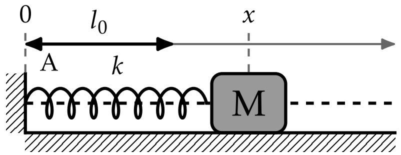
Problème 1 : Mesure de raideurs de ressorts

On étudie une méthode de mesure de raideurs de ressorts. Dans toute la suite, les ressorts seront considérés idéaux, et posséderont la même longueur à vide l_0. On négligera tout frottement dans l'étude du problème.

I Oscillations d'un système masse-ressort

On étudie tout d'abord une masse m considérée ponctuelle attachée à l'extrémité d'un ressort de raideur k, l'ensemble étant mobile sans frottement sur un plan horizontal.



I.1. La masse est initialement à une distance notée l, supérieure à l_0 de l'extrémité fixe (A) du ressort, lâchée avec une vitesse nulle à l'instant $t = 0$.

(a) À quelle condition portant sur l, la masse peut-elle atteindre le point A ? On suppose dans toute la suite que cette condition n'est pas réalisée, sauf mention explicite du contraire.

(b) Déterminer l'expression de l'instant où la longueur du ressort atteint pour la deuxième fois la longueur l_0.

(c) Déterminer la valeur minimale de la vitesse à communiquer à la masse à l'instant initial pour que la masse atteigne le point A. On la notera $v_{\text{min}}(l)$. On pourra utiliser une représentation de Fresnel.

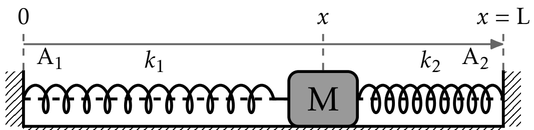
I.2. On mesure que pour $l - l_0 = 10\,\text{cm}$, il faut une durée $\Delta t = 1\,\text{s}$ pour que la masse parcoure une distance $5\,\text{cm}$ quand elle est lâchée sans vitesse initiale. Si maintenant $l - l_0 = 20\,\text{cm}$:

(a) la durée nécessaire pour parcourir $5\,\text{cm}$ à partir de la position initiale est-elle supérieure, inférieure ou égale à $\Delta t = 1\,\text{s}$?

(b) même question pour parcourir $10\,\text{cm}$, toujours avec $l = 20\,\text{cm}$.

II Masse reliée à deux ressorts

La masse m, de position M, est cette fois-ci reliée à deux oscillateurs de raideurs respectives k_1 et k_2, avec $k_1 > k_2$. On suppose que la masse n'atteint pas les extrémités fixes des ressorts (notées A_1 et A_2) au cours de son mouvement.



II.1. (a) Déterminer la distance A_1M pour laquelle la masse est à l'équilibre.

(b) Établir l'équation différentielle vérifiée par la position notée x de la masse, et en déduire la pulsation des oscillations du système.

(c) On étudie les oscillations quand on lâche la masse sans vitesse initiale après l'avoir décalée d'une distance d de la position d'équilibre. L'amplitude des oscillations est-elle inférieure, supérieure ou égale selon qu'on a initialement décalé la masse vers A_1 ou vers A_2 ?

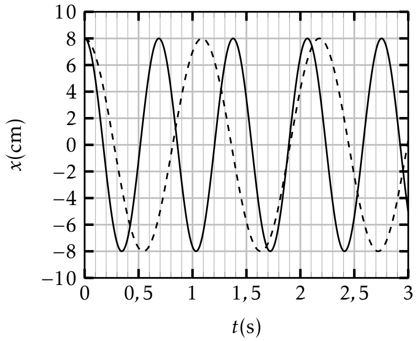
(d) Même question si on a décalé d'une distance d par rapport au milieu du segment A_1A_2 (sans cependant dépasser la position d'équilibre). On supposera dans cette question que $L > 2l_0$.

