Problème 1 : Circuit à retard
On étudie des circuits permettant de retarder un signal électrique.

I Étude fréquentielle

I.1. On considère dans un premier temps le circuit représenté sur la figure 1, utilisé en sortie ouverte. L'entrée du filtre est la tension $u_e(t)$, la sortie est $u_s(t)$.

(**a**) Déterminer la nature du filtre, en utilisant les modèles équivalents.

(**b**) Établir sa fonction de transfert, notée $\underline{H_1} = \underline{U_{sm}}/\underline{U_{em}}$.

(**c**) Tracer soigneusement son diagramme de Bode en gain : en dB en fonction du logarithme de la pulsation ω. On déterminera les équations des asymptotes et la pulsation de coupure à -3 dB notée ω_{c1}.

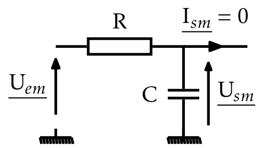


Fig. 1

(**d**) Calculer la fréquence f_{c1} correspondant à ω_{c1} pour $R = 20\,\text{k}\Omega$ et $C = 10\,\text{nF}$.

I.2. On considère ensuite le circuit représenté sur la figure 2.

(**a**) Déterminer la nature du filtre, en utilisant les modèles équivalents.

(**b**) Établir sa fonction de transfert, notée $\underline{H_2} = \underline{U_{sm}}/\underline{U_{em}}$. On la mettra sous la forme :

$$\underline{H_2} = \frac{H_{20}}{1 + \frac{j\omega}{Q\omega_{02}} - \left(\frac{\omega}{\omega_{02}}\right)^2}, \qquad (1)$$

en identifiant une pulsation caractéristique ω_{02} et un facteur de qualité Q.

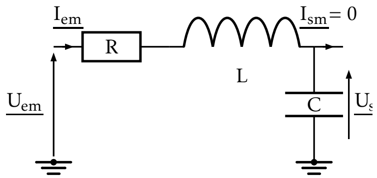


Fig. 2

(**c**) Établir comme à la question **I.1c** son diagramme de Bode pour $Q = 0{,}2$ et $Q = 5$. On étudiera en particulier l'existence d'un éventuel maximum local.

(**d**) Calculer les valeurs de la fréquence f_{02} correspondant à ω_{02} et du facteur de qualité Q_2 pour $R = 100\,\Omega$, $L = 50\,\text{mH}$ et $C = 10\,\text{nF}$.

I.3. On étudie enfin le filtre représenté sur la figure 3

(**a**) Déterminer la nature du filtre, en utilisant les modèles équivalents.

(**b**) Établir sa fonction de transfert, notée $\underline{H_3} = \underline{U_{sm}}/\underline{U_{em}}$. On la mettra sous la forme :

$$\underline{H_3} = \frac{H_{30}}{1 + \alpha(j\omega) + \beta(j\omega)^2 + \gamma(j\omega)^3}. \qquad (2)$$

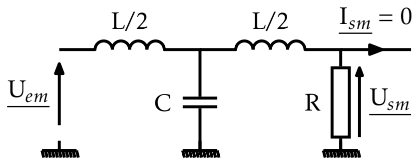


Fig. 3

II Retard temporel en régime sinusoïdal établi

II.1. (**a**) Déterminer l'expression de la phase de la fonction de transfert $\underline{H_1}$ et préciser son signe. Commenter.

(**b**) Le signal u_e est sinusoïdal, d'amplitude $U_e = 1{,}0\,\text{V}$ et sa fréquence est $f_1 = 1\,\text{kHz}$. Représenter sur l'oscillogramme de la figure 6 l'allure de U_e et U_s pour les paramètres de la question **I.1d**. On précisera en particulier les calibres horizontal et verticaux choisis.

II.2. (**a**) Déterminer l'expression de la phase de la fonction de transfert $\underline{H_2}$ et préciser son signe. Commenter.

(**b**) L'amplitude du signal est $U_e = 1{,}0\,\text{V}$ et sa fréquence est désormais $f_1 = 7\,\text{kHz}$. Représenter sur l'oscillogramme de la figure 7 l'allure de U_e et U_s **I.2d**. On précisera en particulier les calibres horizontal et verticaux choisis.

