Problème 1 : Interférences de condensats de Bose-Einstein

On étudie deux expériences d'interférences d'ondes de matière. Elles utilisent des nuages d'atomes ultra froids dans l'état quantique dégénéré nommé « condensat de Bose-Einstein » dont tous les constituants (atomes ou molécules) sont dans le même état quantique. Aucune connaissance sur ces états n'est nécessaire, on les traitera comme s'il s'agissait d'un seul atome ou molécule.

Données : masse d'un nucléon $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg, constante de Planck $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$, accélération de la pesanteur $g = 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Les autres données sont à rechercher dans les figures expérimentales ou dans l'énoncé des questions.

I Généralités

I.1. On considère l'onde de matière d'une particule libre de masse m et de quantité de mouvement $\vec{p} = p\vec{e_y}$, avec $p \geqslant 0$.

(**a**) Donner l'expression de son énergie cinétique en fonction de p et m, notée E_p

(**b**) Rappeler l'expression de sa longueur de de Broglie, notée λ_{dB} en fonction entre autres de p.

(**c**) La particule est maintenant confinée dans un piège unidimensionnel de longueur ℓ selon $\vec{e_y}$. Déterminer les valeurs de p possibles pour des états stationnaires (on identifiera chaque état stationnaire par un entier $n > 0$). En déduire les valeurs de l'énergie cinétique de la particule correspondantes, notées E_n et tracer l'allure de la densité de probabilité de présence en fonction de y, notée $|\Psi_n(y)|^2$.

I.2. On admet que la fonction d'onde d'une particule de quantité de mouvement $\vec{p} = p\vec{e_y}$, notée $\psi_p(y,t)$ peut se mettre sous la forme :

$$\psi_p(y,t) = A_p e^{i(py - E_p t)/\hbar}, \text{avec } A_p \text{ indépendante de } y \text{ et } t. \qquad (1)$$

(**a**) Tracer la fonction $|\psi_p(y,t) + \psi_{-p}(y,t)|^2$ en fonction de y. On pourra choisir de prendre $A_{-p} = -A_p$.

(**b**) En déduire que les états stationnaires du **I.1c** peuvent être modélisés comme des superpositions de deux états de quantités de mouvement opposées.

II Interférences entre deux condensats en mouvement

Dans cette expérience, deux condensats identiques sont mis en mouvement l'un vers l'autre avec des vecteurs vitesse opposés, de même norme v_0. Ils sont formés de molécules diatomiques de ^{6}Li, dont on note m_{Li_2} la masse.

II.1. Rappeler l'expression de la longueur d'onde de de Broglie λ_{dB} d'une particule de masse m_{Li_2} et de vitesse v_0.

II.2. Les courbes ci-contre représentent l'évolution des positions horizontales (selon $\vec{e}_y$) des deux condensats en fonction du temps quand ils sont lancés l'un vers l'autre. L'échelle des abscisses est de 1 ms par division : les courbes s'intersectent en particulier pour $t = 14$ ms.

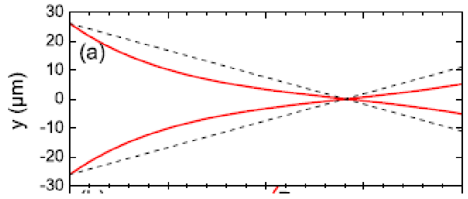


Fig. 1

Lesquelles des courbes correspondent-elles à des mouvements rectilignes uniformes ? Déterminer par lecture graphique la norme des vecteurs vitesse correspondants.

II.3. On s'intéresse dans la suite aux mouvements correspondant aux courbes en traits pleins.

(**a**) Lire les normes des vitesses à l'instant où les deux condensats se rencontrent et calculer la longueur d'onde de de Broglie correspondante.

(**b**) La figure 2 est une photographie des deux condensats à l'instant où ils se rencontrent (obtenue en mesurant leur absorbance), accompagnée du profil de densité correspondant. Mesurer la valeur de l'interfrange correspondant et commenter. L'intensité du signal observé est proportionnelle au carré de l'amplitude de probabilité.

