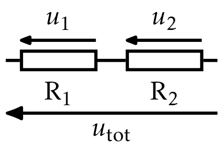
Problème 1 : Ponts de Wheatstone

I Généralités

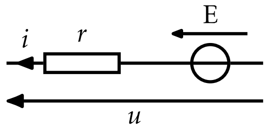
I.1. On considère le dipôle ci-dessous, formé de l'association série de deux résistors de résistances R_1 et R_2.

Établir l'expression du quotient u_2/u_{tot} en fonction des résistances R_1 et R_2.



I.2. On considère le dipôle ci-dessous, formé de l'association série d'un générateur de tension idéal de force électromotrice E et d'un résistor de résistance r.

(**a**) Tracer sa caractéristique statique courant tension $i\,,u$. Donner l'expression de son courant électromoteur noté η.

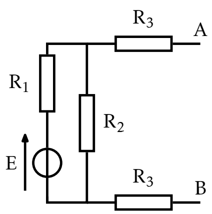


(**b**) Donner la tension indiquée par un voltmètre idéal branché à ses bornes.

(**c**) Donner l'intensité indiquée par un ampèremètre idéal branché à ses bornes.

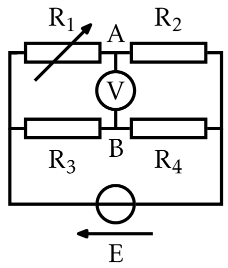
(**d**) On remplace le générateur de force électromotrice E par un fil : quelle est l'indication d'un ohmmètre branché à ses bornes.

I.3. On admet qu'on peut appliquer les résultats de la question **I.2** pour tout générateur linéaire. Déterminer la force électromotrice, le courant électromoteur et la résistance interne du générateur linéaire représenté ci-contre.



II Pont de Wheatstone

On considère le circuit de la figure ci-contre formé d'un générateur idéal de tension, de quatre résistors et d'un voltmètre. On considère dans un premier temps que la résistance du voltmètre est infinie.
Données : $\theta_0 = 250\,°\text{C}$; $R_2 = R_3 = R_4 = 25\,\Omega$; $E = 6{,}0\,\text{V}$.



II.1. (**a**) Déterminer l'expression de la tension U_{AB} en fonction de E et des résistances.

(**b**) En déduire que si $U_{AB} = 0$ les valeurs des résistances vérifient $R_1R_4 = R_2R_3$.

II.2. La résistance R_1 varie en fonction de la température θ (exprimée en °C) selon la loi :

$$R_1 = R_0\,(1 + \theta/\theta_0)\,, \tag{1}$$

où θ_0 est une constante positive.

(**a**) Déterminer la valeur de R_0 pour que la tension U_{AB} soit nulle pour $\theta = 0\,°\text{C}$. On suppose cette condition vérifiée dans toute la suite.

(**b**) Déterminer l'expression de U_{AB} en fonction entre autres de la température θ et calculer sa valeur pour $\theta = 15{,}0\,°\text{C}$.

II.3. (**a**) Utiliser les résultats de la question **I.2** pour déterminer la force électromotrice, le courant électromoteur et la résistance interne du dipôle entre les nœuds A et B, formé par le générateur et les résistors $R_1\,, R_2\,, R_3$ et R_4.

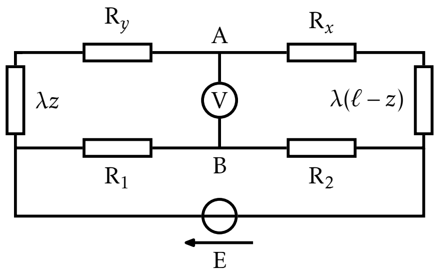
(**b**) On utilise un voltmètre analogique dont la résistance vaut $R_V = 2{,}0\,\text{k}\Omega$. Établir l'expression de la tension U_{AB} en fonction des résistances $R_1\,, R_2\,, R_3\,, R_4\,, R_V$ et la tension E.

