Les vecteurs sont distingués par des flèches : $\overrightarrow{A}$, A désignant la norme de $\overrightarrow{A}$ et A_x la composante de x selon la coordonnée x. Dans tous le proglème le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$, dans lequel règne le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$ sera considéré galiléen pour la durée des phénomènes décrits.

Problème 1 : De David à Thierry

On s'intéresse aux mouvements d'une fronde, instrument permettant à de lancer des projectiles (des pierres taillées) avec une grande vitesse après les avoir fait tournoyer dans une lanière.

On modélise le projectile par un point matériel de masse m et la fronde par un simple fil idéal de longueur l.

On négligera tout frottement dans le problème.

I Généralités sur le mouvement circulaire

I.1. (**a**) Établir les expressions suivantes de la vitesse $\overrightarrow{v}$ et de l'accélération $\overrightarrow{a}$ d'un point repéré par les coordonnées cylindriques r , θ , z :

$$\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{e_z} \qquad \overrightarrow{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{e_r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z}.$$

(**b**) En déduire leurs expressions pour un mouvement circulaire de rayon ℓ constant.

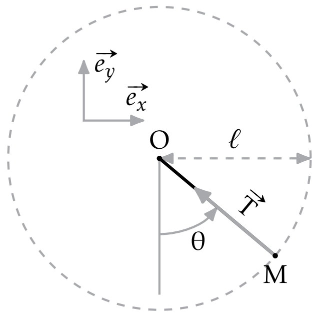
I.2. Un point matériel M de masse m est en mouvement sans frottement sur une surface horizontale. Il est lié par un fil idéal de longueur ℓ à un point fixe O.

(**a**) Déterminer la norme T de la tension du fil quand son mouvement est circulaire uniforme de vitesse angulaire ω constante.

(**b**) Le point matériel décrit un mouvement circulaire caractérisé par une croissance de l'angle θ selon :

$$\theta = \eta t^2,$$

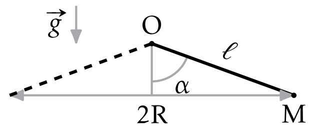
avec η une constante positive. Donner l'expression de la résultante $\overrightarrow{F}$ des forces auxquelles il doit être soumis. Commenter la nouvelle expression de la tension.



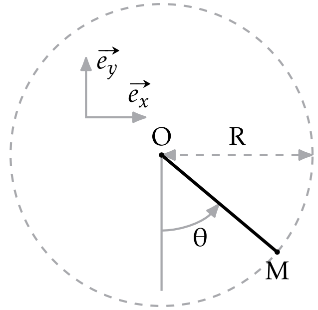
I.3. Le point matériel est maintenant lié au point O par un ressort de longueur au repos ℓ_0 et de raideur k et est animé d'un mouvement circulaire uniforme de rayon ℓ et de pulsation ω. Déterminer le rayon ℓ en fonction de ℓ_0, k ω et m.

II Mouvement horizontal

Une fronde est manipulée par un lanceur qui la fait tournoyer dans un plan horizontal au dessus de sa tête, dans un mouvement circulaire uniforme de pulsation ω constante et de rayon R. Le fil forme un angle α constant avec la verticale.



Vue de profil.



Vue de dessus.

II.1. (**a**) Quelle doit être la résultante des forces selon la verticale ? En déduire la tension du fil en fonction de la masse m, de l'accélération de la pesanteur g et de l'angle α.

(**b**) En déduire l'expression de l'angle α en fonction entre autres de la pulsation ω du mouvement de rotation. Vérifier la limite de α quand ω tend vers l'infini.

(**c**) Calculer la fréquence minimale du mouvement de rotation pour que l'angle α soit supérieur à 80°.

(**d**) Calculer l'intensité de la force de tension T quand l'angle α vaut 80°. Commenter l'effort à fournir par le lanceur.

II.2. La fronde étant en rotation uniforme horizontale à la pulsation ω, l'homme lance le projectile vers l'avant. On modélise le lancer en considérant que le fil est coupé instantanément.

(**a**) Quelle doit être la valeur de l'angle θ à l'instant du lancer pour que le projectile parte dans la direction du vecteur $\overrightarrow{e_y}$? Quelle sera la nature du mouvement ultérieur ?

(**b**) Établir l'équation de la trajectoire du mouvement $z(y)$ une fois que le projectile est lancé. On tracera également son allure.