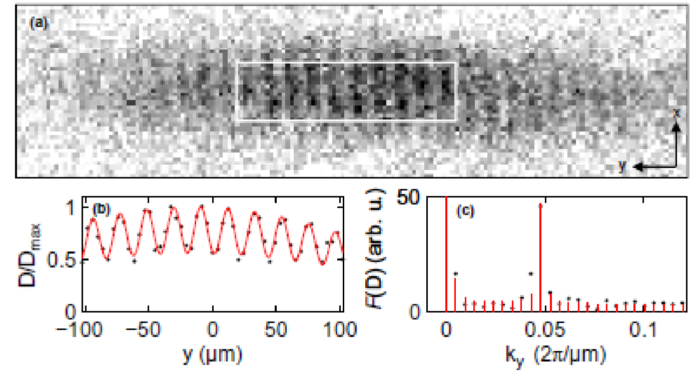


Fig. 2 : La figure (a) est la photographie à l'instant où les deux condensats se rencontrent. La figure (b) représente le profil de la partie centrale. La figure (c) (pas nécessaire ici) représente la décomposition en série de Fourier de la courbe de la figure (b), k_y ayant la dimension d'un vecteur d'onde. Le signal représenté est proportionnel à la densité de probabilité de présence.

(**c**) Déduire de ces mesures la masse des particules dont on observe les ondes des matière et commenter.

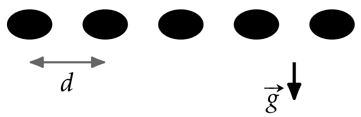
(**d**) Si les vitesses étaient celles données par les courbes en traits pointillés de la figure 1, aurait-on pu observer ces franges d'interférences ?

III Interférences dans un réseau de condensats

Dans cette nouvelle expérience, un condensat d'atomes de ^{87}Rb de masse m_{Rb} est découpé en plusieurs condensats situés chacun aux nœuds d'une onde stationnaire formée par deux faisceaux lasers.

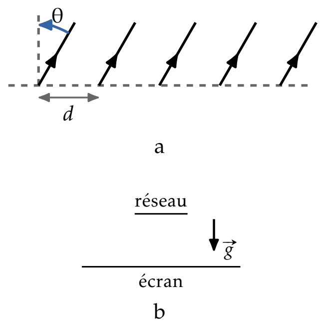
On désigne par d la distance entre deux neuds consécutifs. On coupe ensuite les dispositifs assurant le confinement des condensats et ceux-ci chutent librement sous l'effet du poids pendant une durée $T = 22\,\text{ms}$ avant qu'on n'en prenne une photographie. On réalise ainsi l'analogue de la diffraction de la lumière par un réseau.

FIG. 3



III.1. On établit dans cette question la diffraction d'une onde optique par un réseau de pas d.

FIG. 4



L'onde incidente est monochromatique de longueur d'onde λ et on étudie la figure d'interférences sur un écran situé à la distance D du plan du réseau (voir la Figure 4b). On pourra admettre le résultat donné pour poursuivre.

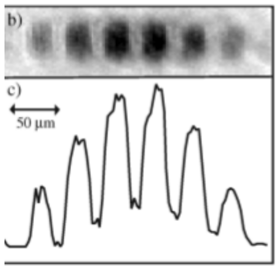
(**a**) Déterminer les directions θ dans lesquelles les interférences seront constructives (voir la Figure 4a).

(**b**) En déduire que si $\lambda/d \ll 1$, on pourra observer au centre de l'écran une figure d'interférences dont l'interfrange est $\lambda D/d$.

III.2. (**a**) En considérant que la chute des condensats, initialement immobiles, peut être décrite classiquement, montrer brièvement que la distance D parcourue avant la prise d'image et la vitesse verticale v des condensats à cet instant ont pour expression :

$$D = gT^2/2 \qquad v = gT.$$

(**b**) En déduire l'expression de la longueur de de Broglie à la fin de la chute en fonction de h, g, m_{Rb} et T. Calculer sa valeur.



(**c**) La figure ci-contre représente la distribution des atomes après une chute de durée T. Proposer une détermination de l'interfrange, en fonction des paramètres de la question précédente et $d = 2{,}7\,\mu\text{m}$, en admettant qu'on peut utiliser les résultats de la question **III.1b**. Justifier que l'interfrange observé est supérieur à celui déterminé en utilisant la valeur de la question **III.2b**

(**d**) Proposer un calcul plus précis de l'interfrange. On n'effectuera pas le calcul.

III.3. La longueur d'onde des deux lasers utilisés pour former l'onde stationnaire découpant le condensat initial est $\lambda_b = 532\,\text{nm}$. Quelle serait la distance entre deux nœuds consécutifs de l'onde stationnaire qu'ils réaliseraient s'ils étaient rigoureusement contrapropageant ? En déduire l'angle entre les deux faisceaux choisi dans l'expérience pour découper le condensat. On fera un schéma pour illustrer les notations.