II.3. Le filtre recherché doit retarder le signal d'entrée d'une durée fixée, notée τ. Pour un signal d'entrée $u_e(t)$, le signal de sortie doit donc être :

$$u_s(t) = u_e(t - \tau). \qquad (3)$$

(**a**) Déterminer pour un signal sinusoïdal de pulsation ω, en notation complexe, la fonction de transfert correspondant à la relation (3) *ie* le quotient $\underline{U_{sm}}/\underline{U_{em}}$. On la note $\underline{H_r}(j\omega)$.

(**b**) Établir les développements limités à l'ordre 1 en ω pour $\omega \to 0$ de $\underline{H_r}$ et $\underline{H_1}$. En déduire comment choisir les paramètres du circuit de la figure 1 pour réaliser le retard τ. Pour quel domaine de pulsations cette fonction est-elle réalisée ?

II.4. On cherche à améliorer le dispositif précédent en utilisant le filtre de la figure 2.

(**a**) Établir les développements limités à l'ordre 2 en ω pour $\omega \to 0$ de $\underline{H_r}$ et $\underline{H_2}$.

(**b**) En déduire comment choisir les paramètres du circuit de la figure 2 pour réaliser le retard τ. Quelle est alors la valeur du facteur de qualité Q ?

On rappelle les développements limités pour $|x| \ll 1$, dont on admet qu'ils sont également valables pour $x \in \mathbb{C}$.

$$e^x \simeq 1 + x + \frac{x^2}{2} \qquad \frac{1}{1-x} \simeq 1 + x + x^2. \qquad (4)$$

III Utilisation du filtre de la figure 3 en cascade

On envisage enfin d'utiliser le filtre de la figure 3.

III.1. (**a**) Établir le développement limité à l'ordre 2 en ω pour $\omega \to 0$ de $\underline{H_3}$.

(**b**) En déduire comment choisir les paramètres du circuit de la figure 3 pour réaliser le retard τ.

(**c**) Pour $R = 500\,\Omega$, calculer les valeurs de L et C pour réaliser un retard de $10\,\mu\text{s}$.

(**d**) Déterminer l'expression de l'impédance d'entrée du filtre de la figure 3 et en donner une approximation dans le régime de fréquence où ce filtre réalise la fonction de l'équation (3).

III.2. On considère enfin le circuit de la figure 4 utilisant une cascade de n cellules identiques au montage de la figure 3. Les paramètres L C et R vérifient les conditions déterminées à la question **III.1b**.

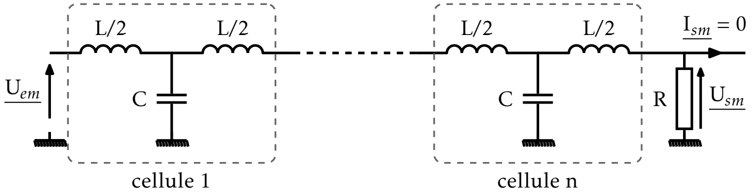


Fig. 4

(**a**) Justifier soigneusement mais sans calcul, que ce montage réalise la fonction de l'expression (3), avec un nouveau retard τ' qu'on exprimera en fonction de τ.

(**b**) Calculer, pour $R = 500\,\Omega$, les valeurs de L et C pour réaliser un retard de 100 µs pour un montage à $n = 10$ cellules. Conclure quant à l'intérêt de ce montage par rapport à un montage à 1 cellule.

Exercice 1 : Pédale Wah-Wah

On étudie une pédale d'effet pour guitare électrique nommée « pédale wah-wah ». Elle réalise un filtrage accordable du signal électrique produit par la guitare. Les courbes de la figure 5 présentent le spectre du signal électrique produit en grattant toujours la même corde.

La courbe (a) correspond au signal sans filtrage, les courbes (b) et (c) correspondent à deux configurations différentes du filtre.

1. Déterminer la fréquence fondamentale de vibration de la corde.

2. Mesurer le gain du filtre pour les harmoniques de la vibration fondamentale de la corde pour chacune des deux configurations du filtre et reporter ces valeurs sur le gabarit de la figure 8. En déduire l'allure des diagrammes de Bode correspondant.

