:

$$a = \frac{2GM_0R}{(r - R_0)^3}.$$

Et un élément de la surface de l'étoile va être soumis à cette accélération pendant un temps approximatif de r_{min}/v, où v est la vitesse de l'étoile au point de rebroussement. On trouve alors que la vitesse qu'un élément de la surface de l'étoile va acquérir du fait des forces de marée est très supérieure à la vitesse de libération de cet élément dans l'étoile. Donc l'étoile va se détruire progressivement.

Exercice 28 : fibre optique coudée

On considère une fibre optique coudée. Voir figure. On éclaire en incidence normale l'entrée de cette fibre par une OPPM d'un laser.



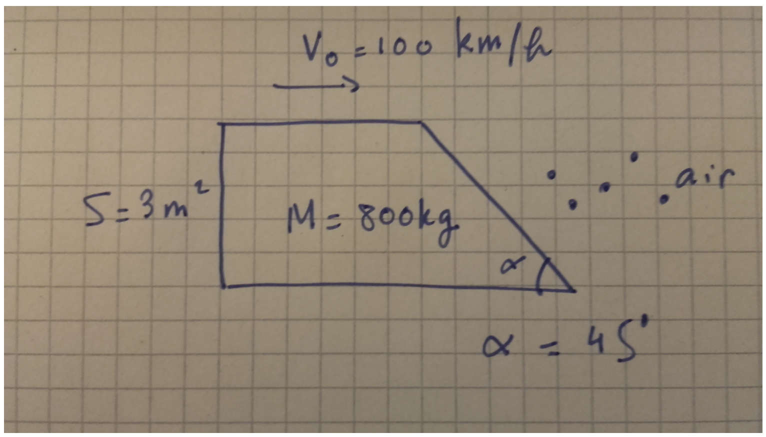
Déterminer les conditions sur R, r, L et l pour qu'on ait la même intensité en sortie (2) qu'en entrée (1).

Eléments de solution

Evidemment, la réponse ne dépend ni de L ni de l. Si on considère le rayon lumineux qui passe par le bord intérieur de la fibre (en incidence normale par le haut). C'est le rayon qui va potentiellement se réfléchir sur le bord de plus grand rayon avec l'angle de réflexion le plus petit. Alors, il y a réflexion totale à la condition que $n \geq R/r$. Il y aura donc réflexion totale pour les autres rayons qui arrivent par le haut dans la fibre, toujours en incidence normale. Cette condition est donc une condition nécessaire pour qu'en sortie, l'intensité soit la même qu'en entrée. Pour s'assurer que cette condition est bien suffisante, il faut montrer que pour tous les rayons, dont certains pourraient subir de multiples réflexions consécutives dans la fibre coudée, il y a toujours réflexion totale. Un peu de géométrie du triangle montre que c'est le cas. Ce qui conclut.

Exercice 29 : consommation minimale d'essence

On cherche à déterminer la consommation minimale d'essence d'une voiture en supposant que les pertes internes d'énergie et les frottements au sol sont négligeables, par rapport à l'effet de la présence de l'air. On suppose que les chocs des molécules d'air sur la face avant du véhicule (qui présente un angle α avec la direction de l'air) sont élastiques (énergie totale conservée avant et après le choc). Voir figure.



Quel est dans ce modèle la consommation minimale d'essence pour maintenir la vitesse V_0?

On donne le pouvoir calorifique de l'essence: $C = 36$ MJ/l.

Eléments de solution

L'exercice ne présente pas de difficulté. C'est un exercice sur les chocs élastiques, définition rappelée dans l'énoncé. On peut par exemple raisonner dans le référentiel R' où la voiture a une vitesse nulle. R' est donc en translation uniforme à la vitesse V_0 par rapport au référentiel terrestre. C'est donc un référentiel inertiel. Dans R', on peut donc écrire la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie (voiture+une molécule d'air) avant et après un choc. On obtient alors la puissance nécessaire pour maintenir V_0 constante:

$$P = mV_0^2/\Delta t.$$

Avec Δt le temps moyen entre 2 chocs. Il s'exprime facilement comme:

$$\Delta t = \frac{k_B T}{S V_0 P_0 T}.$$

On en déduit donc la puissance puis le débit d'essence P/C. On trouve 7.2 L / 100 km.