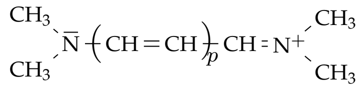
Références :

"Observation of interference between two molecular Bose–Einstein condensates", C. Kohstall et al., New Journal of Physics 13 (2011) 065027 (section II), "Interference of an Array of Independant Bose-Einstein Condensates", Z. Hadzibabic et al., Physical Review Letters 93 (2004) 180403-3 (section III).

Exercice 1 : Couleur de colorants moléculaires

On s'intéresse aux streptocyanines, des colorants organiques répandus.

Dans ces molécules, le motif CHCH est répété p fois, avec $p \in \mathbb{N}^\star$. Leur couleur varie du rouge (pour $p = 2$) au cyan (pour $p = 5$). On interprète ces résultats en étudiant l'état quantique des électrons. Une molécule possède en effet $2(p+1)$ électrons délocalisés entre les deux atomes d'azote N. On modélise cette zone par un puits quantique infini unidimensionnel.



Données : masse d'un électron $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}$, célérité de la lumière dans le vide $c = 299\,792\,458\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, constante de Planck $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}$.

1. (**a**) En admettant que toutes les liaisons C−C et C−N ont même longueur $a = 1{,}39 \cdot 10^{-10}\,\text{m}$, déterminer la longueur ℓ_p sur laquelle les électrons sont susceptibles de se déplacer.

   (**b**) Établir l'énergie E_n du niveau d'énergie n (pour $n \in \mathbb{N}^\star$) dans un puits de longueur ℓ_p.

   (**c**) On peut placer au plus deux électrons dans un même niveau d'énergie. Quelle est la répartition des électrons délocalisés pour laquelle leur énergie totale est minimale ?

2. Lorsque la molécule absorbe un photon, un des électrons délocalisés change de niveau d'énergie pour un niveau d'énergie précédemment non occupé, la différence entre ces deux niveaux étant égale à l'énergie du photon.

   (**a**) Montrer que la plus grande longueur d'onde que la molécule peut absorber a pour expression :

   $$\lambda_{\text{max}}(p) = \frac{8ma^2c}{h} F(p),$$

   avec $F(p)$ une fraction rationnelle en p.

   (**b**) Calculer $\lambda_{\text{max}}(p)$ pour $p = 2$ et $p = 5$ et commenter.

Données : masse de l'électron $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}$, vitesse de la lumière dans le vide $c = 3{,}0 \cdot 10^{8}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, constante de Planck $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}$.

Correction du problème 1

I Généralités

1. (a) On a $E_p = p^2/(2m)$.

   (b) On a $\lambda_{\text{dB}} = h/p$.

   (c) Les états stationnaires sont ceux pour lesquels il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $2\ell = n\lambda_{\text{dB}}$. On a alors $E_p = n^2h^2/(8m\ell^2)$. On a alors :

$$|\Psi_n(y)|^2 \propto \sin^2(2\pi y/\lambda_{\text{dB}}) = \sin^2(n\pi y/\ell). \quad (2)$$

2. (a) On a $A_{-p} = -A_{-p}$ et $E_p = p^2/(2m) = E_{-p}$, on exprime donc :

$$\psi_p(y,t) + \psi_{-p}(y,t) = A_p e^{-E_p t/\hbar}\left(e^{ipy/\hbar} - e^{-ip_y/\hbar}\right) = 2iA_p e^{-E_p t/\hbar}\sin(py/\hbar)$$
$$\to |\psi_p(y,t) + \psi_{-p}(y,t)|^2 \propto \sin^2(py/\hbar) = (1 - \cos(2py/\hbar))/2 \quad (3)$$

   (b) Avec $p = n\hbar/\lambda_{\text{dB}}$, on retrouve l'expression (2). Comme pour tout phénomène ondulatoire, une onde stationnaire peut être décrite comme la superposition de deux ondes synchrones et contra-propageantes.

II Interférences entre deux condensats en mouvement

1. On a : $\lambda_{\text{dB}} = h/(mv_0)$.

2. Sur les courbes en pointillés, on a $\dot{y} =$ cste et on lit $v = \pm 1{,}8\,\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$.

3. (a) On mesure graphiquement la pente de la tangente aux courbes en $t = 14\,\text{ms}$, elle vaut : $v = 0{,}71\,\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$. On en déduit $\lambda_{\text{dB}} = h/(mv) = 44\,\mu\text{m}$.