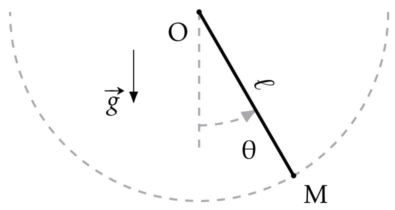
(**c**) Le lanceur faisait tournoyer la fronde dans un plan horizontal à la hauteur h du sol, avec un angle $\alpha = 80°$. Déterminer l'expression puis la valeur de la distance d parcourue par le projectile quand il atteint le sol.

(**d**) Quelle est alors la norme de sa vitesse ?

(**e**) Que pensez-vous de l'efficacité de ce mouvement horizontal pour la fronde ?

III Mouvement vertical

On étudie désormais un mouvement de rotation de la fronde dans un plan vertical, plus conforme à l'utilisation traditionnelle qui en est faite. La lanière est désormais toujours incluse dans le plan vertical et tourne autour d'un point O fixe, situé à la hauteur h du sol précédemment utilisée. Dans cette partie, l'angle θ désigne désormais l'angle des coordonnées polaires associé à la rotation dans le plan vertical.



III.1. On étudie tout d'abord le mouvement d'oscillation de la fronde.

(**a**) Établir l'équation différentielle d'évolution de l'angle θ. On y fera apparaître une pulsation ω_f qu'on exprimera en fonction de ℓ et g. Le mouvement peut-il être circulaire uniforme ?

(**b**) Le projectile est animé à l'instant $t = 0$ d'une vitesse de norme v_0 alors qu'il se trouve en $\theta = 0$. Vérifier que l'évolution ultérieure de θ vérifie l'équation :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{\ell^2} - 2\omega_f^2\left(1 - \cos(\theta)\right).$$

(**c**) En déduire l'expression de la norme T de la tension du fil en fonction de m, g, ℓ, v_0 et $\cos(\theta)$ tant qu'il reste tendu et que la vitesse de M ne s'annule pas.

(**d**) Calculer la valeur de v_0 pour laquelle la valeur maximale de la tension atteint 15 N.

III.2. (**a**) La norme T de la tension peut-elle s'annuler tant que $|\theta| \leqslant \pi/2$? Justifier votre réponse.

(**b**) Étudier les angles pour lesquels $\dot{\theta}$ s'annule et ceux pour lesquels T s'annule et en déduire à quelle condition portant sur v_0 le point M peut parcourir un tour complet. Calculer la valeur correspondante de v_0.

(**c**) En déduire l'allure du portrait de phase du mouvement de M. On tracera quelques trajectoires caractéristiques des différents mouvements observables dans le plan $(\theta, \dot{\theta})$ et on se limitera aux portions du mouvement où le fil reste tendu.

III.3. On considère désormais que la vitesse v_0 est suffisante pour que le fil reste tendu durant le tournoiement. On désigne par θ_t la valeur de θ à l'instant où le projectile est lancé.

(**a**) Tracer l'allure des trajectoires ultérieures du projectile pour les valeurs $\theta_t = 0° ; 45° ; 90°$.

(**b**) Déterminer l'expression de la distance d parcourue par le projectile avant d'atteindre le sol en fonction entre autres de v_0 et θ_t.

(**c**) Calculer d pour $\theta_t = 45°$ et pour la valeur de v_0 déterminée à la question **III.1d**. Déterminer également la hauteur maximale atteinte par le projectile au cours de sa trajectoire et sa vitesse quand il atteint le sol.

(**d**) Dans un récit biblique, David tue Goliath à l'aide d'une fronde qui l'atteint à la tête. Goliath y est décrit d'une taille d'environ 2,5 m. Cela vous paraît-il réalisable ?

IV Utilisation d'un ressort

On étudie l'utilisation d'un ressort de constante de raideur k et de longueur au repos ℓ_0 au lieu d'un fil pour éviter la détente lors du tournoiement. On s'intéresse toujours au mouvement dans un plan vertical.

IV.1. Le mouvement peut-il être circulaire uniforme ? Justifier votre réponse.

IV.2. On étudie la possibilité d'un mouvement uniforme de pulsation ω constante. On note ℓ_i la longueur du ressort quand il passe à l'instant initial par la position $\theta = 0$.

(**a**) Établir les deux équations différentielles vérifiées par la longueur ℓ et l'angle θ.

(**b**) En déduire qu'un mouvement uniforme de pulsation constante ω est possible si certaines conditions sont vérifiées. On précisera les expressions de :

- k en fonction de ω et m.
- ℓ_i en fonction ℓ_0, g et ω.

(**c**) Calculer les valeurs de k et ℓ_i pour la valeur de ω correspondant à la valeur de la vitesse v_0 de la question **III.1d**. On prendra $\ell_0 = 80$ cm.