3. Proposer un filtre correspondant (éventuellement partiellement) à ces observations. On précisera sa nature et ses éléments caractéristiques (fréquence caractéristique, bande passante…).

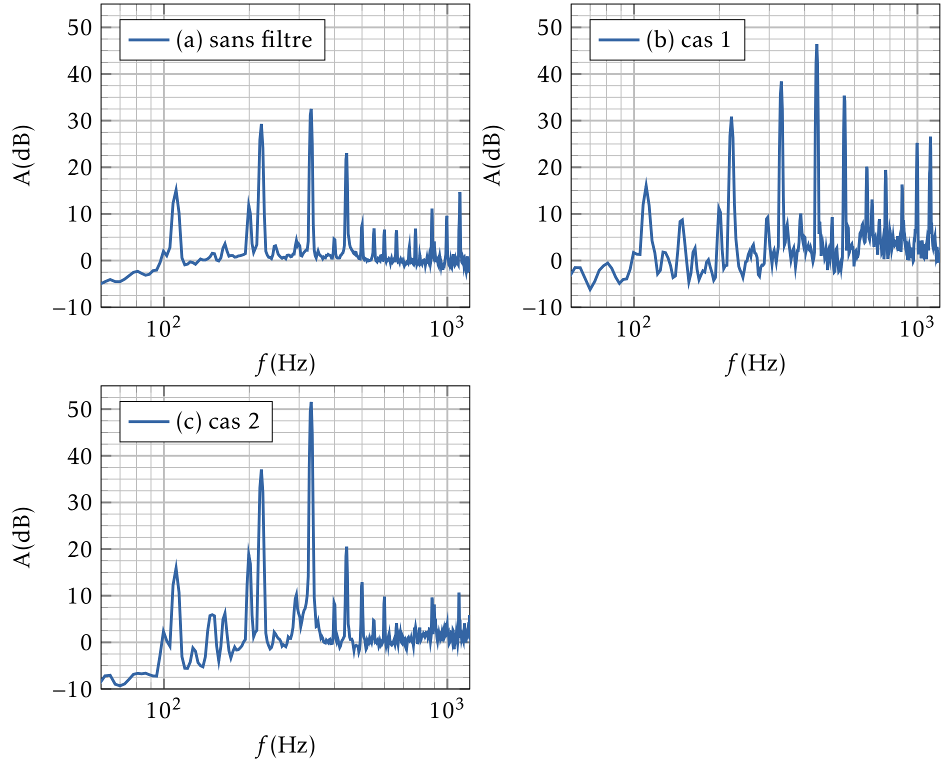


Fig. 5 : Spectres obtenus par transformation de Fourier rapide. Pour un signal d'amplitude U, l'amplitude A en dB est $A = 20\log(U/U_{\text{ref}})$, avec U_{ref} une tension de référence.

À rendre avec la copie. Nom :

