Introduction aux développements limités

Julien Cubizolles

Lycée Louis le Grand

lundi 12 février 2018

sous licence http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/

Introduction aux développements limités

Julien Cubizolles

Lycée Louis le Grand

lundi 12 février 2018

sous licence http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/

Principe

Approximation polynomiale

Expression mathématique compliquée $f(x)$ approximée, au voisinage d'un point x_0 par un polynôme de degré n plus facile à manipuler :

$$f(x) \simeq P_n(x) \quad \text{pour: } x \simeq x_0.$$

Approximation d'autant meilleure que :

- x est proche de x_0,

sous licence http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/

Principe

Approximation polynomiale

Expression mathématique compliquée $f(x)$ approximée, au voisinage d'un point x_0 par un polynôme de degré n plus facile à manipuler :

$$f(x) \simeq P_n(x) \quad \text{pour: } x \simeq x_0.$$

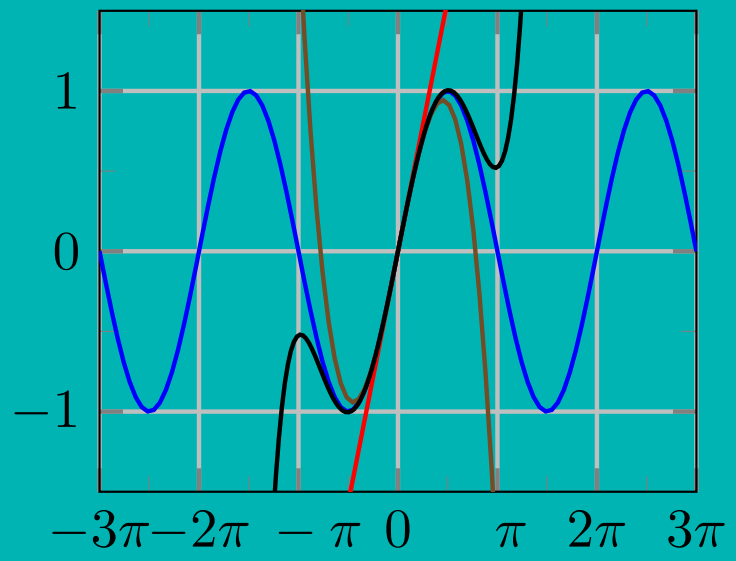
Approximation d'autant meilleure que :

- x est proche de x_0,
- le degré n du polynôme est élevé.

