Problème 1 : Supercondensateur

On étudie quelques applications industrielles de condensateurs de grande capacité. On note C_0 la capacité d'un de ces condensateurs.

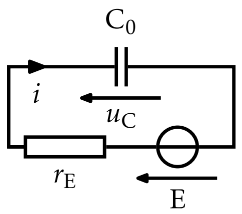
Données :

- capacité d'un supercondensateur $C_0 = 3200\,\mathrm{F}$,
- tension maximale aux bornes d'un supercondensateur $U_{\max} = 2{,}85\,\mathrm{V}$
- résistance d'un « module » $r_m = 10\,\mathrm{m\Omega}$.

I Dimensionnement d'un module

I.1. On considère un condensateur de capacité C_0 initialement déchargé aux bornes duquel on branche à l'instant $t = 0$ un générateur de tension de force électromotrice $E = 2\,\mathrm{V}$ et de résistance interne $r_E = 1\,\Omega$.

(a) Établir l'expression de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.



(b) En déduire la durée nécessaire pour avoir $u_c > 1{,}75\,\mathrm{V}$.

(c) Déterminer également l'expression de l'intensité $i(t)$ traversant le condensateur.

I.2. Rappeler l'expression de l'énergie électrostatique stockée dans un condensateur. En déduire la capacité C nécessaire pour stocker une énergie de $\mathcal{E}_n = 100\,\mathrm{MJ}$ quand la tension aux bornes du condensateur est $U_n = 500\,\mathrm{V}$.

I.3. (a) Déterminer la capacité de l'association série de deux condensateurs de capacités C_1 et C_2.

(b) Déterminer la capacité de l'association parallèle de deux condensateurs de capacités C_1 et C_2.

(c) En déduire comment brancher des supercondensateurs de capacité C_0 pour que leur association stocke l'énergie $\mathcal{E}_n$ quand la tension à ses bornes est U_n sans que la tension aux bornes de chacun des supercondensateurs ne dépasse $U_{\max}$. On nomme « module » cette association et on note C_m sa capacité.

II Charge d'un module

II.1. On charge un « module » par un générateur de tension de force électromotrice $E = 500\,\mathrm{V}$ dont la résistance interne est $r_E = 1\,\Omega$.

(a) Déterminer l'ordre de grandeur de la durée de charge.

(b) Déterminer l'expression de la puissance fournie par le générateur lors de la charge et en déduire la puissance maximale qu'il doit pouvoir fournir.

(c) Déterminer l'expression de la puissance dissipée par effet Joule et en déduire l'instant où elle est égale à la moitié de la puissance fournie par le générateur.

II.2. Déterminer l'expression, en fonction de la capacité C_m, de la résistance r_E et de la tension E de l'énergie fournie par le générateur, notée $\mathcal{E}_E$ et calculer le quotient $\mathcal{E}_n/\mathcal{E}_E$. Commenter.

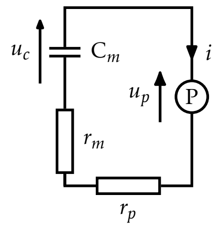
II.3. On charge d'abord le « module » par un générateur de tension $E/2$ puis quand la tension $u_C \simeq E/2$ on remplace ce générateur par un générateur de tension E.

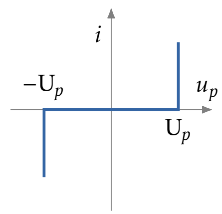
(a) Tracer l'allure de la tension u_C aux bornes du module au cours de ces deux étapes.

(b) Déterminer l'énergie totale fournie par les deux générateurs, notée $\mathcal{E}'_E$, et commenter. Quel défaut présente cette technique ?

III Alimentation d'un moteur

On modélise le module comme un condensateur de capacité C_m en série avec un résistor de résistance r_m. Le module est initialement chargé sous une tension de $E = 500\,\mathrm{V}$. On le branche à l'instant $t = 0$ sur un moteur électrique.





III.1. Dans un certain régime d'utilisation, la caractéristique du moteur noté P peut être modélisée par la caractéristique en convention récepteur du moteur sur la figure ci-dessus : elle est caractérisée par la tension $U_p < 500\,\mathrm{V}$. On considère qu'il possède de plus une résistance interne $r_p = 1\,\Omega$.

(a) Déterminer l'expression de la tension $u_c(t)$ et tracer l'allure de la courbe représentative de $u_c(t)$.

(b) Déterminer l'expression de la puissance reçue par le moteur, tracer son allure.

(c) Pour quelle valeur de U_p (en fonction de E) la puissance initiale est-elle maximale ? Calculer la valeur de ce maximum et commenter.

III.2. On peut également faire fonctionner le moteur de manière à ce que l'intensité du courant qui le traverse soit constante, en faisant varier U_p en fonction du temps. On note $I_p \geqslant 0$ l'intensité constante traversant alors le moteur.

(a) Déterminer dans ces conditions l'expression de $u_c(t)$ ainsi que celle de $U_p(t)$ correspondante. Tracer l'allure de leurs courbes représentatives ainsi que l'expression de la durée de fonctionnement.

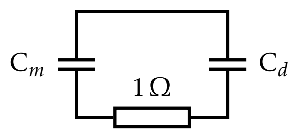
(b) Déterminer l'expression de la puissance reçue par le moteur en fonction du temps et tracer sa courbe représentative.