Exercice 30 : haltère et masses

Une tige de longueur $L = 50$ cm avec 2 masses $m = 2$ kg fixées à ses extrémités est initialement fixe (en équilibre) et horizontale. Elle peut tourner autour de son centre sans frottement. Une masse $M = 50$ g tombe verticalement avec la vitesse $V_0 = 3$ m/s sur l'une des masses m. Elle va alors rester collée à cette masse m (l'impulsion totale et le moment cinétique total sont conservés mais l'énergie ne l'est pas juste avant et juste après le choc). Alors la tige va commencer à tourner.

Est-ce que la tige peut tourner toujours dans le même sens ou bien se mettre à tourner dans le sens opposé à un moment donné?

Eléments de solution

On a conservation du moment cinétique avant et après le choc, ce qui donne immédiatement la vitesse angulaire de la tige après le choc $\omega_1 = \frac{M}{M+2m} 2V_0/L$. Soit $\omega_1 = 0.148$ rad/s. Ensuite, la tige se met à tourner. Dans ce mouvement, l'énergie est conservée. Il y aura arrêt du mouvement lorsque le système $m + M$ sera de vitesse nulle. On trouve alors la hauteur h à laquelle va remonter le système $m + M$:

$$\frac{(M + 2m)(L/2)^2}{2} \omega_1^2 = Mgh.$$

Ce qui correspond à une rotation de 181.3 degrés de la tige autour de son centre.

Exercice 31 : particules massives en interaction

On considère 3 particules ponctuelles de masses m_1, m_2 et m_3 qui interagissent entre elles uniquement via la force gravitationnelle.

Trouver comment évolue ce système lorsque la distance entre chaque paire de particules est constante et la même pour chaque paire.

Eléments de solution

C'est un exercice proche du cours. On comprend que le mouvement ne peut être qu'un mouvement de rotation global du système autour de son centre de gravité et la vitesse angulaire de rotation doit être de la forme:

$$\omega = \sqrt{G(m_1 + m_2 + m_3)/d^3}.$$

On peut trouver ce résultat avec les équations du mouvement. Il y a plusieurs méthodes possibles. Le plus simple est d'écrire le PFD pour une masse puis utiliser la définition du centre de gravité pour exprimer astucieusement la force gravitationnelle qui s'exerce sur cette masse. On aboutit directement au résultat ci-dessus.

Exercice 32 : nuages

On suppose que les variations de température dans l'atmosphère sont de la forme $T_0 e^{-z/k_T}$ avec $T_0 = 300$ K.

1) Etablir le profil de pression en supposant que des volumes d'air peuvent monter ou descendre doucement de manière adiabatique en gardant le même profil de température. Estimer k_T.

On suppose que la limite L+V/V (diagramme de Clapeyron) correspond à $P_{eau} = A/V_m$, V_m volume molaire de l'eau et $A = 22.4$ Pa.m^3/mol. L'air contient 1% de vapeur d'eau à $z = 0$ (soit 1% des molécules sont des molécules d'eau).

2) Montrer que sous l'effet des mouvements verticaux, des nuages peuvent se former à une altitude que l'on calculera.

Eléments de solution

1) Avec la loi de Laplace, on trouve la dépendance pour $P(z)$:

$$P(z) = P_0 e^{-z/k_P}.$$

Avec:

$$k_P = \frac{\gamma - 1}{\gamma} k_T \simeq \frac{RT_0}{M_{air} g}.$$

On en déduit $k_T \sim 30$ km.

2) Un nuage peut se former lorsque l'altitude varie à la condition que l'on se trouve à la limite de formation: $P_{eau} = A/V_m$. Soit:

$$P_{eau} = \alpha(1\%) \frac{RT(z)}{V_m}.$$

Ce qui donne:

$$z_{nuage} = k_T \ln(\alpha RT_0/A) \simeq 3200\ m.$$

Pour aller plus loin, on peut se demander ce qui se passe si $z > z_{nuage}$. Alors on peut montrer qu'un petit volume d'air se met à monter de plus en plus vite. Cette question est un peu plus difficile mais repose sur les bases discutées lors des questions 1) et 2).