   (b) En notant δ l'interfrange, on lit $10\delta = 200\,\mu\text{m}$, soit $\delta = 20\,\mu\text{m}$, environ la moitié de la longueur d'onde λ_{dB}.

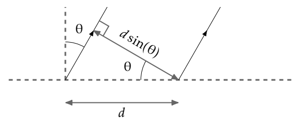
   (c) Dans cette expérience, on observe une onde stationnaire, somme de deux ondes contrapropageantes. L'expression (3) relie alors la quantité de mouvement p de chacune des ondes contra-propageantes à l'interfrange i : on a $p = \hbar\pi/i$. On calcule donc $m = p/v = \hbar\pi/(iv) = 9{,}202\,875\,055\,56 \cdot 10^{-27}\,\text{kg} \simeq 14m$. Les particules interférant ont bien une masse égale au double de celle d'un atome de ^{7}Li : ce sont bien des molécules diatomiques Li_2.

   (d) Avec une vitesse deux fois plus grande, l'interfrange aurait été deux fois plus petit. La résolution de la figure 2 était déjà à peine suffisante pour y distinguer l'interfrange, une vitesse deux fois plus grande n'aurait pas permis de distinguer de modulation.

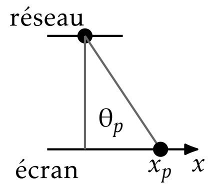
III Interférences dans un réseau de condensats

1. (a)

   La différence de marche entre les ondes de deux condensats consécutifs est $d\sin(\theta)$ comme on le voit sur la figure ci-contre. Les interférences seront donc constructives pour les angles θ_p tels que $d\sin(\theta_p) = p\lambda$. On nomme « ordre p » la direction définie par l'angle θ_p.



   (b) Pour $\lambda \ll d$, les ordres de faible valeur de p correspondent à $\sin(\theta) \ll 1$ soit $\sin(\theta) \simeq \theta \simeq \tan(\theta)$.



   La figure ci-contre assure alors que l'ordre d'interférences p donnera une tache lumineuse au point x_p tel que $x_p = D\tan(\theta_p) \simeq D\sin(\theta_p) = Dp\lambda/d$. La distance entre deux ordres consécutifs sera donc $D\lambda/d$.

2. (a) Pour une chute libre verticale selon $-\overrightarrow{e_z}$, on a $z = z_0 - gT^2/2$ et $\dot{z} = 0 - gT$.

   (b) On en déduit $\lambda_{\text{dB}} = h/m|\dot{z}| = h/(mgT) = 2{,}1 \cdot 10^{-8}\,\text{m}$.

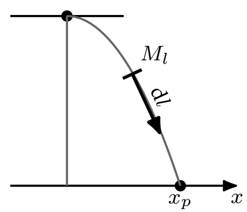
   (c) On calcule l'interfrange $i = \lambda D/d = hD(mgTd)$, avec $D = gT^2/2$. On obtient : $i = hT/(2md) = 19\,\mu\text{m}$. La figure donne plutôt un interfrange de $40\,\mu\text{m}$ environ deux fois plus grand. En effet la longueur d'onde λ_{dB} varie au cours de la chute, à mesure que la vitesse augmente. La longueur d'onde « moyenne » sur l'ensemble de la chute est donc plus grande que la valeur au moment de l'impact et l'interfrange est donc plus grand.

   (d) Il faudrait en fait calculer la phase accumulée sur les trajectoires classiques, paraboliques, conduisant en un point x_p donné.

   En un point de cette trajectoire, la phase φ s'accroît d'une quantité élémentaire $\mathrm{d}\Phi$ sur une distance élémentaire $\mathrm{d}l$ selon :

$$\mathrm{d}\Phi = k(l)\,\mathrm{d}l = \frac{2\pi\,\mathrm{d}l}{\lambda} = \frac{2\pi m v(l)\,\mathrm{d}l}{h} = \frac{mv\,\mathrm{d}l}{\hbar},$$

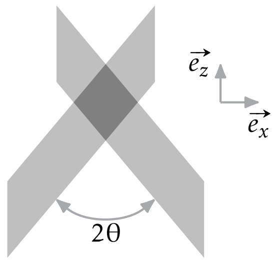
   avec $v(l)$ la norme de la vitesse classique au point $M(l)$ quand la distance classique parcourue est l.