(**d**) Déterminer également l'expression de l'amplitude des oscillations de l'élongation du ressort et calculer sa valeur. Commenter.

IV.3. L'utilisation d'un ressort plutôt qu'un fil vous paraît-elle présenter un intérêt ? Quelles critiques apporteriez-vous au modèle de fronde présenté dans ce problème ?

Données : masse du projectile $m = 50$ g, longueur de la fronde $\ell = 80$ cm, accélération de la pesanteur $g = 9{,}8\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$, hauteur $h = 1{,}6$ m.

Correction du problème 1

I Généralités sur le mouvement circulaire

I.1. (**a**) Fait en cours.

(**b**) On retrouve les résultats à connaître par cœur :

$$\vec{v} = \ell\dot{\theta}\vec{e_\theta} \qquad \vec{a} = -\ell\dot{\theta}^2\vec{e_r}.$$

I.2. (**a**) La réaction normale du support compense le poids. La loi de la quantité de mouvement s'écrit en coordonnées polaires :

$$m\left(-\ell\dot{\theta}^2\vec{e_r} + \ell\ddot{\theta}\vec{e_\theta}\right) = -T\vec{e_r} + \vec{F},$$

en tenant compte d'une éventuelle force $\vec{F}$ autre que la tension du fil. Si le mouvement est circulaire uniforme, on a $\dot{\theta} = \omega = $ cste soit $T = m\ell\,\omega^2$.

(**b**) Le mouvement ne peut être uniformément accéléré que si la force comporte à la fois des composantes radiale et orthoradiale. On a en effet :

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\left(\ell\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - \ell\dot{\theta}^2\right) = m\ell\left(2\eta\vec{e_\theta} - 4\eta^2t^2\vec{e_r}\right).$$

I.3. Dans le cas d'un ressort, la tension est donnée par : $T = k(\ell - \ell_0)$. L'équation précédente devient donc :

$$k(\ell - \ell_0) = m\ell\omega^2 \to \ell = \frac{\ell_0}{1 - m\omega^2/k}.$$

Ce mouvement ne sera donc possible que si le ressort est suffisamment raide pour que $k \geqslant m\,\omega^2$ car son élongation tend vers l'infini pour $k = m\,\omega^2$.

II Mouvement horizontal

II.1. (**a**) La résultante des forces verticales doit être nulle pour que le mouvement reste dans un plan horizontal. En notant T la tension du fil, on doit donc avoir :

$$T\cos(\alpha) = mg.$$

(**b**) La composante de la tension dans le plan horizontal du mouvement est $T\sin(\alpha)$. Le rayon du mouvement est par ailleurs $\ell\sin(\alpha)$. Les équations précédentes deviennent donc :

$$m\ell\sin(\alpha)\omega^2 = T\sin(\alpha) \to T = m\ell\omega^2 = \frac{mg}{\cos(\alpha)} \to \cos(\alpha) = \frac{g}{\ell\omega^2}.$$

On constate que pour $\alpha \ll 1$, on doit avoir $\omega^2 = g/l$ et qu'il faudra $\omega \to \infty$ pour aller vers $\alpha = \pi/2$.

(**c**) Pour avoir $\alpha = 80°$, on calcule :

$$f = \omega/(2\pi) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell\cos(\alpha)}} = 1{,}34\,\mathrm{Hz}.$$

(**d**) On calcule ici :

$$T = \frac{mg}{\cos(\alpha)} = 2{,}8\,\mathrm{N}.$$

C'est aussi l'ordre de grandeur de la force à fournir par l'opérateur pour garder le point d'attache immobile. Il s'agit d'une force très peu intense.

II.2. (**a**) Le vecteur vitesse initial doit être selon $\vec{e_y}$ or il est tangent à la trajectoire circulaire. On doit donc choisir $\theta = 90°$. En l'absence de force de tension, on a un mouvement de chute libre. La trajectoire sera dans un plan vertical, parabolique en l'absence de frottement.

(**b**) Les résultats classiques du cours donnent les équations du mouvement d'un point matériel initialement en $y = 0$, $z = h$ (il n'est pas intéressant de conserver l'origine au centre de la trajectoire précédente) soumis à l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$ et de vitesse initiale $\vec{v_0} = v_0\vec{e_y}$ (avec un angle $\beta = 0$).

$$z = z_0 - \frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\beta)t = h - \frac{1}{2}gt^2 \qquad y = y_0 + v_0\cos(\beta)t = v_0t$$

On en déduit la trajectoire :

$$z - h = y\tan(\alpha) - \frac{gy^2}{2v_0^2(\cos(\alpha))^2} \to z = h - \frac{gy^2}{2v_0^2}.$$

(**c**) Quand le sol est atteint, on a $z = 0$, soit une distance $d = v_0\sqrt{2h/g}$. Les calculs précédents donnent :

$$v_0 = \ell\sin(\alpha)\omega = \sin(\alpha)\sqrt{\frac{g\ell}{\cos(\alpha)}} \to d = \sin(\alpha)\sqrt{\frac{2hl}{\cos(\alpha)}} = 3{,}8\,\mathrm{m}.$$

La distance croît assez rapidement avec l'angle : pour $\alpha = 89°$ on obtient $d = 12\,\mathrm{m}$.