sous licence http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/

Exemple

Développement de $sin(x)$

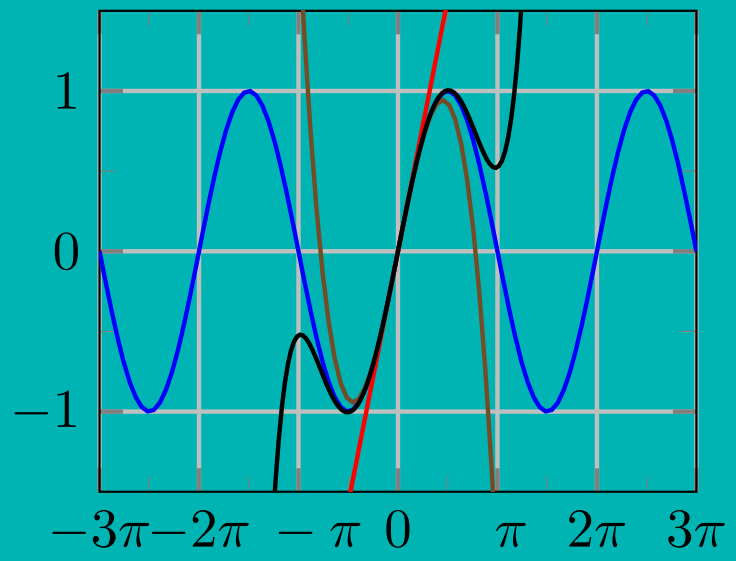


- : $sin(x)$
- : x
- : $x - x^3/6$
- : $x - x^3/6 + x^5/120$

sous licence http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/

Exemple

Développement de $sin(x)$



- : $sin(x)$
- : x
- : $x - x^3/6$
- : $x - x^3/6 + x^5/120$

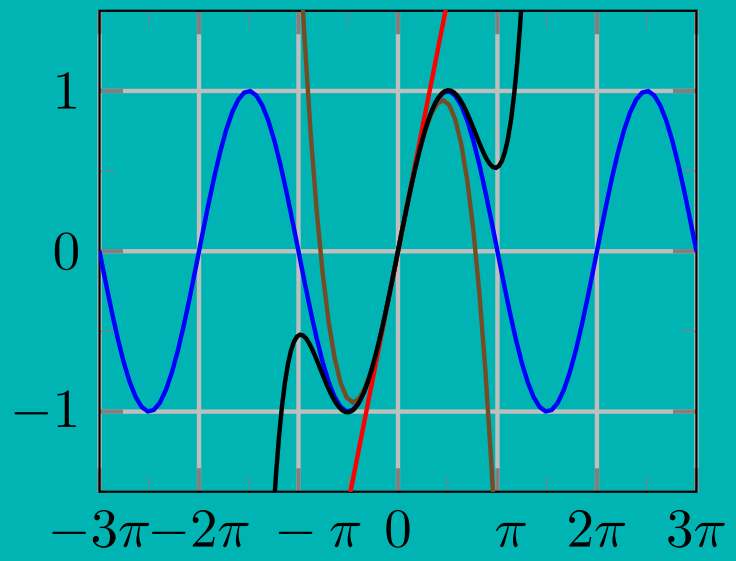
Cas des polynômes

Le *DL d'ordre* n d'un polynôme d'ordre s'obtient en le tronquant aux monômes de rang inférieur ou égal à n.

sous licence http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/

Exemple

Développement de $sin(x)$



- : $sin(x)$
- : x
- : $x - x^3/6$
- : $x - x^3/6 + x^5/120$

Cas des polynômes

Le *DL d'ordre* n d'un polynôme d'ordre s'obtient en le tronquant aux monômes de rang inférieur ou égal à n.

$$x + x^2 + x^3 \simeq x + x^2 \quad \text{à l'ordre } 2 \text{ pour } x \ll 1$$

sous licence http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/

Détermination

Dérivées successives de f en x_0

On montre que :

$$f(x) \simeq f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2}f''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0),$$

avec $n\,! = \prod_{k=1}^{n} k$, « factorielle » n.

Approximations successives

ordre 0 $f(x) \simeq f(x_0)$: la fonction f est approximée par une constante, sa valeur en x_0.

ordre 1 $f(x) \simeq f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$: la fonction f est approximée par sa tangente en x_0.

sous licence http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/

Vérification

sin

- $\sin(0) = 0$
- $\sin'(0) =$
- $\sin^{(2)}(0) =$
- $\sin^{(3)}(0) =$
- $\sin^{(4)}(0) =$
- $\sin^{(5)}(0) =$

- $1\,! =$
- $2\,! =$
- $3\,! =$
- $4\,! =$
- $5\,! =$

sous licence http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/

Vérification

sin

- $\sin(0) = 0$
- $\sin'(0) = \cos(0) = 1$
- $\sin^{(2)}(0) =$
- $\sin^{(3)}(0) =$
- $\sin^{(4)}(0) =$
- $\sin^{(5)}(0) =$

- $1\,! = 1$
- $2\,! =$
- $3\,! =$
- $4\,! =$
- $5\,! =$

sous licence http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/

Vérification

sin

- $\sin(0) = 0$
- $\sin'(0) = \cos(0) = 1$
- $\sin^{(2)}(0) = -\sin(0) = 0$
- $\sin^{(3)}(0) =$
- $\sin^{(4)}(0) =$
- $\sin^{(5)}(0) =$