II.2. On utilise ce dispositif pour déterminer la valeur de la raideur d'un ressort inconnu (le ressort 2), celle du ressort 1 étant connue $k_1 = 10\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$. Dans cette question, on ne suppose plus que $k_1 > k_2$.

La courbe ci-contre présente deux enregistrements des oscillations du dispositif :

en traits interrompus en l'absence du ressort 2, la masse n'étant reliée qu'au ressort 1

en trait continu quand la masse est reliée aux deux ressorts.



Déduire de ces courbes la valeur de la raideur du ressort k_2.

II.3. Qu'observerait-on pour $k_2 = 0{,}5\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$, pour $k_2 = 100\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$. Commenter.

II.4. Le dispositif est-il adapté pour détecter une faible différence entre des valeurs k_2 et k_1 proches ?

III Méthode différentielle

Dans le cas où k_2 est proche de k_1, on utilise le dispositif représenté à la figure 1 formé de deux systèmes masse-ressort. Les masses sont identiques et sont reliées par un fil F infiniment extensible et sans masse qui exerce une force négligeable sur les masses. On observe un point R situé au milieu du fil, d'abscisse notée x_R. On considère que les masses ne se touchent jamais au cours du mouvement, et qu'elles n'atteignent pas non plus les extrémités A_1 et A_2.

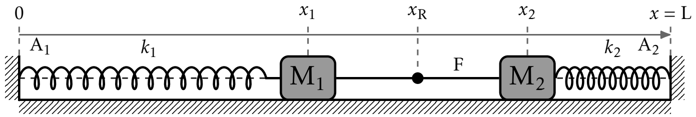


FIGURE 1 – Deux systèmes masse-ressort reliés par un fil infiniment extensible et de masse négligeable.

III.1. On considère dans un premier temps que les deux raideurs sont égales : $k_1 = k_2 \equiv k$.

(a) Le ressort 1 et le ressort 2 sont initialement comprimés d'une longueur Δl_i par rapport à leur position au repos. Déterminer le mouvement du point R.

(b) Même question si le ressort 1 est initialement allongé de Δl_i et le ressort 2 initialement comprimé de la même longueur Δl_i.

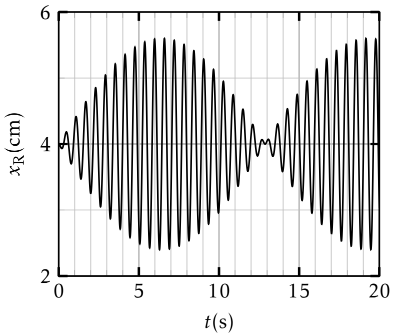
III.2. On considère maintenant que la raideur k_2 est différente mais proche de k_1.

(a) On utilise les conditions initiales de la question **III.1a**.

Justifier l'allure de la courbe ci-contre représentant l'évolution temporelle de x_R.

(**b**) Déterminer la valeur de la différence relative $k_2 - k_1/k_1$ pour la courbe ci-contre si on a toujours $k_1 = 10\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$.

(**c**) Tracer l'allure de l'évolution temporelle de x_R pour les mêmes valeurs de k_1 et k_2 si les contions initiales sont maintenant celles de la question **III.1b**.



III.3. On donnera des réponses brèves aux deux questions suivantes.

(**a**) Quel vous paraît être le principal avantage de la méthode de la Section III sur celle de la Section II pour comparer des constantes de raideur proches ?

(**b**) Quelle(s) imperfection(s) du dispositif limite(nt) la précision de la méthode III ?

Correction du problème 1

I Oscillations d'un système masse-ressort

I.1. La loi de la quantité de mouvement s'écrit :

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -k(x-l_0).$$

L'unique solution vérifiant les conditions initiales $x_0 = l_0 + l$ et $\dot{x} = 0$ est :

$$x(t) = l_0 + (l - l_0)\cos(\omega t),$$

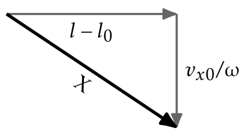
avec $\omega = \sqrt{k/m}$ la pulsation et $\mathrm{T} = 2\pi/\omega$ la période.