(**d**) On a immédiatement $\dot{y} = v_0$ et $\dot{z} = -gt$. Comme le sol est atteint pour $h - \frac{1}{2}gt^2 = 0$, soit $t = \sqrt{2h/g}$, on a

$$\dot{y} = v_0 \qquad \text{et: } \dot{z} = -\sqrt{2gh} \to v = \sqrt{\dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 8{,}7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Ici aussi, un angle de 89° donne une valeur significativement plus élevée de : $21\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

On aurait bien sûr pu (et dû) établir directement ce résultat grâce au théorème de l'énergie mécanique :

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh.$$

(**e**) Ce mouvement n'est pas très facile à réaliser, il sera plus simple de faire tournoyer la fronde dans un plan vertical. De plus une erreur sur l'instant où on lâche le projectile donne une grande erreur dans la direction du lancer alors que pour un mouvement vertical, cette erreur ne changera que la hausse du tir et pas le plan horizontal dans lequel il est lancé.

III Mouvement vertical

III.1. (**a**) Les résultats classiques du cours sur le pendule simple donnent :

$$-m\ell\dot{\theta}^2 = -T + mg\cos(\theta) \qquad m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin(\theta).$$

La deuxième équation s'écrit :

$$\ddot{\theta} = -\omega_f^2\sin(\theta),$$

avec $\omega_f^2 = g/\ell$.

Pour un mouvement circulaire uniforme, on devrait avoir $\ddot{\theta} = 0$, impossible si θ n'est pas constamment nul.

(**b**) La solution proposée correspond, pour $\theta = 0$, à $v^2 = \ell^2\dot{\theta}^2 = v_0^2$, *ie* la condition initiale. On vérifie de plus qu'elle est solution de la deuxième équation différentielle. En dérivant l'expression proposée, on obtient :

$$2\dot{\theta}\ddot{\theta} = -2\omega_f^2\sin(\theta)\dot{\theta} \to \ddot{\theta} = -\omega_f^2\sin(\theta),$$

comme l'annonce l'équation différentielle.

(**c**) La première équation différentielle donne alors :

$$T = mg\cos(\theta) + m\ell\dot{\theta}^2 = m\left(g\cos(\theta) + \frac{v_0^2}{\ell} - 2g(1-\cos(\theta))\right) = m\left(g(3\cos(\theta)-2) + \frac{v_0^2}{\ell}\right).$$

(**d**) La tension est donc de norme maximale pour $\cos(\theta) = 0$ où elle vaut :

$$T_{\max} = m\left(g + \frac{v_{0,\max}^2}{\ell}\right) \to v_{0,\max} = \sqrt{\ell\left(\frac{T_{\max}}{m} - g\right)} = 15{,}2\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}.$$

III.2. (**a**) On a $T = mg\cos(\theta) + m\ell\dot{\theta}^2$: il faut donc que $mg\cos(\theta)$ soit négatif pour envisager l'annulation de T.

(**b**) La vitesse angulaire $\dot{\theta}$ s'annule pour $\theta = \theta_v$ tel que

$$0 = \dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{\ell^2} - 2\omega_f^2\left(1-\cos(\theta_v)\right) \to \cos(\theta_v) = 1 - \frac{v_0^2}{2\omega_f^2\ell^2} = 1 - \frac{v_0^2}{2g\ell}.$$

La tension s'annule quant à elle pour $\theta = \theta_T$ tel que

$$\cos(\theta_T) = \frac{2}{3} - \frac{v_0^2}{3g\ell} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{v_0^2}{2gl}\right).$$

Remarquons que ces deux expressions de $\cos(\theta)$ sont de même signe, les angles θ_v et θ_T seront donc soit tous les deux inférieurs à $\pi/2$, soit tous les deux supérieurs à $\pi/2$.

Dans l'intervalle $[0;\pi/2\ ]$ On a $\cos(\theta) \geqslant 0$ et $\cos(\theta)$ décroissant, la condition d'annulation de la vitesse est donc réalisée avant celle d'annulation de la tension ; le fil reste tendu et le système oscille comme un pendule simple.