- $1\,! = 1$
- $2\,! = 2$
- $3\,! =$
- $4\,! =$
- $5\,! =$

sous licence http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/

Vérification

sin

- $\sin(0) = 0$
- $\sin'(0) = \cos(0) = 1$
- $\sin^{(2)}(0) = -\sin(0) = 0$
- $\sin^{(3)}(0) = -\cos(0) = -1$
- $\sin^{(4)}(0) =$
- $\sin^{(5)}(0) =$

- $1\,! = 1$
- $2\,! = 2$
- $3\,! = 6$
- $4\,! =$
- $5\,! =$

sous licence http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/

Vérification

sin

- $\sin(0) = 0$
- $\sin'(0) = \cos(0) = 1$
- $\sin^{(2)}(0) = -\sin(0) = 0$
- $\sin^{(3)}(0) = -\cos(0) = -1$
- $\sin^{(4)}(0) = \sin(0) = 0$
- $\sin^{(5)}(0) =$

- $1\,! = 1$
- $2\,! = 2$
- $3\,! = 6$
- $4\,! = 24$
- $5\,! =$

sous licence http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/

Vérification

sin

- $\sin(0) = 0$
- $\sin'(0) = \cos(0) = 1$
- $\sin^{(2)}(0) = -\sin(0) = 0$
- $\sin^{(3)}(0) = -\cos(0) = -1$
- $\sin^{(4)}(0) = \sin(0) = 0$
- $\sin^{(5)}(0) = \cos(0) = 1$

- $1\,! = 1$
- $2\,! = 2$
- $3\,! = 6$
- $4\,! = 24$
- $5\,! = 120$

sous licence http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/

Vérification

sin

- $\sin(0) = 0$
- $\sin'(0) = \cos(0) = 1$
- $\sin^{(2)}(0) = -\sin(0) = 0$
- $\sin^{(3)}(0) = -\cos(0) = -1$
- $\sin^{(4)}(0) = \sin(0) = 0$
- $\sin^{(5)}(0) = \cos(0) = 1$

- $1\,! = 1$
- $2\,! = 2$
- $3\,! = 6$
- $4\,! = 24$
- $5\,! = 120$

$$\sin(x) \simeq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \text{ à l'ordre } 5 \text{ pour } x \ll 1$$

sous licence http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/

Exemples

Fonctions fondamentales

- $\sin(x)$ à l'ordre 3 pour $x \ll 1$: $\sin(x) \simeq x - x^3/6$
- $\cos(x)$ à l'ordre 3 pour $x \ll 1$:
- $\frac{1}{1-x}$ à l'ordre 3 pour $x \ll 1$:
- $\exp(x)$ à l'ordre 2 pour $x \ll 1$:
- $(1+x)^\alpha$ à l'ordre 2 pour $x \ll 1$:

sous licence http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/

Exemples

Fonctions fondamentales

- $\sin(x)$ à l'ordre 3 pour $x \ll 1$: $\sin(x) \simeq x - x^3/6$
- $\cos(x)$ à l'ordre 3 pour $x \ll 1$: $\cos(x) \simeq 1 - x^2/2$
- $\frac{1}{1-x}$ à l'ordre 3 pour $x \ll 1$:
- $\exp(x)$ à l'ordre 2 pour $x \ll 1$:
- $(1+x)^\alpha$ à l'ordre 2 pour $x \ll 1$:

Développement limité à l'ordre n d'un produit $f \times g$

On effectue le produit des développements limités à l'ordre n de f et g qu'on tronque ensuite à l'ordre n :