(a) La masse oscillera avec une amplitude de $l - l_0$ autour de l_0. On doit donc avoir $l > 2l_0$ pour qu'elle puisse atteindre le point A d'abscisse $x = 0$.

(b) La fonction $x(t)$ prend initialement sa valeur maximale. Comme toute oscillation sinusoïdale, elle passera ensuite par sa valeur moyenne, $x = l_0$ au bout d'un quart de période, en décroissant. Elle y repassera ensuite une demi-période plus tard, soit en $t = 3\mathrm{T}/4$.

(c) Notons v_{x0} la composante selon $\overrightarrow{e_x}$ de la vitesse initiale. La solution avec les conditions initiales $x(0) = l_0$, $\dot{x}(0) = v_{x0}$ est alors :

$$x(t) = l_0 + (l - l_0)\cos(\omega t) + \frac{v_{x0}}{\omega}\underbrace{\sin(\omega t)}_{=\cos(\omega t - \pi/2)}$$
$$\equiv \mathrm{X}\cos(\omega t + \varphi).$$



La construction de Fresnel ci-dessus montre que l'amplitude X de l'oscillation sera $\sqrt{(l-l_0)^2 + (v_{0x}/\omega)^2}$.

La masse pourra donc atteindre le point A quand $x = 0$, soit si :

$$(l - l_0)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 \geqslant l_0^2 \rightarrow l^2 - 2l_0 l + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 \geqslant 0$$

I.2. La distance $l - l_0 = 10\,\mathrm{cm}$ représente l'amplitude des oscillations. Parcourir $5\,\mathrm{cm}$ correspond donc à avoir $\cos(\omega t) = 1/2$, soit $\omega t = \pi/3 = \varphi_1$.

(a) Si $l - l_0 = 20\,\mathrm{cm}$, parcourir $5\,\mathrm{cm}$ représente une plus faible fraction de l'amplitude et donc une plus faible fraction de la période, soit une durée inférieure à $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$. Plus précisément, on aura $\cos(\omega t) = 3/4$, soit $\omega t = 41{,}4° = 0{,}72\,\mathrm{rad} \equiv \varphi_2$ et donc une durée $1\,\mathrm{s} \times \varphi_2/\varphi_1 = 0{,}69\,\mathrm{s}$.

(b) Parcourir $10\,\mathrm{cm}$ sur $20\,\mathrm{cm}$ durera le même temps que $5\,\mathrm{cm}$ sur $10\,\mathrm{cm}$, soit $1\,\mathrm{s}$.

II Masse reliée à deux ressorts

II.1. Les longueurs des ressorts 1 et 2 sont respectivement x et $\mathrm{L} - x$.

(a) À l'équilibre, la tension du ressort 1 est égale en norme à celle du ressort 2. En notant x la position de M (avec $x = 0$ en A_1), on a donc :

$$k_1(x - l_0) = k_2(\mathrm{L} - x - l_0) \rightarrow x = \frac{\mathrm{L}k_2 + (k_1 - k_2)l_0}{k_1 + k_2} \equiv x_{\mathrm{eq}}.$$

On peut en particulier vérifier que si $k_1 = k_2$, $x = \mathrm{L}/2$, que si $k_1 \gg k_2$, $x = l_0$ et que si $k_2 \gg k_1$, $x = \mathrm{L} - l_0$.

(b) Les forces de tension des ressorts 1 et 2 sont respectivement $-k_1(x-l_0)\overrightarrow{e_x}$ et $-k(\mathrm{L}-x-l_0)(-\overrightarrow{e_x})$. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit, en projection sur l'axe Ox :

$$m\ddot{x} = -k_1(x - l_0) + k_2(\mathrm{L} - x - l_0) \rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 x_{\mathrm{eq}},$$

sous forme canonique, avec (après calculs) $\omega^2 = \sqrt{(k_1 + k_2)/m}$ et l'expression précédente pour x_{eq}.