Exercice 33 : mouvement d'une étoile autour d'un trou noir

On admet que le potentiel gravitationnel d'un trou noir de masse M peut être écrit approximativement (en mécanique classique) comme: $V(r) = -GM/(r - a)$ où a est un rayon caractéristique du trou noir, pour $r >> a$. On étudie le mouvement quasi-circulaire d'une étoile de masse m autour de ce trou noir dans cette hypothèse ($r >> a$).

Montrer qu'il existe alors (en plus du mouvement circulaire) un oscillation radiale de l'orbite de l'étoile et que la trajectoire de l'orbite n'est pas fermée.

Eléments de solution

C'est un exercice proche du cours sur les forces centrales. Avec la condition $r >> a$, on peut écrire:

$$V(r) \simeq -\frac{GM}{r} - \frac{GMa}{r^2}.$$

Si on note L le moment cinétique de l'étoile dans son mouvement autour du trou noir, le rayon de la trajectoire circulaire correspondante est alors:

$$r_0 = 2\left(\frac{L^2}{2GMm^2} - a\right).$$

De plus, en posant $\delta r = r - r_0$, on obtient facilement l'équation pour δr:

$$\delta\ddot{r} + \omega^2 \delta r = 0.$$

Avec $\omega^2 = V''_{eff}(r_0)/m = \frac{GMm}{r_0^3}/m$. Pour comprendre la trajectoire de l'étoile, il faut se demander si l'oscillation radiale est synchrone avec le mouvement circulaire. La pulsation du mouvement circulaire est $\omega_0 = L/(mr_0^2)$ qui n'est pas égale à ω donc il n'y a pas synchronisation des 2 mouvements. En particulier, pendant une période d'oscillation radiale $T_r = 2\pi/\omega$ l'étoile tourne de $\Theta = \omega_0 T_r$ que l'on peut calculer facilement avec les relations précédentes. On voir en particulier que $\Theta > 2\pi$ donc l'étoile fait plus qu'un tour et la trajectoire n'est pas fermée.

Exercice 34 : wagon

Un wagon de hauteur h et de longueur L se déplace à une vitesse V_0 constante. Les défauts des rails font osciller ce wagon d'avant en arrière.

Etudier quelles sont les fréquences d'oscillations possibles.

Eléments de solution

On peut écrire facilement l'énergie mécanique du wagon. En notant θ l'angle de rotation du wagon entre la verticale et l'axe perpendiculaire au wagon et passant par son centre de gravité, on obtient:

$$E = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{mg}{2}(L|\sin\theta| + h|\cos\theta|)$$

Avec J le moment d'inertie autour de son axe. Cela donne une équation pour les petites valeurs de θ, soit:

$$\dot{\theta}^2 + \omega^2|\theta| = A.$$

Ce n'est pas une équation d'oscillateur harmonique. Toute valeur de fréquence est possible et il n'y a pas de résonance.

Exercice 35 : vibrations d'un réseau

On considère une réseau 2D de maille a qui contient des atomes identiques de masse m. On note C la force de rappel entre 2 atomes voisins contraints de se déplacer perpendiculairement au plan du réseau.

1) Déterminer la relation de dispersion pour ce problème.

2) Tracer des courbes iso-fréquence.

Eléments de solution

1) C'est un exercice proche du cours. On écrit l'équation du mouvement pour l'atome situé en (n, m) dans le réseau. Ensuite, on cherche des solutions sous la forme d'ondes planes (avec l'axe (z) perpendiculaire au plan du réseau):

$$z = \exp(i(nak_x + mak_y - \omega t)).$$

Alors, après calculs, on en déduit la relation de dispersion:

$$\omega^2 = 2\frac{C}{m}(\sin^2(\frac{ak_x}{2}) + \sin^2(\frac{ak_y}{2})).$$

2) On en déduit les courbes $\omega(k_x, k_y) = c$. En particulier, si $ak_x << 1$ et $ak_y << 1$, on obtient des cercles.