III.3. Décrire brièvement, en s'appuyant sur des allures de courbes, le fonctionnement si le moteur consomme désormais une puissance constante. On ne cherchera pas à résoudre l'équation différentielle.

IV Dépannage

On considère le cas où ce moteur alimente un véhicule. La tension de charge initiale est toujours $E = 500\,\mathrm{V}$. On met en service un véhicule de recharge mobile, équipé d'une cellule de deux « modules » branchés en parallèle, de capacité notée C_d.

Le véhicule de recharge mobile rejoint un véhicule équipé d'un « module » C_m, en panne car sa tension a chuté jusqu'à 80 V. Le véhicule de recharge mobile branche son module sur celui d'un autre véhicule par l'intermédiaire d'un résistor de résistance 1 Ω.



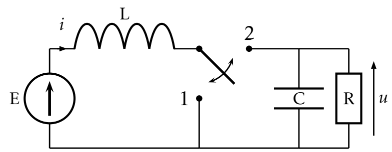
IV.1. Déterminer les tensions aux bornes de chacun des modules à l'issue de la recharge.

IV.2. Déterminer l'énergie dissipée par effet Joule lors de la recharge ainsi que la constante de temps de celle-ci.

Problème 2 : Étude d'un hacheur

Un hacheur est un dispositif réalisant un générateur de tension quasi-stationnaire u variable à partir d'un générateur de tension stationnaire E fixée. On utilise à cet effet un système de commutation périodique dans un circuit comportant entre autres un condensateur et une bobine.

On étudie ici le montage particulier, nommé « convertisseur boost » représenté ci-contre comportant une source idéale de tension stationnaire $E > 0$ et produisant une tension u quasi-stationnaire aux bornes de la résistance R d'utilisation. La période du système est T et on nomme α son *rapport cyclique* : pour la période $t \in [0\,;T]$, l'interrupteur est en position 1 pour $t \in [0\,;\alpha T]$ et en position 2 pour $t \in [\alpha T\,;T]$.



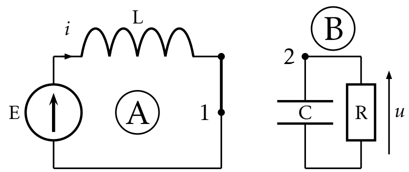
Dans toute la suite, l'intensité du courant traversant la bobine sera notée i et la tension aux bornes du condensateur sera notée u.

Les différentes parties du problème sont largement indépendantes.

I Étude générale

On étudie le comportement général de ce circuit suivant la position de l'interrupteur.

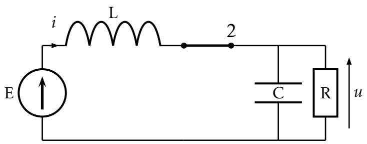
1. L'interrupteur est à l'instant $t = 0$ en position 1. Le système est donc formé des deux circuits à une maille déconnectés A et B représentés ci-contre. La tension u aux bornes du condensateur à cet instant est notée U_0 et l'intensité du courant traversant la bobine est notée I_0. On étudie l'évolution du système pour $t \in [0\,;\alpha T]$ jusqu'au basculement de l'interrupteur en position 2.



(**a**) Établir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité i dans le circuit A et en déduire l'expression de $i(t)$ en fonction de $I_0\,, L\,, E$ et t. Déterminer en particulier l'expression de i à la fin de cette étape, quand $t = \alpha T$. On la note I_1.

(**b**) Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u dans le circuit B et en déduire l'expression de $u(t)$ en fonction de $U_0\,, R\,, C$ et t. Déterminer en particulier l'expression de u à la fin de cette étape, quand $t = \alpha T$. On la note U_1.

2. À l'instant $t = \alpha T$, l'interrupteur bascule en position 2. Le système est alors celui représenté sur la figure ci-contre.



(**a**) Établir la nouvelle équation différentielle vérifiée par la tension u aux bornes du condensateur. On la mettra sous la forme : $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 u_\infty$,
avec ω_0, Q et u_∞ des constantes qu'on exprimera en fonction des constantes du problème.

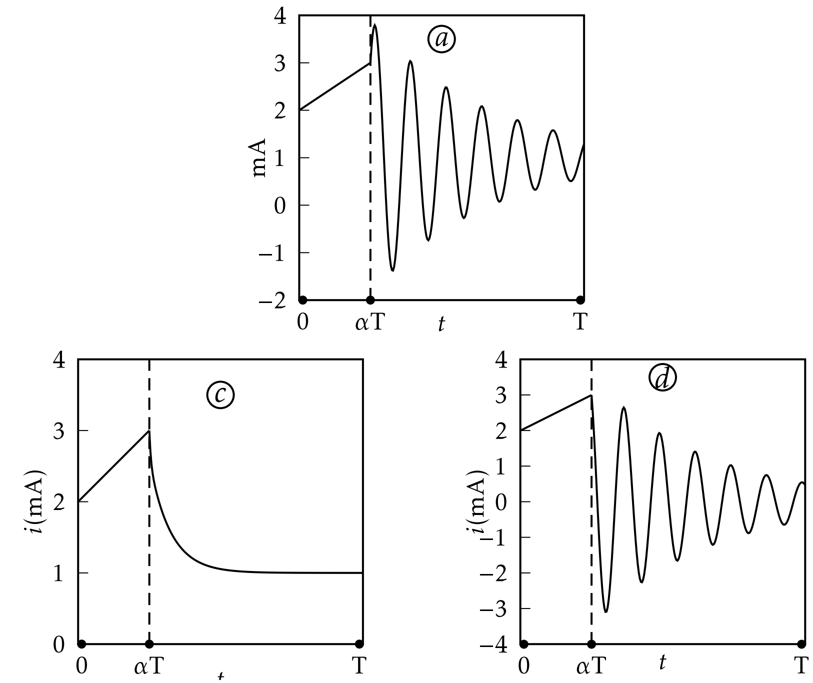
2. (**b**) Déterminer les valeurs de la tension u et de sa dérivée temporelle $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ immédiatement après la commutation, en $t = \alpha T^+$. On les exprimera entre autres à l'aide des valeurs U_1 et I_1.