(c) Les oscillations sont toujours symétriques par rapport à la position d'équilibre, quelles que soient les valeurs de k_1 et k_2. L'amplitude sera toujours de d qu'on se soit initialement décalé vers A_1 ouy A_2.

(d) Comme $k_1 > k_2$, le point d'équilibre est plus proche de A_1 que A_2 si les deux ressorts sont étendus, ce qui est le cas pour $\mathrm{L} > 2l_0$ (on peut le vérifier sur l'expression de x_{eq} qui est alors inférieur à $\mathrm{L}/2$). Se déplacer vers A_1 revient alors à lâcher la masse d'une position plus proche de la position d'équilibre : les oscillations auront une amplitude moindre.

II.2. La période dans le cas où le ressort 1 (donc quand $\omega = \sqrt{k_1/m}$) est seul est $\mathrm{T}_1 = 1{,}1\,\mathrm{s}$, elle vaut $\mathrm{T}_{1+2} = 0{,}7\,\mathrm{s}$ quand les deux agissent (et donc quand $\sqrt{(k_1 + k_2)/m}$). On en déduit qu'on a :

$$\frac{k_1 + k_2}{k_1} = \left(\frac{\mathrm{T}_2}{\mathrm{T}_1}\right)^2 \rightarrow \frac{k_2}{k_1} = \left(\frac{\mathrm{T}_2}{\mathrm{T}_1}\right)^2 - 1 = 1{,}5 \rightarrow k_2 = 15\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}.$$

II.3. **Pour $k_2 = 0{,}5\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$:** la somme des raideurs $k_1 + k_2$ sera peu différente de k_1 et la pulsation correspondante encore plus proche de $\sqrt{k_1/m}$ (en raison de la racine carrée). L'observation d'un enregistrement tel que celui de la question précédente demandera une précision bien supérieure pour pouvoir mesurer la différence des deux raideurs.

Pour $k_2 = 100\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$: la pulsation du signal sera $\sqrt{11}$ fois plus importante que dans la question précédente. Il faudra donc être disposer d'une meilleure précision ici aussi.

II.4. L'expérience étant sensible à la somme des constantes de raideur, elle n'est pas très adaptée pour mesurer des valeurs proches.

III Méthode différentielle

III.1. (a) Chaque masse n'est soumise qu'à la force d'un ressort (respectivement $\overrightarrow{\mathrm{T}_1} = -k_1(x_1 - l_0)\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{\mathrm{T}_2} = -k_2(\mathrm{L} - x_2 - l_0)(-\overrightarrow{e_x})$). Les équations différentielles d'évolution de x_1 et x_2 sont donc :

$$m\ddot{x_1} = -k_1(x_1 - l_0) \qquad m\ddot{x_2} = k(\mathrm{L} - x - l_0).$$

Les solutions vérifiant les conditions initiales $x_1 = l_0 - \Delta l$, $x_2 = \mathrm{L} - l_0 + \Delta l$, $\dot{x_1} = \dot{x_2} = 0$ sont :

$$x_1 = l_0 - \Delta l\cos(\omega_1 t) \qquad x_2 = \mathrm{L} - l_0 + \Delta l\cos(\omega_2 t),$$

avec $\omega_1 = \sqrt{k_1/m}$ et $\omega_2 = \sqrt{k_2/m}$.
L'abscisse du point R est alors :

$$x_R = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{L}{2} + \Delta l\left(-\cos\left(\omega_1 t\right) + \cos\left(\omega_2 t\right)\right) = \frac{L}{2},$$

dans le cas où $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega$.