(**c**) On lit une température en utilisant l'expression du **II.2b**, *ie* sans tenir compte de la résistance R_V finie. Déterminer l'erreur relative commise lors de la mesure d'une température $\theta = 15\,°\text{C}$. Commenter.

III Pont de Carey Foster

Le voltmètre utilisé est de nouveau considéré idéal.

On étudie une variation du pont de Wheatstone adaptée à la mesure de faibles différences entre deux résistances. Le montage est représenté ci-contre : il utilise un potentiomètre dont la position z du curseur entre $z = 0$ et $z = \ell$ définit les résistances λz et $\lambda(\ell - z)$, avec λ la résistance par unité de longueur. On cherche cette fois à mesurer la différence $R_x - R_y$.



III.1. Déterminer l'expression de z en fonction des résistances pour laquelle la tension U_{AB} est nulle. On la note z_1.

III.2. On intervertit ensuite les résistors R_x et R_y. Déterminer la nouvelle expression de z pour laquelle la tension U_{AB} est nulle. On la note z_2. En déduire que la mesure de $z_2 - z_1$ donne accès à $R_x - R_y$. Quelle est la plus grande valeur de $R_x - R_y$ mesurable ?

Correction du problème 1

I Généralités

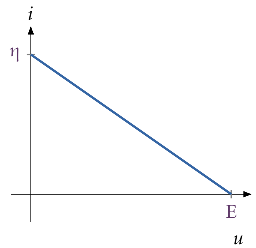
I.1. On reconnaît un pont diviseur de tension :

$$u_2 = \frac{R_2 u_{\text{tot}}}{R_1 + R_2} \tag{2}$$

I.2. (**a**) On a (en prêtant attention à la convention générateur sur le résistor) :

$$u = E - ri \tag{3}$$

sa caractéristique est représentée ci-contre. L'intensité du courant électromoteur est l'intensité quand la tension à ses bornes est nulle : on a donc $\eta = E/r$.



(**b**) Un voltmètre idéal aura une résistance infinie, le courant débité par le générateur sera donc nul et on aura $u = E$.

(**c**) La tension aux bornes d'un ampèremètre idéal sera nulle, le courant débité sera le courant électromoteur d'intensité $\eta = E/r$.

(**d**) L'ohmmètre est branché sur le résistor : il indique r.

I.3. Des transformations Thévenin Norton permettent de transformer le dipôle AB en l'association série :

- d'un générateur idéal de tension $ER_2/(R_1 + R_2)$,
- d'un résistor $R_1R_2/(R_1 + R_2) + R_3 + R_4$.

II Pont de Wheatstone

II.1. (**a**) Le courant dans un voltmètre étant nul, on a deux associations série de résistors, l'expression (2) donne :

$$U_{R_2} = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2} = \frac{E}{1 + R_1/R_2} \quad U_{R_4} = \frac{R_4 E}{R_3 + R_4} = \frac{E}{1 + R_3/R_4}$$
$$\to U_{AB} = U_{R_2} - U_{R_4} = E\left(\frac{1}{1 + R_1/R_2} - \frac{1}{1 + R_3/R_4}\right). \tag{4}$$

(**b**) Pour $U_{AB} = 0$, on aura donc :

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \to R_1R_4 = R_2R_3. \tag{5}$$

II.2. (**a**) On doit avoir :

$$R_1(0\,°\text{C})R_4 = R_2R_3 \to R_0 = \frac{R_2R_3}{R_4} = 25\,\Omega. \tag{6}$$

(**b**) Pour $\theta \neq 0\,°\text{C}$, le pont n'est plus équilibré et la relation (4) donne :

$$U_{AB} = E\frac{R_3/R_4 - R_1/R_2}{(1 + R_1/R_2)(1 + R_3/R_4)} = E\frac{R_3/R_4 - R_0/R_2(1 + \theta/\theta_0)}{(1 + R_0(1 + \theta/\theta_0)/R_2)(1 + R_3/R_4)}$$
$$= -\frac{ER_0\theta/(\theta_0R_2)}{(1 + R_0(1 + \theta/\theta_0)/R_2)(1 + R_3/R_4)} \simeq -\frac{E\theta}{4\theta_0} = -0{,}09\,\text{V}, \tag{7}$$

en utilisant le fait que $R_0 = R_2 = R_3 = R_4$ et le fait que $\theta/\theta_0 \ll 1$