(**c**) Déterminer de même les valeurs de l'intensité i et de sa dérivée temporelle $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ immédiatement après la commutation, en $t = \alpha T^+$. On les exprimera entre autres à l'aide des valeurs U_1 et I_1.

(**d**) À quelles conditions portant sur $I_1\,, U_1$ et les paramètres du circuit a-t-on $\left(\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right)_{t=\alpha T^+} < 0$ et $\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)_{t=\alpha T^+} > 0$? On admet dans la suite que ces conditions sont vérifiées.

3. On admet que l'intensité i vérifie une équation différentielle de la même forme $\dfrac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 i = \omega_0^2 i_\infty$ où ω_0 et Q ont la même valeur que précédemment.

(**a**) On propose plusieurs courbes représentant $i(t)$ sur la période $[0\,;T]$ pour un circuit tel que $Q = 10$. Déterminer laquelle correspond à la solution du problème en précisant pour chaque courbe incorrecte pourquoi elle ne convient pas.



(**b**) Représenter l'allure correspondante de la tension u aux bornes du condensateur pour le même circuit.

II Régime d'utilisation

Afin que la tension u soit quasi-stationnaire, le hacheur est utilisé dans un régime où la période T de commutation est très petite devant les échelles de temps caractéristiques des circuits. On peut donc utiliser des approximations linéaires des variations de u et i durant chaque étape de la forme : $u(t) = u(t_0) + \left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)_{t=t_0}(t - t_0)$ et

$i(t) = i(t_0) + \left(\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right)_{t=t_0} (t - t_0).$

1. **(a)** En utilisant les résultats du **2**, mettre, pour $t \in [\alpha T; T]$ l'expression de l'intensité i sous la forme : $i(t) = I_1 + \alpha_{i2}(t - \alpha T)$, avec α_{i2} une constante qu'on exprimera entre autres en fonction de U_1.

   (b) En utilisant les résultats du **2**, mettre, pour $t \in [\alpha T; T]$ l'expression de la tension u sous la forme : $u(t) = U_1 + \alpha_{u2}(t - \alpha T)$, avec α_{u2} une constante qu'on exprimera entre autres, en fonction de I_1 et U_1.

   (c) Mettre, pour $t \in [0\,; \alpha T]$ la tension u sous la forme : $u(t) = U_0 + \alpha_{u1} t$, avec α_{u1} une constante qu'on exprimera entre autres en fonction de U_0. On pourra utiliser le développement limité à l'ordre 1 en $x = t/RC \ll 1$: $e^{-x} = 1 - x + o(x)$.

2. On suppose dans toute la suite qu'un régime périodique de période T est établi.

   (a) Que doivent valoir $u(T)$ et $i(T)$? En déduire les expressions de U_0 et U_1 en fonction de $E\,, \alpha$ et du quotient T/RC.

   (b) Calculer le taux d'ondulation défini par $\frac{U_0 - U_1}{U_0}$. Justifier qu'on peut réaliser ainsi une source de tension quasi-stationnaire qui élève la tension de la source idéale E. On ne cherchera pas à calculer I_0 et I_1 pour l'instant.

3. **(a)** Exprimer l'énergie électrique W_{L1} reçue par la bobine sur l'intervalle $[0\,; \alpha T]$ et l'énergie W_{L2} qu'elle reçoit pendant l'intervalle $[\alpha T; T]$ en fonction entre autres de I_1 et I_0. Que vaut la somme $W_{L1} + W_{L2}$ quand le régime périodique est établi ? Que vaut la somme $W_{C1} + W_{C2}$ des énergies électriques reçues par le condensateur dans les mêmes conditions.

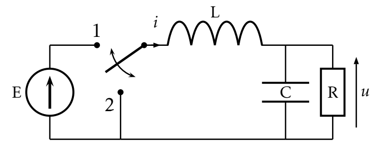
   (b) En déduire une relation entre l'énergie électrique $\mathcal{E}_{\mathrm{g}}$ fournie par le générateur et l'énergie électrique reçue par le résistor pendant une période.

   (c) Exprimer l'énergie $\mathcal{E}_{\mathrm{g}}$ en fonction de E, T, et de la valeur moyenne de l'intensité i, qu'on note I_{moy}. On rappelle que la valeur moyenne d'une grandeur $X(t)$ sur une période T est $X_{\mathrm{moy}} = \frac{1}{T}\int_0^T X(t)\mathrm{d}t$.