(b) La condition initiale sur la position de M_1 est maintenant $x_1 = l_0 + \Delta l$, celle de M_2 étant inchangée. La position de M_1 évolue alors selon $x_1 = l_0 + \Delta_l \cos(\omega_1 t)$ et on a désormais $x_R = L/2 + \Delta l \cos(\omega t)$.

III.2. (a) On reprend l'expression :

$$x_R = \frac{L}{2} + \Delta l\left(-\cos\left(\omega_1 t\right) + \cos\left(\omega_2 t\right)\right) = \frac{L}{2} + \Delta l \sin\left(\frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2}\right)\sin\left(\frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2}\right).$$

Définissons la valeur moyenne $\omega_0 \equiv (\omega_1 + \omega_2)/2$ et la différence $\omega_1 - \omega_2 \equiv \Delta\omega$. On a $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$ puisque les deux raideurs sont proches. On observe donc un phénomène de battements avec un signal évoluant rapidement à ω_0, dont l'amplitude évolue lentement, à $\Delta\omega$, comme représenté sur la figure ci-contre.
On vérifie qu'on a bien $x_R(0) = 0$ comme imposé par les conditions initiales choisies.

(b) En utilisant ω_0 et $\Delta\omega$, on peut réécrire :

$$x_R = \frac{L}{2} + \Delta l \cos\left(\omega_0 t\right)\cos\left(\frac{\Delta\omega t}{2}\right).$$

On lit sur la courbe que les oscillations rapides ont une période de $T_0 = 12{,}0(5)\,\mathrm{s}/20$ soit une fréquence $f_0 = 1/T_0 = 1{,}600(3)\,\mathrm{Hz}$. L'enveloppe de la courbe est une sinusoïde de pulsation $\Delta\omega/2$ mais la pulsation des oscillations de l'amplitude est double, égale donc à $\Delta\omega$. On lit pour ces oscillations une période $T_a = 12{,}75(25)\,\mathrm{s}$. On en déduit $\Delta\omega/(2\pi) = 1/T_a = 7{,}84(15)\cdot 10^{-2}\,\mathrm{Hz}$. Remarquons également qu'on aurait aussi bien pu écrire $\Delta\omega/(2\pi) = -7{,}84(15)\cdot 10^{-2}\,\mathrm{Hz}$ du fait de la périodicité de la fonction cos. On ne peut pas donc pas a priori savoir si k_1 est supérieur ou inférieur à k_2.
On peut donc écrire :

$$\Delta\omega = \left|\sqrt{\frac{k_1}{m}} - \sqrt{\frac{k_2}{m}}\right| = \sqrt{\frac{k_1}{m}}\left|1 - \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}\right|.$$

Comme k_1 et k_2 sont proches, la pulsation ω_0 est peu différente de $\sqrt{k_1/m}$ et on a donc :

$$\left|1 - \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}\right| = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 4{,}72(9)\cdot 10^{-2}$$

$$\frac{k_2}{k_1} = \left(1 \pm \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2 \simeq 1 \pm 2\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 1 \pm 9{,}45(20)\cdot 10^{-1}.$$

On a donc $k_2 = 1{,}094(2)k_1$ ou $k_2 = 9{,}055(2)\cdot 10^{-1}k_1$. Pour choisir entre ces deux valeurs, il suffit de regarder le démarrage de la courbe. Elle commence par décroître, ce qui indique que le point R commence par se déplacer vers la gauche, c'est donc que le point M_2 revient plus rapidement vers sa position d'équilibre, donc que $k_2 > k_1$. Finalement $k_2 = 1{,}094(2)k_1 = 10{,}94(2)\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$.

III.3. (a) La méthode de la Section III détermine la différence entre deux raideurs en mesurant une grande durée. Cette différence sera donc mesurée avec une plus grande précision relative que par la méthode II.

(b) Les différences entre les masses et la raideur non nulle du fil sont les principales causes d'imprécision dans ce protocole.