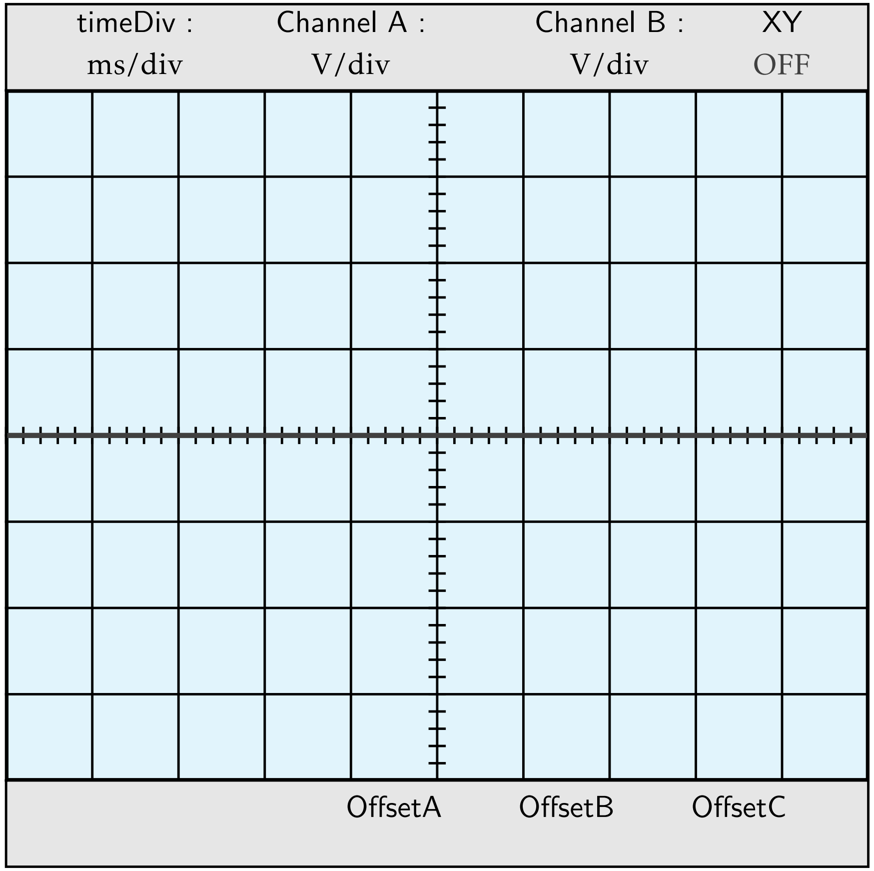


Fig. 6 : Pour la question **II.1b** du problème 1.

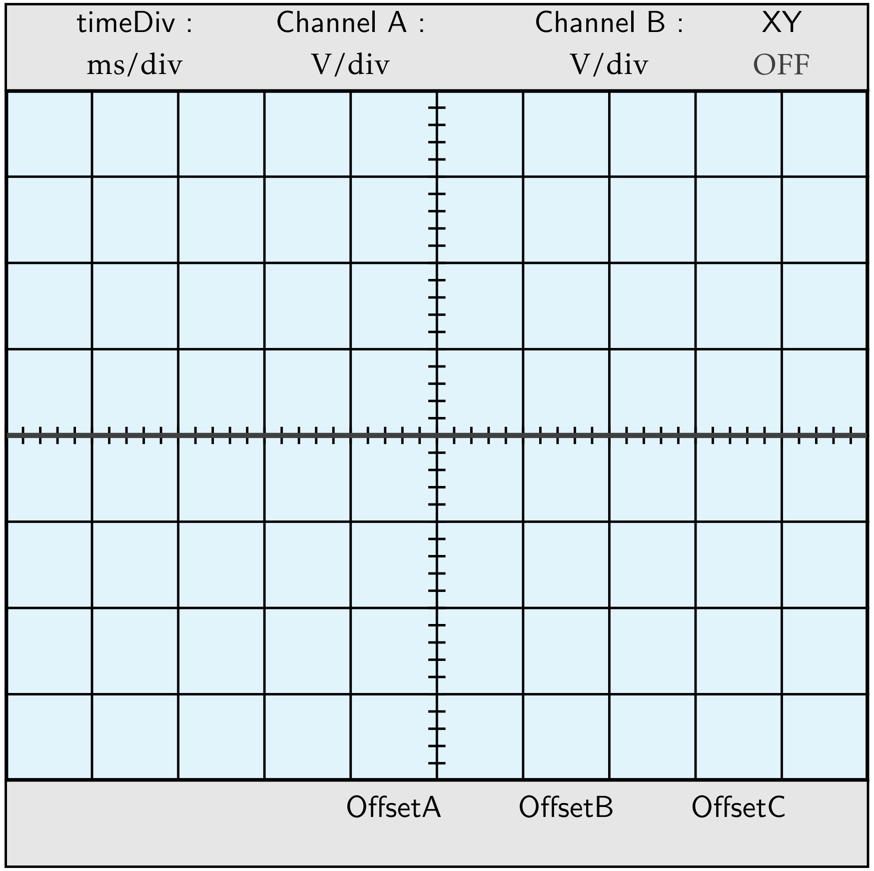


Fig. 7 : Pour la question **II.2b** du problème 1.