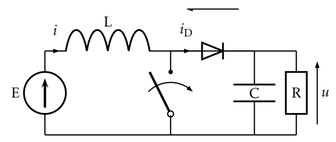
   (d) On considère T/RC suffisamment petit pour considérer u stationnaire. En déduire I_{moy} en fonction de $E\,, \alpha$ et R puis I_0 et I_1 (on justifiera brièvement que $I_{\mathrm{moy}} = \frac{I_0 + I_1}{2}$). À quelle condition portant sur R l'intensité i est-elle toujours positive ?

III Réalisation expérimentale

1. On admet que le montage ci-contre permet également de réaliser une source quasi-stationnaire de tension $U > 0$. Montrer que cette fois-ci $U < E$. On commencera par justifier que la décroissance du courant se produit quand l'interrupteur est dans la position 2.



2. On revient au premier montage pour lequel on souhaite s'assurer que l'intensité i du courant traversant la bobine est toujours positive, quelle que soit la valeur de la résistance R. Montrer que le montage ci-dessous utilisant une diode idéale et un interrupteur simple réalise cette condition pour le premier montage « convertisseur Boost ». La diode est caractérisée par :



   - $i_D = 0$ quand $u_D \leqslant 0$: diode bloquante,
   - $u_D = 0$ quand $i_D \geqslant 0$: diode passante.

   On vérifiera en particulier que la diode est bloquante quand l'interrupteur est fermé.

Correction du problème 1

I Dimensionnement d'un module

I.1. Il s'agit de la charge d'un dipôle RC par une source de tension idéale.

(**a**) On a immédiatement : $\mathrm{d}u_c/\mathrm{d}t + u_c/(r_E C_0) = E/(r_E C_0)$. La continuité de la tension u_c assure que $u_c(0) = 0$. L'unique solution vérifiant cette équation est :

$$u_c = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad \text{avec: } \tau = r_E C_0. \tag{1}$$

(**b**) On aura $E - u_c = Ee^{-t/\tau} \leqslant 0{,}25\,\mathrm{V}$ pour

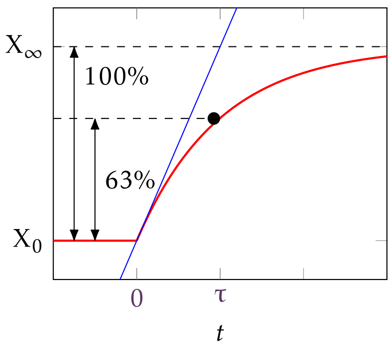
$$t \geqslant \tau \ln(E/0{,}25\,\mathrm{V}) = 6{,}6 \cdot 10^3\,\mathrm{s} = 1{,}84\,\mathrm{h} = 1\,\mathrm{h}51\,\mathrm{min}. \tag{2}$$

(**c**) On a :

$$i = C_0 \frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = \frac{E}{r_E} e^{-t/\tau}. \tag{3}$$

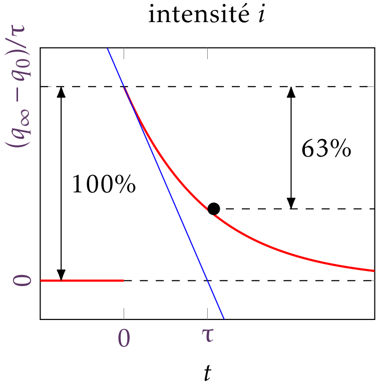
On a représenté ci-dessous leurs courbes représentatives :

charge q ou tension u_C



On a ici $u_{c0} = 0$; $u_{c\infty} = E$.

intensité i



On a ici $(q_\infty - q_0)/\tau = E/r_E$.

I.2. L'énergie est $\mathcal{E}_n = CU_n^2/2$. On doit donc avoir ici :

$$C_m = \frac{2\mathcal{E}_n}{U_n^2} = 800\,\mathrm{F}. \tag{4}$$

I.3. Comme vu en TD, la capacité de l'association série de deux condensateurs de capacité C_1 et C_2 est $C_1C_2/(C_1 + C_2)$, son inverse est $1/C_1 + C_2$.

I.4. De même la capacité de l'association parallèle de deux condensateurs de capacité C_1 et C_2 est $C_1 + C_2$.

I.5. On généralise immédiatement : une association série de p condensateurs de même capacité C_0 aura pour capacité C_0/q alors que leur association parallèle aura pour capacité pC_0. On doit ici réaliser p associations parallèle de p' condensateurs en série de telle sorte que :

- la tension aux bornes de chacun, qui vaut U_n/p' n'excède pas $U_{\max}$: il faut donc $p' > U_n/U_{\max} = 175{,}4$ et on peut choisir $p' = 176$;
- la capacité de l'ensemble vaille C_m : Comme chaque association série a une capacité C_0/p', on doit avoir $pC_0/p' = C_m$, soit $p = p' \times C_m/C_0 = 44$.

II Charge d'un module

II.1. (**a**) On peut négliger la résistance du module devant celle du générateur (qui modélise également les résistances de contact). Le résultat de la question **I.1** donne ici $\tau = r_E C_m = 800\,\mathrm{s} = 13\,\mathrm{min}20\,\mathrm{s}$.

(**b**) La puissance fournie par le générateur, notée $\mathcal{P}_E$ est, puisqu'il est en convention générateur :

$$\mathcal{P}_E = Ei = \frac{E^2}{r_E} e^{-t/(r_E C_m)}. \tag{5}$$

Elle est maximale en $t = 0$ où elle vaut $E^2/r_E = 250\,\mathrm{kW}$.