- $(1+x)(x+x^2)$ à l'ordre 2 pour $x \ll 1$:
- $\frac{\sin(x)}{1-x}$ à l'ordre 4 pour $x \ll 1$:

sous licence http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/

Exemples

Fonctions fondamentales

- $\sin(x)$ à l'ordre 3 pour $x \ll 1$: $\sin(x) \simeq x - x^3/6$
- $\cos(x)$ à l'ordre 3 pour $x \ll 1$: $\cos(x) \simeq 1 - x^2/2$
- $\frac{1}{1-x}$ à l'ordre 3 pour $x \ll 1$: $\frac{1}{1+x} \simeq 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$
- $\exp(x)$ à l'ordre 2 pour $x \ll 1$:
- $(1+x)^\alpha$ à l'ordre 2 pour $x \ll 1$:

Développement limité à l'ordre n d'un produit $f \times g$

On effectue le produit des développements limités à l'ordre n de f et g qu'on tronque ensuite à l'ordre n :

- $(1+x)(x+x^2)$ à l'ordre 2 pour $x \ll 1$:
- $\frac{\sin(x)}{1-x}$ à l'ordre 4 pour $x \ll 1$:

sous licence http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/

Exemples

Fonctions fondamentales

- $\sin(x)$ à l'ordre 3 pour $x \ll 1$: $\sin(x) \simeq x - x^3/6$
- $\cos(x)$ à l'ordre 3 pour $x \ll 1$: $\cos(x) \simeq 1 - x^2/2$
- $\frac{1}{1-x}$ à l'ordre 3 pour $x \ll 1$: $\frac{1}{1+x} \simeq 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$
- $\exp(x)$ à l'ordre 2 pour $x \ll 1$: $\exp(1+x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$
- $(1+x)^\alpha$ à l'ordre 2 pour $x \ll 1$:

Développement limité à l'ordre n d'un produit $f \times g$

On effectue le produit des développements limités à l'ordre n de f et g qu'on tronque ensuite à l'ordre n :

- $(1+x)(x+x^2)$ à l'ordre 2 pour $x \ll 1$:
- $\frac{\sin(x)}{1-x}$ à l'ordre 4 pour $x \ll 1$:

sous licence http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/

Exemples

Fonctions fondamentales

- $\sin(x)$ à l'ordre 3 pour $x \ll 1$: $\sin(x) \simeq x - x^3/6$
- $\cos(x)$ à l'ordre 3 pour $x \ll 1$: $\cos(x) \simeq 1 - x^2/2$
- $\frac{1}{1-x}$ à l'ordre 3 pour $x \ll 1$: $\frac{1}{1+x} \simeq 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$
- $\exp(x)$ à l'ordre 2 pour $x \ll 1$: $\exp(1+x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$
- $(1+x)^\alpha$ à l'ordre 2 pour $x \ll 1$: $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha - 1)\frac{x^2}{2}$

Développement limité à l'ordre n d'un produit $f \times g$

On effectue le produit des développements limités à l'ordre n de f et g qu'on tronque ensuite à l'ordre n :

- $(1+x)(x+x^2)$ à l'ordre 2 pour $x \ll 1$:
- $\frac{\sin(x)}{1-x}$ à l'ordre 4 pour $x \ll 1$:

sous licence http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/

Exemples

Fonctions fondamentales

- $\sin(x)$ à l'ordre 3 pour $x \ll 1$: $\sin(x) \simeq x - x^3/6$
- $\cos(x)$ à l'ordre 3 pour $x \ll 1$: $\cos(x) \simeq 1 - x^2/2$
- $\frac{1}{1-x}$ à l'ordre 3 pour $x \ll 1$: $\frac{1}{1+x} \simeq 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$
- $\exp(x)$ à l'ordre 2 pour $x \ll 1$: $\exp(1+x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$
- $(1+x)^\alpha$ à l'ordre 2 pour $x \ll 1$: $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha - 1)\frac{x^2}{2}$

Développement limité à l'ordre n d'un produit $f \times g$

On effectue le produit des développements limités à l'ordre n de f et g qu'on tronque ensuite à l'ordre n :