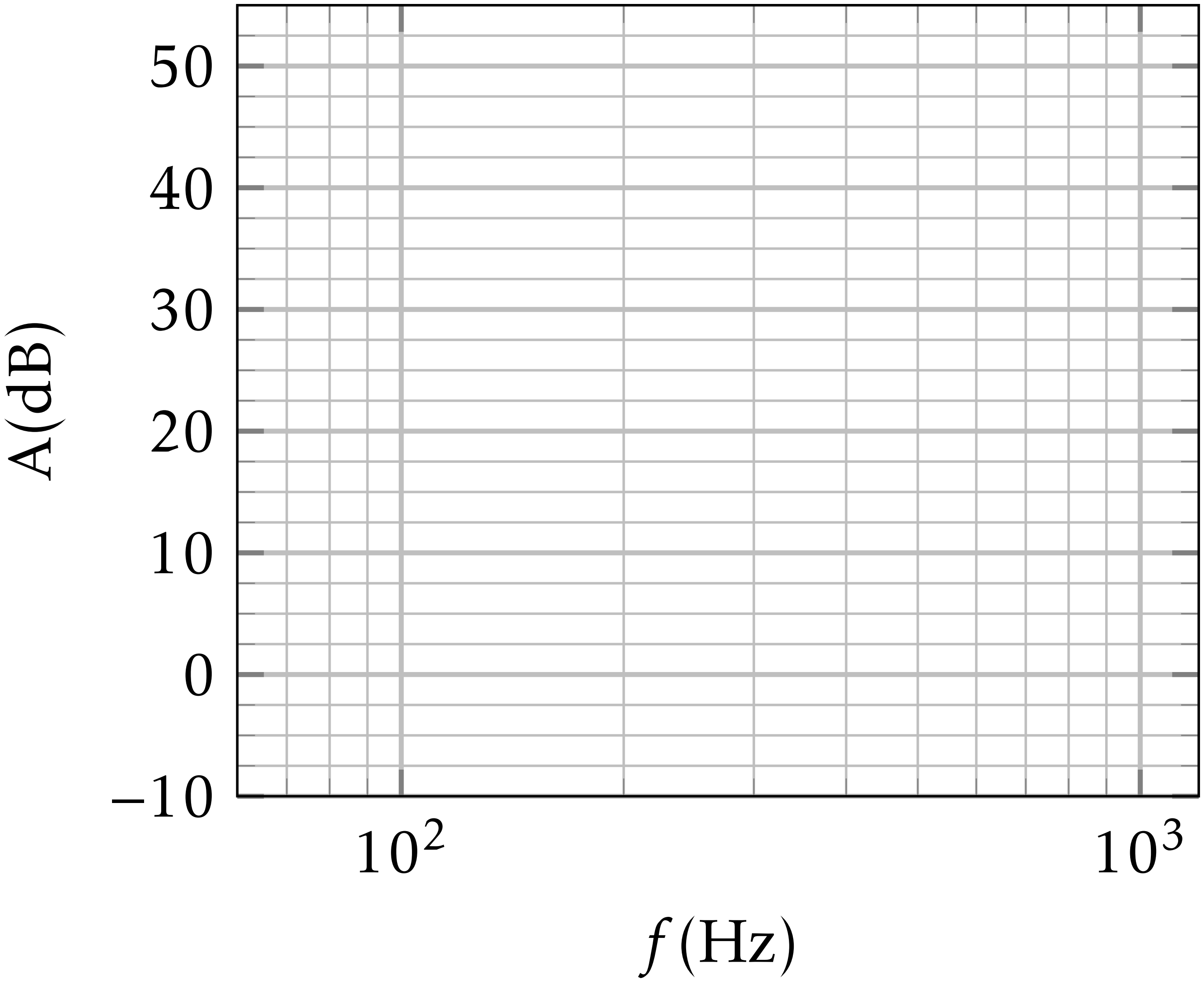


Fig. 8 : Pour la question**2** de l'exercice.