(**c**) La puissance dissipée par effet Joule est $\mathcal{P}_\mathrm{J} = r_E i^2$. Elle sera égale à la moitié de la puissance fournie par le générateur quand :

$$\mathcal{P} = r_E i^2 = \frac{E^2}{r_E} e^{-2t/\tau} = \frac{\mathcal{P}_E}{2} = \frac{E^2}{2r_E} e^{-t/\tau} \to t = \tau \ln(2) = 554\,\mathrm{s} = 9\,\mathrm{min}15\,\mathrm{s}. \tag{6}$$

Remarquons que cette puissance représente toute la puissance fournie par le générateur à l'instant initial, puisqu'alors la puissance reçue par le condensateur de tension nulle est nulle. La proportion de la puissance fournie par le générateur qui accroît l'énergie du condensateur augmente ensuite pendant que celle dissipée par effet Joule diminue.

II.2. L'énergie fournie par le générateur est :

$$\mathcal{E}_E = \int_{t=0}^{\infty} \mathcal{P}_E \,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{\infty} \frac{E^2}{r_E} e^{-t/(r_E C_m)} \,\mathrm{d}t = C_m E^2. \tag{7}$$

On a chaque instant :

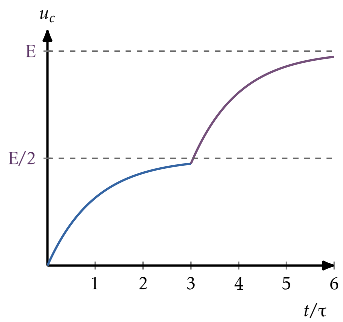
$$Ei = u_c i + RC \frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} i \rightarrow \mathcal{P}_E = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_\mathrm{J}, \tag{8}$$

d'où l'on vérifie que la puissance dissipée par effet Joule $\mathcal{P}_\mathrm{J}$ est bien la différence entre celle fournie par le générateur et celle reçue par le condensateur.

Le condensateur est chargé de 0 à E, il a donc reçu l'énergie électrostatique $\mathcal{E}_n = C_m E^2/2$; l'énergie dissipée par effet Joule est alors $\mathcal{E}_E - \mathcal{E} = n = C_m E^2/2 = \mathcal{E}_n$. On constate qu'on dissipe autant d'énergie dans le résistor qu'on en stocke dans le condensateur.

II.3. Dans les deux cas la constante de temps est la même puisqu'elle ne dépend que de r_E et C et pas de la tension du générateur.

(**a**) L'allure des évolutions de u_c est donnée sur la figure ci-contre.



(**b**) En adaptant les résultats précédents, on obtient les expressions de $u_c(t)$ et $i(t)$ suivantes :

générateur $E/2$: $u_c = \frac{E}{2} e^{-t/\tau}$ soit $i_1(t) = \frac{E}{2r_E} e^{-t/\tau}$

générateur E : $u_c(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right) + \frac{E}{2} e^{-t/\tau}$ soit $i_2(t) = \frac{E}{2r_E} e^{-t/\tau}$

On calcule donc l'énergie dissipée par effet Joule :

$$\mathcal{E}'_J = \int_{t=0}^{\infty} r_E i_1^2(t)\,\mathrm{d} + \int_{t=0}^{\infty} r_E i_2^2(t)\,\mathrm{d} = 2\int_{t=0}^{\infty} \frac{E^2}{4r_E} e^{-2t/\tau}\,\mathrm{d}t = \frac{C_m E^2}{4}.$$

On dissipe de cette manière deux fois moins d'énergie par effet Joule. Ce résultat n'est pas surprenant puisque la valeur maximale du courant est deux fois plus faible, que la puissance est quadratique en courant : bien qu'on effectue deux charges successives, on gagne malgré tout un facteur deux.

Par ailleurs l'énergie reçue dans le condensateur à l'issue des deux charges est toujours $\mathcal{E}_n = C_m E^2/2$ puisqu'elle ne dépend que de la variation de la tension à ses bornes. L'énergie fournie par le générateur est donc :

$$\mathcal{E}_n + \mathcal{E}_J = \frac{3C_m E^2}{4}. \tag{9}$$

En revanche la charge sera plus longue puisqu'on doit faire deux charges de même constante de temps τ.

III Alimentation d'un moteur

III.1. (**a**) Supposons que l'intensité i est positive, on peut alors modéliser le moteur par une source idéale de tension $u_P = +U_p$. On obtient alors un circuit RC d'équation différentielle :

$$(r_m + r_p)i + u_c = U_p \rightarrow \frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \frac{u_c}{(r_m + r_p)C_m} = \frac{U_p}{(r_m + r_p)C_m}, \tag{10}$$

dont l'unique solution vérifiant la condition initiale $u_c(0) = 500\,\mathrm{V} \equiv U_0$ est :

$$u_c = U_p + (U_0 - U_p)\, e^{-t/((r_m + r_p)C_m)} \rightarrow i = -C_m \frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = \frac{U_0 - U_p}{r_m + r_p} e^{-t/((r_m + r_p)C_m)}. \tag{11}$$

Pour $U_0 - U_p > 0$, le courant est bien positif tant que $u_c \geqslant U_p$ ce qui est toujours le cas. L'hypothèse initiale est donc vérifiée.