- $(1+x)(x+x^2)$ à l'ordre 2 pour $x \ll 1$:$x + 2x^2$
- $\frac{\sin(x)}{1-x}$ à l'ordre 4 pour $x \ll 1$:

sous licence http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/

Exemples

Fonctions fondamentales

- $\sin(x)$ à l'ordre 3 pour $x \ll 1$: $\sin(x) \simeq x - x^3/6$
- $\cos(x)$ à l'ordre 3 pour $x \ll 1$: $\cos(x) \simeq 1 - x^2/2$
- $\frac{1}{1-x}$ à l'ordre 3 pour $x \ll 1$: $\frac{1}{1+x} \simeq 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$
- $\exp(x)$ à l'ordre 2 pour $x \ll 1$: $\exp(1+x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$
- $(1+x)^\alpha$ à l'ordre 2 pour $x \ll 1$: $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha - 1)\frac{x^2}{2}$

Développement limité à l'ordre n d'un produit $f \times g$

On effectue le produit des développements limités à l'ordre n de f et g qu'on tronque ensuite à l'ordre n :

- $(1+x)(x+x^2)$ à l'ordre 2 pour $x \ll 1$:$x + 2x^2$
- $\frac{\sin(x)}{1-x}$ à l'ordre 4 pour $x \ll 1$:$x + x^2 + (5x^3)/6 + (5x^4)/6$

sous licence http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/

Dérivation et intégration

cas très fréquent :

- on connaît un DL d'ordre n de f en x_0, noté P_n

sous licence http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/

Dérivation et intégration

cas très fréquent :

- on connaît un DL d'ordre n de f en x_0, noté P_n
- f est dérivable et intégrable en x_0 (de dérivée f' et de primitive F)

sous licence http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/

Dérivation et intégration

cas très fréquent :

- on connaît un DL d'ordre n de f en x_0, noté P_n
- f est dérivable et intégrable en x_0 (de dérivée f' et de primitive F)

sous licence http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/

Dérivation et intégration

cas très fréquent :

- on connaît un DL d'ordre n de f en x_0, noté P_n
- f est dérivable et intégrable en x_0 (de dérivée f' et de primitive F)

f' et F admettent des DLs d'ordre respectivement $n-1$ et $n+1$, obtenus par dérivation et intégration de P_n :

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}P_n(x)}{\mathrm{d}x} \quad \text{à l'ordre } n-1 \text{ pour x proche de } x_0$$

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x} P_n(x)\mathrm{D}x \quad \text{à l'ordre } n+1 \text{ pour x proche de } x_0$$

sous licence http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/

Fonctions composées : cas simple

Développement limité de $f(kx)$: on remplace $x \to kx$ dans le DL de $f(x)$:

$$\frac{1}{1+x} \simeq$$

sous licence http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/

Fonctions composées : cas simple

Développement limité de $f(kx)$: on remplace $x \to kx$ dans le DL de $f(x)$:

$$\frac{1}{1+x} \simeq 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n.$$

sous licence http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/

Fonctions composées : cas simple

Développement limité de $f(kx)$: on remplace $x \to kx$ dans le DL de $f(x)$:

$$\frac{1}{1+x} \simeq 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n.$$

$$\sin(2x) \simeq$$

sous licence http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/

Fonctions composées : cas simple

Développement limité de $f(kx)$: on remplace $x \to kx$ dans le DL de $f(x)$:

$$\frac{1}{1+x} \simeq 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n.$$

$$\sin(2x) \simeq 2x - 4x^3/3$$

sous licence http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/

Fonctions composées : cas général

Si P_n et R_n sont les DL au même ordre n de f et g aux voisinages respectivement de $g(x_0)$ et x_0, le DL d'ordre n de $f \circ g$ au voisinage de x_0 est donné par $P_n \circ R_n$, tronqué à l'ordre n.