Exercice 36 : pendule de Huygens

On considère une masse ponctuelle m qui se déplace sans frottement sur une cycloide inversée telle que: $x = R(\theta - \sin\theta$ et $y = R(\cos\theta - 1)$. On abandonne m sans vitesse initiale à $\theta = \theta_0$.

Etudier son mouvement.

Eléments de solution

C'est un exercice proche du cours. On écrit l'énergie mécanique de m en l'absence de frottement. En particulier, comme m est contrainte de se déplacer le long de la cycloide, on peut facilement exprimer sa vitesse donc son énergie cinétique:

$$E_c = 2mR^2\dot{\theta}^2\sin^2(\theta/2).$$

L'énergie potentielle s'écrit:

$$E_p = -mgR\sin^2(\theta/2).$$

Alors, l'énergie mécanique étant conservée, on arrive facilement à une expression pour $\dot{\theta}$ en fonction de θ et donc à la période du mouvement d'oscillations. On trouve:

$$T = 4\pi\sqrt{R/g}.$$

Cette expression est indépendante de θ_0. Ce qui conclut.

Exercice 37 : piste et demi-cercle

Une particule ponctuelle de masse m est abandonnée sans vitesse initiale d'une hauteur h sur une piste inclinée qui se termine par un demi-cercle de rayon R.

A quelle condition m va atteindre l'extrémité haute du demi-cercle?

Eléments de solution

Si on note A l'extrémité haute du demi-cercle, alors, il est clair que m va atteindre A si $v_A^2/R \geq g$, où v_A est la vitesse de m en A. Ensuite, en écrivant que l'énergie mécanique de m est constante entre sa position initiale en h et en A, on peut exprimer v_A. On obtient alors la condition demandée:

$$h \geq 5R/2.$$

Ce qui conclut.

Exercice 38 : Transformations dans une enceinte coupée en deux

Un gaz est enfermé dans une enceinte. On dispose une paroi coulissante exactement au milieu de l'enceinte. On réalise une transformation réversible qui ne change pas la température, et permet d'atteindre une pression dans le compartiment de gauche égale au double de celle dans le compartiment de droite.

1) Quel travail un opérateur extérieur doit-il fournir pour réaliser la transformation ?

On isole alors thermiquement toutes les parois. On procède à une nouvelle transformation réversible jusqu'à atteindre l'équilibre mécanique.

2) Quel travail un opérateur extérieur doit-il fournir pour réaliser la transformation ?

Eléments de solution

1) La transformation est isotherme, soit $T_1 = T_2 = T$, puis $V_1 = V_2/2 = V_{tot}/3$. On trouve alors que le travail total de l'opérateur:

$$W_{tot} = W_1 + W_2 = nRT \ln(9/8) > 0.$$

2) Les deux gaz dans chaque compartiment subissent des transformations isentropiques. Une fois la transformation finie, on note les valeurs obtenues P_1', V_1', T_1' etc. En suivant l'énoncé

$P_1' = P_2'$, soit:

$$P_1 \left(\frac{V_1}{V_1'}\right)^\gamma = P_2 \left(\frac{V_2}{V_2'}\right)^\gamma . \tag{1}$$

Cela donne:

$$\frac{V_1'}{V_2'} = 2^{\frac{1}{\gamma}-1}.$$

En utilisant la relation évidente $V_1' + V_2' = V_{tot}$, on en déduit V_1' et V_2' en fonction de V_{tot}. Ensuite, on obtient immédiatement les pressions via les relations (1) puis les températures via les relations des GP dans chaque compartiment. Au final, on trouve facilement le travail total de l'opérateur:

$$W_{tot} = \frac{nrT}{\gamma - 1}\left(\left(\frac{1+2^\alpha}{3}\right)^{\gamma-1} - 2 + \left(\frac{2+2^{1/\gamma}}{3}\right)^{\gamma-1}\right).$$

Avec $\alpha = (\gamma-1)/\gamma$. On peut montrer alors que ce travail est négatif. Ce qui est assez intuitif. En effet, le gaz dans le compartiment 1 se détend, il repousse la paroi, donc l'opérateur doit retenir la paroi pour que la détente soit quasi-statique.