Les deux autres hypothèses auraient conduit à des incohérences :

- si on suppose $i < 0$ alors $u_c = -U_p$, les calculs précédents donnent $i(t) = (U_0 + U_p)e^{-t/((r_m)+r_p)C_m} > 0$.
- si on suppose $i = 0$ alors $u_c = \text{cste} = U_0$ et la tension aux bornes des résistors est nulle. La loi des mailles assure alors que $u_p = u_c$ or le régime $i = 0$ impose que $u_p \leqslant U_p < U_0$.

(b) Comme on l'a établi auparavant, on a $i = \frac{U_0 - U_p}{r_m + r_p} e^{-t/((r_m+r_p)C_m)}$. Le moteur étant décrit en convention récepteur, la puissance qu'il reçoit est :

$$\mathcal{P}_m = u_p i = \frac{U_p(U_0 - U_p)}{r_m + r_p} e^{-t/((r_m+r_p)C_m)}. \tag{12}$$

Il s'agit d'une exponentielle décroissante de $U_p(U_0 - U_p)/(r_m + r_p)$ à 0, avec une constante de temps de $(r_m + r_p)C_m$.

(c) Cette puissance sera maximale quand $U_p(U_0 - U_p)$ est maximale, *ie* pour $U_p = U_0/2$. On peut en effet chercher le maximum de cette fonction en :

- cherchant l'annulation de sa dérivée par rapport à U_p,
- reconnaissant une parabole qui s'annule en $U_p = 0$ et en $U_p = U_0$, dont le maximum est donc en $U_0/2$.

On a donc :

$$\mathcal{P}_{mi} = \frac{U_0^2}{4(r_m + r_p)} = 62{,}5\,\mathrm{kW}. \tag{13}$$

Ceci correspond à 70 chevaux, puissance du moteur d'une petite automobile.

III.2. **(a)** On a immédiatement (en faisant attention à la convention pour le courant sur le condensateur) :

$$i = I_p = -C_m \frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} \to u_c = U_0 - \frac{I_p t}{C_m}. \tag{14}$$

Comme de plus $u_c - u_p = (r_m + r_p)i$ (tant que $i \geqslant 0$), on a :

$$U_p = U_0 - (r_m + r_p)I_p - \frac{I_p t}{C_m}, \tag{15}$$

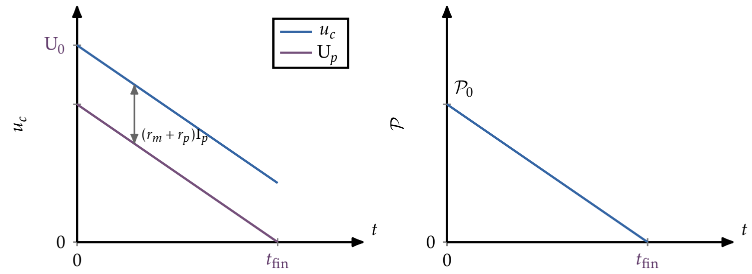
valable tant que $U_p \geqslant 0$ *ie* tant que :

$$t \leqslant t_{\text{fin}} \simeq \frac{C_m U_0}{I_p} - C_m(r_m + r_p). \tag{16}$$

Remarquons qu'il faut que I_p soit inférieur à $U_0/(r_m + r_p) = 500\,\mathrm{A}$. À cet instant la tension u_c sera encore positive puisque $u_c - U_p$ est toujours positive.

(b) La puissance reçue par le moteur est :

$$\mathcal{P} = u_p i = U_0 I_p - (r_m + r_p)I_p^2 - \frac{I_p^2 t}{C_m} = \mathcal{P}_0 - \frac{I_p^2 t}{C_m}. \tag{17}$$



III.3. La décharge du condensateur conduit, si U_p = cste à une diminution de la puissance en raison de la diminution du courant. On doit donc diminuer U_p au cours du temps pour garder la différence $u_c - u_p$ suffisamment importante. Cependant, l'étude à intensité constante conduit à une décroissance de la puissance : on doit donc avoir par ailleurs une augmentation de l'intensité, ce qui va accroître encore la diminution de u_c…

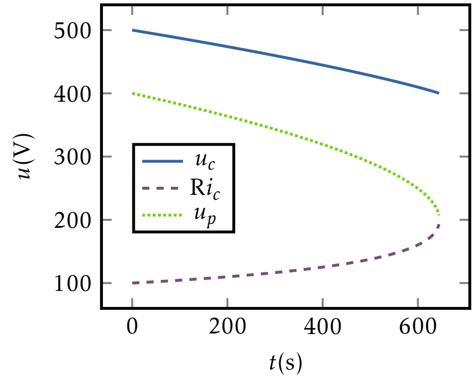
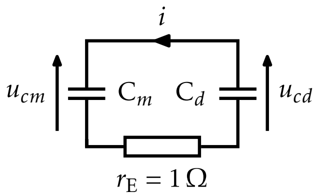


FIG. 1 : Décharge d'un condensateur dans un moteur absorbant une puissance constante. La résistance est $r_m + r_p = 1\,\Omega$, la capacité est $C_m = 800\,\mathrm{F}$. La puissance est maintenue constante à sa valeur initiale $\mathcal{P} = (U_{c0} - U_{p0})U_{p0}/R = 40\,\mathrm{kW}$ tant que possible.

On obtient alors une évolution comme celle représentée sur la figure ci-contre. On constate qu'elle s'interrompt quand la tension aux bornes du résistor est égale à celle du moteur : on peut alors montrer que la puissance dissipée dans le moteur est alors maximale à u_c fixé. Comme u_c va continuer à diminuer, la puissance sur le moteur ne pourra plus rester constante.