$\sin\left(x + x^2\right)$ à l'ordre 3 pour x proche de 0.

sous licence http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/

Fonctions composées : cas général

Si P_n et R_n sont les DL au même ordre n de f et g aux voisinages respectivement de $g(x_0)$ et x_0, le DL d'ordre n de $f \circ g$ au voisinage de x_0 est donné par $P_n \circ R_n$, tronqué à l'ordre n.

$$\sin\left(x + x^2\right) \quad \text{à l'ordre } 3 \text{ pour x proche de } 0.$$

- DL de $x + x^2$ à l'ordre 3 :

sous licence http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/

Fonctions composées : cas général

Si P_n et R_n sont les DL au même ordre n de f et g aux voisinages respectivement de $g(x_0)$ et x_0, le DL d'ordre n de $f \circ g$ au voisinage de x_0 est donné par $P_n \circ R_n$, tronqué à l'ordre n.

$$\sin\left(x + x^2\right) \quad \text{à l'ordre } 3 \text{ pour x proche de } 0.$$

- DL de $x + x^2$ à l'ordre 3 :$x + x^2$,

sous licence http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/

Fonctions composées : cas général

Si P_n et R_n sont les DL au même ordre n de f et g aux voisinages respectivement de $g(x_0)$ et x_0, le DL d'ordre n de $f \circ g$ au voisinage de x_0 est donné par $P_n \circ R_n$, tronqué à l'ordre n.

$$\sin\left(x + x^2\right) \quad \text{à l'ordre } 3 \text{ pour x proche de } 0.$$

- DL de $x + x^2$ à l'ordre 3 :$x + x^2$,
- $x + x^2 \to 0$ quand $x \to 0$,

sous licence http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/

Fonctions composées : cas général

Si P_n et R_n sont les DL au même ordre n de f et g aux voisinages respectivement de $g(x_0)$ et x_0, le DL d'ordre n de $f \circ g$ au voisinage de x_0 est donné par $P_n \circ R_n$, tronqué à l'ordre n.

$$\sin\left(x + x^2\right) \quad \text{à l'ordre } 3 \text{ pour x proche de } 0.$$

- DL de $x + x^2$ à l'ordre 3 :$x + x^2$,
- $x + x^2 \to 0$ quand $x \to 0$,
- DL de $\sin(y)$ à l'ordre 3 quand $y \to 0$:

sous licence http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/

Fonctions composées : cas général

Si P_n et R_n sont les DL au même ordre n de f et g aux voisinages respectivement de $g(x_0)$ et x_0, le DL d'ordre n de $f \circ g$ au voisinage de x_0 est donné par $P_n \circ R_n$, tronqué à l'ordre n.

$$\sin\left(x + x^2\right) \quad \text{à l'ordre } 3 \text{ pour x proche de } 0.$$

- DL de $x + x^2$ à l'ordre 3 :$x + x^2$,
- $x + x^2 \to 0$ quand $x \to 0$,
- DL de $\sin(y)$ à l'ordre 3 quand $y \to 0$:$x - \frac{x^3}{6}$,

sous licence http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/

Fonctions composées : cas général

Si P_n et R_n sont les DL au même ordre n de f et g aux voisinages respectivement de $g(x_0)$ et x_0, le DL d'ordre n de $f \circ g$ au voisinage de x_0 est donné par $P_n \circ R_n$, tronqué à l'ordre n.

$$\sin\left(x + x^2\right) \quad \text{à l'ordre } 3 \text{ pour x proche de } 0.$$

- DL de $x + x^2$ à l'ordre 3 :$x + x^2$,
- $x + x^2 \to 0$ quand $x \to 0$,
- DL de $\sin(y)$ à l'ordre 3 quand $y \to 0$:$x - \frac{x^3}{6}$,

$$\sin\left(x + x^2\right) \simeq x + x^2 - \frac{x^3}{6}.$$

sous licence http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/