Correction du problème 1

I Étude fréquentielle

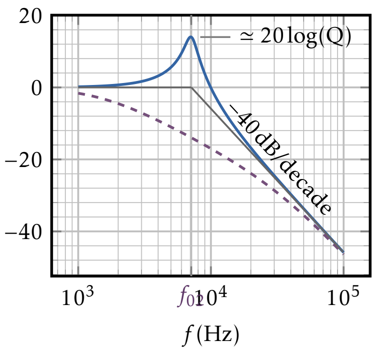
I.1. (**a**) , (**b**), (**c**) et (**d**). On reconnaît le passe-bas du premier ordre vu en cours, de pulsation de coupure $\omega_{c1} = 1/(RC) = 2\pi \times 795{,}774\,715\,459\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$. Sa fonction de transfert est :

$$\underline{H_1} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_{c1}}}. \tag{5}$$

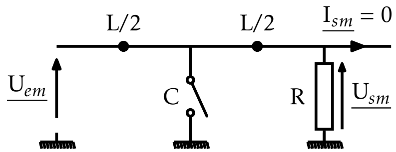
Les asymptotes sont $G_{dB} = 0$ pour $\omega \ll \omega_{c1}$ et $G_{dB} = -20\log(\omega/\omega_{c1})$ pour $\omega \gg \omega_{c1}$.

I.2. (**a**) , (**b**), (**c**) et (**d**). On reconnaît le passe-bas du deuxième ordre vu en cours, de pulsation caractéristique coupure $\omega_{02} = 1/\sqrt{LC} = 2\pi \times 7117{,}625\,434\,17\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ et de facteur de qualité $Q = L\omega_{02}/2 = 1/(RC\omega_{02}) = \sqrt{L/C}/R = 2{,}236\,067\,977\,5 \cdot 10^1$.

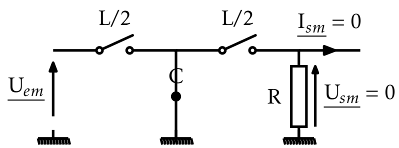
On obtient le diagramme de Bode ci-contre. Il présente un maximum pour $Q \geqslant 1/\sqrt{2}$.



I.3. (**a**) On obtient les équivalents suivants :



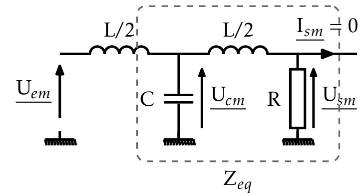
à basse fréquence



à haute fréquence

On a de nouveau affaire à un passe-bas.

(**b**) On utilise deux ponts diviseurs de tension en prêtant attention au fait qu'il faut considérer l'impédance équivalente au condensateur, la deuxième bobine et le résistor pour le deuxième pont puisque le condensateur et la première bobine ne sont pas en série. Cette impédance est :



$$\underline{Z_{eq}} = \frac{1}{jC\omega + \frac{1}{R + jL\omega/2}} \tag{6}$$

$$\frac{\underline{U_{sm}}}{\underline{U_{cm}}} = \frac{R}{R + jL\omega/2} \qquad \frac{\underline{U_{cm}}}{\underline{U_{em}}} = \frac{\underline{Z_{eq}}}{jL\omega/2 + \underline{Z_{eq}}} = \frac{\frac{1}{jC\omega + \frac{1}{R+jL\omega/2}}}{jL\omega/2 + \frac{1}{jC\omega + \frac{1}{R+jL\omega/2}}} = \frac{1}{1 - LC\omega^2/2 + \frac{jL\omega/2}{R+jL\omega/2}},$$

soit :

$$\underline{H_3} = \frac{\underline{U_{sm}}}{\underline{U_{em}}} = \frac{R}{R + jL\omega - RLC\omega^2/2 - jL^2C\omega^3/4} = \frac{1}{1 + jL\omega/R + LC(j\omega)^2/2 + L^2C(j\omega)^3/(4R)} \tag{7}$$

II Retard temporel en régime sinusoïdal établi

II.1. (**a**) Comme vu en cours, on a :

$$\varphi(\underline{H_1}) = -\arctan(\omega/\omega_c), \tag{8}$$

toujours négative : la sortie est bien en retard sur l'entrée.

(**b**) On calcule, pour cette fréquence :

$$\frac{f}{f_c} = 1{,}256\,281\,407\,04 \quad H_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_c)^2}} = 0{,}622\,784\,906\,336 \quad \varphi_1 = -\arctan(f/f_c) = 51{,}480\,210\,478\,8°$$ (9)

II.2. (**a**) Comme vu en cours, on a :

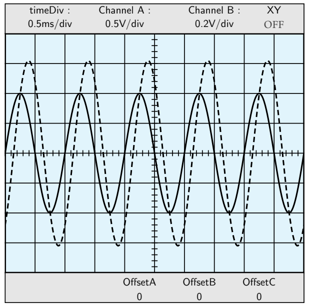
$$\varphi(\underline{H_2}) = -\frac{\pi}{2} + \arctan(Q(\omega_{02}/\omega - \omega/\omega_{02})), \tag{10}$$

toujours négative : la sortie est bien en retard sur l'entrée.