IV Dépannage

IV.1. La capacité du dépanneur est celle d'une association parallèle de deux condensateurs : $C_d = 2C_m = 1600\,\mathrm{F}$. La recharge s'interrompt quand le courant est nul, soit quand les tensions des deux condensateurs sont égales : on a donc $u_{Cm} = u_{Cd}$.



Par ailleurs on a $i = C_d \dfrac{\mathrm{d}u_{cd}}{\mathrm{d}t} = -C_m \dfrac{\mathrm{d}u_{cm}}{\mathrm{d}t}$ (ce qui traduit la conservation de la charge dans la partie supérieure du circuit) soit, en posant $U_{c0} = 80\,\mathrm{V}$: $C_m u_{cm} + C_d u_{cd} = \text{cste} = C_m U_{c0} + C_d E$. L'équilibre final s'écrit donc, en notant U_{eq} la tension commune à l'équilibre :

$$(C_m + C_d)\,U_{\text{eq}} = C_m U_{c0} + C_d E \to U_{\text{eq}} = \frac{C_m U_{c0} + C_d E}{C_m + C_d} = 360\,\mathrm{V}. \tag{18}$$

IV.2. Les expressions précédentes donnent :

$$\frac{u_{cd} - u_{cm}}{r_E} = i = C_m \frac{\mathrm{d}u_{cm}}{\mathrm{d}t} \to \frac{\mathrm{d}u_{cm}}{\mathrm{d}t} + \frac{u_{cm}}{r_E C_m} - \frac{(C_m + C_d)U_{\text{eq}} - C_m u_{cm}}{r_E C_m C_d} = 0 \tag{19}$$

$$\to \frac{\mathrm{d}u_{cm}}{\mathrm{d}t} + \frac{u_{cm}(C_m + C_d)}{r_E C_m C_d} = \frac{U_{\text{eq}}(C_m + C_d)}{r_E C_m C_d}. \tag{20}$$

On identifie la constante de temps $\tau = r_E C_m C_d/(C_m + C_d) = 533\,\mathrm{s} = 8\,\mathrm{min}53\,\mathrm{s}$ dans laquelle on reconnaît la capacité équivalente de l'association série des deux capacités.

On détermine l'énergie dissipée par effet Joule, notée $\mathcal{E}_J$ en comparant les énergies électrostatiques initiale et finale. On détermine :

$$\mathcal{E}_J = \mathcal{E}_{\text{elec,ini}} - \mathcal{E}_{\text{elec,fin}} = \frac{C_m U_{c0}^2}{2} + \frac{C_d E^2}{2} - \frac{(C_m + C_d)U_{eq}^2}{2} \tag{21}$$

$$= \frac{C_m U_{c0}^2}{2} + \frac{C_d E^2}{2} - \frac{C_m^2 U_{c0}^2 + C_d^2 E^2 + 2 C_m C_d U_{c0} E}{2(C_m + C_d)} = \frac{C_m C_d (U_0 - E)^2}{2(C_m + C_d)} \tag{22}$$

Correction du problème 2

I Étude générale

I.1. **(a)** On a immédiatement $E = L\,\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, soit $i(t) = i(0) + Et/L = I_0 + Et/L$ et donc $I_1 = I_0 + \alpha ET/L$.

(b) On a maintenant $u = -RC\,\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \to \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u/(RC) = 0$, soit $u(t) = u(0)e^{-t/(RC)}$ et donc $U_1 = U_0 e^{-\alpha T/(RC)}$.

I.2. **(a)** La loi des nœuds assure :

$$i = i_R + i_C = \frac{u}{R} + C\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \to L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{L}{R}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + LC\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2}$$

$$E - u = \frac{L}{R}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + LC\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} \to \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{LC} = \frac{E}{LC},$$

de la forme demandée avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\omega_0/Q = \frac{1}{RC}$, soit $Q = R\sqrt{C/L}$ et $u_\infty = E$.

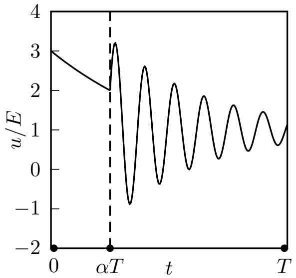
(b) La continuité de la charge du condensateur assure que $u(\alpha T^+) = U_1$. On a par ailleurs toujours $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{C} - \frac{u}{RC}$. La continuité du courant traversant la bobine assure alors que $i(\alpha T^+) = I_1$, et donc $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(\alpha T^+) = \frac{I_1}{C} - \frac{U_1}{RC}$.

(c) On sait déjà $i(\alpha T^+) = I_1$. On a de plus $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{E-u}{L}$, et donc $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(\alpha T^+) = \frac{E-U_1}{L}$.

(d) Il faut donc avoir $U_1 > E$ pour que l'intensité soit décroissante en αT^+ et $U_1 < RI_1$ pour que la tension soit croissante en αT^+.

I.3. (**a**)
- La courbe a ne convient pas car $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(\alpha T^+)$ y est positif.
- La courbe c ne convient pas car elle présente une évolution apériodique alors que $Q > \frac{1}{2}$.
- La courbe d ne convient pas car elle tend vers 0 alors que $i(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} E/R$.

La bonne courbe est donc b.