II.3. (**a**) La force électromotrice du générateur est directement la tension $E_{\text{eq}} = U_{AB}$ de l'expression (7) mesurée par le voltmètre. On détermine sa résistance interne en déterminant la résistance équivalente R_{eq} du dispositif quand on remplace le générateur par un fil. Le dipôle est alors équivalent à l'association série des associations parallèles $R_1//R_2$ et $R_3//R_4$, soit :

$$R_{\text{eq}} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3R_4}{R_3 + R_4} \quad \to \eta_{\text{eq}} = E/R_{\text{eq}}. \tag{8}$$

(**b**) Le circuit est équivalent à l'association série du générateur linéaire équivalent de la question suivante en série avec le résistor R_V. Un pont diviseur de tension assure immédiatement que :

$$U_{AB} = \frac{R_V E_{\text{eq}}}{R_V + R_{\text{eq}}} \simeq \frac{-R_V E\theta/(4\theta_0)}{R_V + R_0} = \frac{-E\theta/(4\theta_0)}{1 + R_0/R_V}, \tag{9}$$

en utilisant le fait que $R_0 = R_2 = R_3 = R_4$ et $\theta \ll \theta_0$.

(**c**) Notons $U_{AB\infty}$ l'expression (7) et U_{ABV} l'expression (9). Pour une température $\theta = 15\,°\text{C}$, la tension sera $U_{ABV} = -8{,}9 \cdot 10^{-2}\,\text{V}$. L'expression $U_{AB\infty}$ donne alors $\theta_\infty = -\theta_0 U_{ABV}/E = 14{,}8\,°\text{C}$ soit une erreur relative d'environ 1,3%.

De manière plus générale : une même tension U_{AB} est interprétée comme $\theta_\infty = -4U_{AB}\theta_0/E$ sans considérer R_V alors que la température est en fait $\theta = -4U_{AB}\theta_0(1 + R_0/R_V)/E$. L'écart relatif est donc

$$\frac{\theta_\infty - \theta}{\theta} = \frac{R_0/R_V}{1 + R_0/R_V} \simeq \frac{2R_0}{R_V} = 1{,}25\%. \tag{10}$$

Remarquons cependant que les voltmètres multimètres qu'on utilise habituellement ayant une résistance interne de l'ordre du MΩ, l'erreur relative qu'on commettra sera bien inférieure, de l'ordre de $5 \cdot 10^{-5}$.

III Pont de Carey Foster

III.1. La relation du pont de Wheatstone s'écrit ici :

$$R_1(R_x + \lambda(\ell - z_1)) = R_2(R_y + \lambda z_1) \to z_1 = \frac{R_1(R_x + \lambda\ell) + R_2 R_y}{\lambda(R_1 + R_2)} \tag{11}$$

III.2. On intervertit R_x et R_y dans l'expression précédente :

$$R_1(R_y + \lambda(\ell - z_2)) = R_2(R_x + \lambda z_2). \tag{12}$$

La différence des égalités (11) et (12) donne alors :

$$\begin{aligned} R_1\left(R_x - R_y + \lambda(z_2 - z_1)\right) &= R_2\left(R_y - R_x + \lambda(z_1 - z_2)\right)(R_1 + R_2)(R_x - R_y) \\ &= (R_1 + R_2)\lambda(z_1 - z_2) \\ R_x - R_y &= \lambda\left(z_1 - z_2\right). \end{aligned} \tag{13}$$

Au maximum $z_1 - z_2 = \ell$ soit une valeur maximale de $\lambda\ell$ pour $R_x - R_y$.