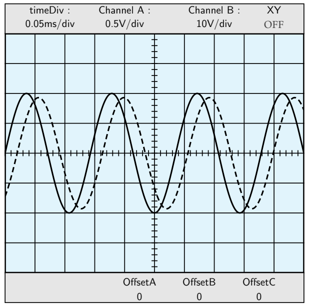
(**b**) On calcule, pour cette fréquence :

$$\frac{f}{f_{02}} = 9{,}831\,460\,674\,16 \cdot 10^{-1} \quad H_2 = \frac{1}{\sqrt{(1-(f/f_{02})^2)^2 + (f/(Qf_{02}))^2}} = 18{,}601\,803\,396\,2 \quad \varphi_1 = -52{,}716$$ (11)

On a représenté sur la ci-dessous les oscillogrammes correspondant :



pour $\underline{H_1}$,



pour $\underline{H_2}$.

II.3. (**a**) On doit avoir, en notation complexe :

$$\underline{U_s}(t) = \underline{U_{ms}}e^{j\omega t} = \underline{U_e}(t-\tau) = \underline{U_{me}}e^{j(\omega(t-\tau))} = \underline{U_{me}}e^{j(\omega t)}e^{-j\omega\tau} \to \underline{H_r} = \frac{\underline{U_{sm}}}{\underline{U_{em}}} = e^{-j\omega\tau}.$$

(**b**) On a :

$$\underline{H_r} \simeq 1 - j\omega\tau \qquad \underline{H_1} \simeq 1 - jRC\omega. \tag{12}$$

Ces deux expressions coïncideront si on choisit $RC = \tau$; l'approximation sera d'autant meilleure que $\omega \ll 1/RC$.

II.4. (**a**) On a, à l'ordre 2 cette fois :

$$\underline{H_r} \simeq 1 - j\omega\tau + \frac{(-j\omega\tau)^2}{2} = 1 - j\omega\tau - \frac{(\omega\tau)^2}{2} \qquad \underline{H_2} = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} \simeq 1 - jRC\omega + LC\omega^2 + (jRC\omega)^2. \tag{13}$$

Ces expressions coïncideront pour :

$$\tau = RC \qquad \text{et: } -\frac{\tau^2}{2} = LC - (RC)^2$$
$$\text{soit: } \tau = RC \qquad LC = \frac{(RC)^2}{2}. \tag{14}$$

On a alors $Q = 1/(RC\omega_{02}) = \sqrt{LC}/(RC) = 1/\sqrt{2}$.

III Utilisation du filtre de la figure 3 en cascade

III.1. (**a**) En procédant comme au **II.4** on établit cette fois :

$$\underline{H_3} \simeq 1 - j\frac{L\omega}{R} + \frac{LC\omega^2}{2} + \left(j\frac{L\omega}{R} - \frac{LC\omega^2}{2}\right)^2 \simeq 1 - j\frac{L\omega}{R} + \frac{LC\omega^2}{2} - \frac{L^2\omega^2}{R^2}. \tag{15}$$

(**b**) Pour retrouver le DL de la fonction retard, on doit maintenant avoir :

$$\frac{L}{R} = \tau \quad \text{et: } \frac{L^2}{R^2} - \frac{LC}{2} = \frac{\tau^2}{2} \to\to L = R^2C. \tag{16}$$

(**c**) On doit avoir :

$$C = \frac{\tau}{R} = 2\cdot 10^{-8}\,\text{F} \qquad L = R^2C = 5\cdot 10^{-3}\,\text{H}. \tag{17}$$

(**d**) On détermine l'impédance d'entrée par associations série/parallèle :

$$\underline{Z_e} = \frac{\underline{U_{em}}}{\underline{I_{em}}} = \frac{jL\omega}{2} + \frac{1}{jC\omega + \frac{1}{R + jL\omega/2}} = \frac{jL\omega}{2} + \frac{R + jL\omega/2}{1 + jRC\omega - LC\omega^2/2}. \tag{18}$$

Dans le régime d'utilisation, on a $RC\omega \ll 1$ et $L\omega/R \ll 1$. L'expression précédente se simplifie donc selon $\underline{Z_e} \simeq R$.