(**b**) La tension u décroît exponentiellement de U_0 à U_1 sur $[0\,;\alpha T]$ puis évolue de manière quasipériodique en tendant vers $E < U_1$. On a de plus : $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(\alpha T^+) > 0$.

II Régime d'utilisation

II.1. (**a**) et (**b**). On a immédiatement $i(t) = I_1 + \frac{E-U_1}{L}(t-\alpha T)$ et $u(t) = U_1 + \frac{1}{C}\left(I_1 - \frac{U_1}{R}\right)(t-\alpha T)$.

(**c**) On approxime $u(t) = U_0 \exp(-t/(RC)) \simeq U_0(1 - t/(RC))$.

II.2. (**a**) On doit avoir $i(T) = i(0) = I_0$ soit $I_1 + \frac{E-U_1}{L}(1-\alpha)T = I_0$. Or $I_1 = I_0 + \alpha ET/L$ et $U_1 \simeq U_0(1-\alpha T/(RC))$. On en déduit :

$$I_0 + \frac{\alpha ET}{L} + \frac{E-U_1}{L}(1-\alpha T) = I_0 \to E = U_1(1-\alpha)$$
$$\text{puis: } U_0 = \frac{U_1}{1-\alpha T/(RC)} = \frac{E}{(1-\alpha)(1-\alpha T/(RC))}.$$

(**b**) On obtient donc $(U_0 - U_1)/U_0 = 1 - U_1/U_0 = \alpha T/(RC) \ll 1$, soit $U_0 \simeq U_1 = E/(1-\alpha)$. Il y a bien élévation de la tension car $E/(1-\alpha) > E$.

II.3. (**a**) On sait que le travail reçu par la bobine est égal à la variation d'énergie magnétique $\frac{1}{2}Li^2$, soit $W_{L1} = \frac{1}{2}L\left(I_1^2 - I_0^2\right)$ et $W_{L2} = \frac{1}{2}L\left(I_0^2 - I_1^2\right)$, soit évidement $W_{L1} + W_{L2} = 0$ et de même $W_{C1} + W_{C2} = 0$ puisque le travail reçu par le condensateur est égal à la variation de l'énergie électrostatique $\frac{1}{2}Cu^2$.

(**b**) La loi des mailles assure que $E = u_L + u$, soit $Ei = u_L i + u_i = u_L i + u(i_C + i_R)$ qu'on peut écrire $\mathcal{P}_g = \mathcal{P}_L + \mathcal{P}_C + \mathcal{P}_R$, avec $\mathcal{P}_g$ la puissance *fournie* par le générateur, et $\mathcal{P}_L$, $\mathcal{P}_C$ et $\mathcal{P}_R$ les puissances *reçues* par respectivement la bobine, le condensateur et le résistor. Sur une période on aura donc $\mathcal{E}_g = \mathcal{E}_R + \underbrace{W_{L1} + W_{L2} + W_{C1} + W_{C2}}_{=0}$.

(**c**) On en déduit $\mathcal{E}_g = \int_0^T Ei(t)\mathrm{d}t = ETI_{\text{moy}}$.

(**d**) En supposant u quasistationnaire ($u \simeq E/(1-\alpha)$), on a $\mathcal{E}_R = \int_0^T \frac{u^2(t)}{R}\mathrm{d}t \simeq \frac{E^2}{R(1-\alpha)^2}$. Avec $\mathcal{E}_R = \mathcal{E}_g = ETI_{\text{moy}}$, on obtient finalement $EI_{\text{moy}} = \frac{E^2}{R(1-\alpha)^2}$, soit $I_{\text{moy}} = \frac{E}{R(1-\alpha)^2}$.

Comme on considère des variations quasilinéaires de l'intensité, la moyenne de I entre I_0 et I_1 est le milieu du segment de droite entre I_0 et I_1, soit $I_{\text{moy}} = \frac{I_0+I_1}{2}$. De :

$$\begin{cases} I_0 + I_1 &= 2I_{\text{moy}} = \frac{2E}{R(1-\alpha)^2} \\ I_1 - I_0 &= \frac{E\alpha T}{L} \end{cases} \quad \text{on déduit:} \begin{cases} I_1 &= \frac{E}{R(1-\alpha)^2} + \frac{E\alpha T}{2L} \\ I_0 &= \frac{E}{R(1-\alpha)^2} - \frac{E\alpha T}{2L} \end{cases}.$$

Il faut donc que la résistance R soit inférieure à $\frac{2L}{\alpha(1-\alpha)^2 T}$ pour que I_0 reste positive.

III Réalisation expérimentale

III.1. Quand l'interrupteur est en position 2, la loi des mailles s'écrit $-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = u \simeq U > 0$. L'intensité i décroît donc. Pour qu'elle soit quasistationnaire sur une période, elle doit donc croître quand l'interrupteur est en position 1. Or dans ces conditions, la loi des mailles s'écrit $u + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = E$ et donc $U = E - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} < E$ puisque $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ est maintenant positif. Ce montage est abaisseur de tension.

III.2.
- Quand l'interrupteur est fermé, la tension u_D aux bornes de la diode est égale à $-U < 0$: la diode est bien bloquante, soit équivalente à un interrupteur ouvert : on est bien dans la configuration A du problème.

- Quand il est ouvert, la diode sera passante, *ie* équivalente à un interrupteur fermé, tant que $i > 0$. On retrouve alors bien la configuration B, à la condition que i reste positif.