Exercice 39 : masse et plan incliné

Un objet ponctuel de masse m est lancé sur une rampe inclinée d'un angle θ par rapport à l'horizontale. Son mouvement va être freiné en comprimant un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 ainsi que par le frottement solide avec la rampe. Cet objet a une vitesse v_0 juste avant le contact avec le ressort au repos.

Quelle est la vitesse maximale v_0 telle que la distance d'arrêt parcourue pendant le freinage reste inférieure à l_0?

Eléments de solution

On note μ_s le coefficient de frottement statique et μ_d le coefficient dynamique, $\mu_d < \mu_c$. Le plus simple est d'écrire le théorème de l'énergie cinétique permet de trouver la distance d'arrêt l. On écrit alors la relation $l > l_0$, ce qui donne (après calculs):

$$v_0^2 < 2(\mu_d \cos\theta + \sin\theta) g l_0 + k l_0^2/m.$$

Ce qui conclut. Notons que lorsque k tend vers zéro, on voit que la distance de freinage est $v_0^2/(2g(\mu_d \cos\theta + \sin\theta))$, soit $v_0^2/(2g\mu_d)$ si $\theta = 0$, qui est une relation attendue.

Exercice 40 : corde et table

Une corde de longueur L de masse linéique μ est enroulée sur une table à la cote $h = 0$. On suppose toujours que la partie de la corde sur la table reste au repos.

1) Quelle force $F(t)$ faut-il exercer sur l'extrémité de la corde pour la soulever avec une accélération constante avec les conditions initiales: $h(0) = h_0$ et $\dot{h}(0) = 0$?

2) On suppose maintenant qu'à l'instant initial: $h(0) = 0$ et $\dot{h}(0) = 0$. Que se passe-t'il si on tire sur l'extrémité de la corde avec une force constante?

Aide: $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x} + C$.

Eléments de solution

C'est un exercice qui peut surprendre car on va effectivement trouver une force $F(t)$ pour une accélération constante. La difficulté réside dans le fait d'écrire correctement le PFD pour un système approprié.

1) On écrit le PFD pour la corde. La partie soulevée à la cote h a pour masse μh et pour vitesse $\dot{h}$ lorsque l'extrémité haute de la corde est tirée avec une force $F(t)$. La partie posé sur la table n'a pas de vitesse (repos). On a:

$$F(t) - \mu g h = \frac{d}{dt}(\mu h \dot{h}).$$

Soit:

$$F(t) = \mu h(g - \ddot{h}) + \mu \dot{h}^2.$$

On en déduit $F(t)$ lorsque l'on tire la corde avec une accélération a constante avec les conditions initiales de la question:

$$F(t) = \mu h_0(a + g) + \frac{a\mu}{2}(3a + g)t^2.$$

2) Maintenant, on suppose que F est constante. Le PFD pour la corde soulevée à la cote h est le évidemment le même que pour la question 1). On peut l'écrire sous la forme:

$$\dot{h}^2 = \frac{F}{\mu} - \frac{2gh}{3}.$$

On peut alors montrer que si F est trop petite, la corde va retomber sur la table. En effet, on trouve donc que $\dot{h} = 0$ pour $\frac{F}{\mu} = \frac{2gh}{3}$. Et donc, $h < L$ pour $F < \frac{2g\mu L}{3}$ (la corde ne remonte pas complètement).

Sinon, si F est plus grande que cette valeur, la corde peut remonter complètement en un temps T tel que:

$$T = \int_0^L \frac{dh}{\sqrt{\frac{F}{\mu} - \frac{2gh}{3}}}.$$

Ce qui donne, après calculs:

$$T = \frac{3\sqrt{F/\mu}}{g}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2g\mu L}{3F}}\right).$$