3. Deux lasers contrapropageants de longueur d'onde λ et de pulsation ω produisent une onde dont l'intensité lumineuse I est proportionnelle à :

DM02-mecaQ.tex,version du 16 octobre 2017

$$I \propto \left[\cos(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}) + \cos(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda})\right]^2$$
$$= \cos(\omega t)^2 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)^2 = \frac{\cos(\omega t)^2}{2}(1 + \cos(\frac{4x}{\lambda})).$$



La période spatiale est donc $\lambda/2 = 270\,\text{nm}$, dix fois plus faible que la valeur de d dans l'expérience.
On peut obtenir une onde stationnaire de période spatiale plus grande en utilisant des faisceaux formant un angle 2θ plus faible que π comme proposé sur le schéma ci-contre.
Les vecteurs d'onde sont alors (pour une propagation de bas en haut) respectivement :

$$\overrightarrow{k_1} = \frac{2\pi(\cos(\theta)\overrightarrow{e_z} + \sin(\theta)\overrightarrow{e_x})}{\lambda} \qquad \overrightarrow{k_2} = \frac{2\pi(\cos(\theta)\overrightarrow{e_z} - \sin(\theta)\overrightarrow{e_x})}{\lambda}.$$

En choisissant les phases nulles en $x = 0$, $z = 0$, $t = 0$, l'intensité lumineuse I est alors proportionnelle à :

$$I \propto \left(\cos\left[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(z\cos(\theta) + x\sin(\theta))\right] + \cos\left[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(z\cos(\theta) - x\sin(\theta))\right]\right)^2$$
$$= \cos\left[\omega t - \frac{2\pi z\cos(\theta)}{\lambda}\right]^2 \cos\left[\frac{2\pi x\sin(\theta)}{\lambda}\right]^2$$
$$= \frac{\cos\left[\omega t - \frac{2\pi z\cos(\theta)}{\lambda}\right]^2}{2}\left(1 + \cos\left[\frac{4\pi x\sin(\theta)}{\lambda}\right]\right).$$

On a donc une structure d'onde progressive selon $\overrightarrow{e_z}$, de longueur d'onde $\lambda/\cos(\theta)$ et une structure d'onde stationnaire selon $\overrightarrow{e_x}$, avec une période spatiale $\lambda/(2\sin(\theta))$. Pour retrouver la valeur de d proposée, il suffit de choisir θ tel que :

$$\frac{\lambda}{2\sin(\theta)} = d = 2{,}7\,\mu\text{m} \quad \text{soit: } \theta = 0{,}2\,\text{rad} = 11°27'.$$

Correction de l'exercice 1

1. (a) Les électrons sont délocalisés sur $2p$ liaisons C−C, et 2 liaisons C−N, soit une longueur $\ell_p = 2(p+1)a$.

   (b) L'état stationnaire de rang n dans un puits de longueur ℓ_p est tel que la longueur de de Broglie λ_{dB} vérifie $n\lambda_{\text{dB}} = 2\ell_p$. Comme l'électron est libre dans la cavité, son énergie est uniquement cinétique et on a :

$$E_n = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2/\lambda_{\text{dB}}^2}{2m} = \frac{n^2h^2}{8m\ell_p^2} = \frac{n^2h^2}{8m2(p+1)^2a^2} = \frac{n^2h^2}{32m(p+1)^2a^2}$$

   (c) On place 2 électrons dans le niveau $n = 1$, puis 2 dans le niveau $n = 2$, jusqu'au niveau $n = p+1$.

2. (a) On doit promouvoir un électron d'un niveau $n \leqslant p+1$ jusqu'à un niveau $n' > p+1$. La fréquence $\nu_{n\to n'}$ du photon absorbé sera alors :

$$\nu_{n\to n'} = \frac{E_{n'} - E_n}{h} = \frac{h^2}{32ma^2(p+1)^2}(n'^2 - n^2). \tag{4}$$

   La longueur d'onde maximale correspondra à la fréquence ν minimale, soit à $n = p+1$ et $n' = p+2$. On aura donc

$$\lambda_{\max} = \frac{c}{\nu} = \frac{32ma^2c}{h}\frac{(p+1)^2}{(p+2)^2 - (p+1)^2} = \frac{32ma^2c}{h}\frac{(p+1)^2}{2p+3} \tag{5}$$

   (b) On calcule alors :

$$\lambda_2 = 332\,\text{nm} \qquad \lambda_5 = 716\,\text{nm}.$$

   Pour $p = 2$, la molécule absorbe dans le bleu et apparaîtra donc rouge, pour $p = 5$, elle absorbe dans le rouge et apparaîtra bleue.

DM02-mecaQ.tex,version du 16 octobre 2017