III.2. (**a**) En approximant l'impédance d'entrée par R, on peut remplacer la cellule n et le résistor final par R pour l'étude des $n-1$ précédentes. On peut donc utiliser l'étude précédente à une seule cellule pour établir :

$$\frac{\underline{U_{1m}}}{\underline{U_{em}}} = \underline{H_3}. \tag{19}$$

On peut de même établir de proche en proche que :

$$\frac{\underline{U_{2m}}}{\underline{U_{1m}}} = \underline{H_3} \to \frac{\underline{U_{2m}}}{\underline{U_{em}}} = \underline{H_3}^2 \simeq e^{-2j\omega\tau} \to \frac{\underline{U_n}}{\underline{U_{em}}} = \underline{H_3}^n \simeq e^{-nj\omega\tau}, \tag{20}$$

le retard a été multiplié par n.

(**b**) On doit désormais avoir :

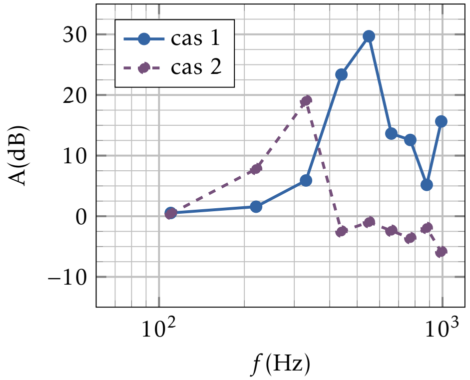
$$nRC = \tau' = 100\,\mu\text{s} \to C = 2\cdot 10^{-8}\,\text{F} \quad \text{et: } L = R^2C = 1\cdot 10^{-5}\,\text{H}. \tag{21}$$

Avec les mêmes paramètres (facilement réalisables) que pour un montage à 1 cellule, on multiplie par 10 le retard. Pour un montage à 1 cellule, il aurait fallu une capacité et une bobine 10 fois supérieures. De plus, et surtout, le domaine de fréquences pour lequel le filtre fonctionne reste $\omega \ll 1/(RC) = 100\,\text{kHz}$ alors que pour un montage à 1 cellule réglé pour le même retard, ce domaine de fréquences aurait été $\omega \ll 10\,\text{kHz}$, et n'aurait donc pas fonctionné sur toute une partie du spectre audible puisqu'il s'étend jusqu'à $\simeq 20\,\text{kHz}$.

Correction de l'exercice 1

1. On observe des pics pour les multiples entiers de 110 Hz, qui constitue donc la fréquence fondamentale. Il s'agit d'un la 1 (deuxième corde la plus grave d'une guitare dans l'accordage traditionnel).

2. À une fréquence quelconque, le gain en dB est $20\log(U_{\text{filtré}}/U_{\text{sans filtre}}) = A_{\text{filtré}} - A_{\text{sans filtre}}$. On effectue donc la différence des amplitudes en dB entre les différents signaux. On obtient les courbes ci-contre.



3. On a affaire à des filtres qui présentent une résonance. Leurs paramètres sont :

   fréquence de résonance: $f_0 \simeq 550\,\text{Hz}$ (cas 1) et $f_0 \simeq 330\,\text{Hz}$

   bande passante à $-10\,\text{dB}$: $\Delta f = 200\,\text{Hz}$ dans les deux cas.

   On a donné la bande passante à $-10\,\text{dB}$ plutôt que le traditionnel $-3\,\text{dB}$ qui aurait été très approximatif compte tenu de la grande imprécision des mesures.

Remarque : L'étendue de la plage de fréquences représentée n'est pas suffisante pour différencier un filtre passe-bande, d'un passe-bas ou passe-baut présentant une résonance. Avec un spectre plus large on constate qu'il est proche d'un passe-bas du deuxième ordre.