Dans l'intervalle $[\pi/2;\pi\ ]$ On a maintenant $\cos(\theta) \leqslant 0$ et toujours $\cos(\theta)$ décroissant. La condition d'annulation de la tension est donc réalisée avant celle de la vitesse ; le fil se détend avant que la vitesse ne s'annule.

On observera donc des révolutions si le fil ne s'est pas détendu en $\theta = \pi$, soit si :

$$\frac{2}{3} - \frac{v_0^2}{3g\ell} \leqslant -1 \to v_0 \geqslant \sqrt{5g\ell} = 6{,}3\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}.$$

(**c**) Les différentes trajectoires sont représentées à la figure 1. On y distingue des trajectoires :

- fermées caractéristiques des mouvements pendulaires,
- interrompues caractéristiques des mouvements interrompus par détente du fil,
- « ondulantes » caractéristiques des mouvements de révolution périodiques.

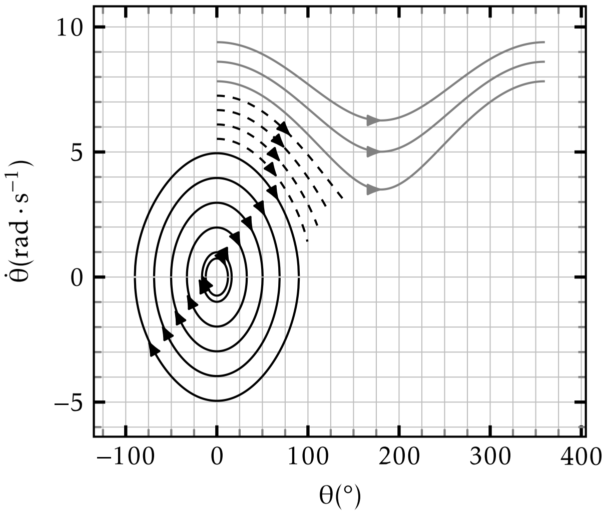


Fig. 1 : Trajectoires dans l'espace des phases. Les trajectoires en noir continu, correspondant aux mouvements pendulaires ; les trajectoires en noir interrompu correspondant aux mouvements où le fil se détend avant d'atteindre le sommet ; et les trajectoires en gris correspondant aux mouvements de révolution périodiques.

III.3. (**a**) On observe des trajectoires :

- verticale pour $\theta_t = 90°$
- paraboliques dans les deux autres cas, avec un vecteur vitesse initial qui forme l'angle θ_t avec l'horizontale.

(**b**) L'expression précédente de la trajectoire donne :

$$z = h - \ell\cos(\theta_t) + x\tan(\theta_t) - \frac{gx^2}{2v_i^2(\cos(\theta_t))^2},$$

avec :

$$v_i = \ell\dot\theta = \ell\sqrt{\frac{v_0^2}{\ell^2} - 2\frac{g}{\ell}(1-\cos(\theta_t))} = v_0\sqrt{1 - \frac{2g\ell}{v_0^2}(1-\cos(\theta_t))}.$$

Le projectile atteint le sol pour $z = 0$, soit, après calculs :

$$d = \frac{v_0^2\sin(2\theta_t)}{2g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2(h-\ell\cos(\theta_t))g}{v_0^2(\sin(\theta_t))^2}}\right).$$

(**c**) On calcule $d = 23{,}9\,\mathrm{m}$, pour $\theta_t = 45°$ et $v_0 = 15{,}2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. On atteint le sommet de la trajectoire pour $\dot z = 0$, soit $t = v_0\sin(\theta_t)/g$, où $z = h - \ell\cos(\theta_t) + v_0\sin(\theta_t)t - \frac{1}{2}gt^2$. On calcule ici

$$z_{\max} = h\ell\cos(\theta_t) + \frac{v_0^2(\sin(\theta_t))^2}{2g} = h - \ell\cos(\theta_t) + \frac{v_0^2}{4g} = 6{,}9\,\mathrm{m}.$$

Comme précédemment on obtient (le plus efficace est de nouveau d'utiliser l'énergie) que la vitesse au sol sera :

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2g(h-\ell\cos(\theta))} \simeq v_0 = 15\,\mathrm{m\cdot s^{-1}},$$

car l'énergie acquise sur une chute de l'ordre du m est négligeable devant l'énergie cinétique associée à v_0.

(**d**) L'ordre de grandeur des distances (portée, élévation) est de $v_0^2/(2g)$. En prenant $v_0^2/(2g) \simeq 3\,\mathrm{m}$, on obtient $v_0 = 7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, facilement réalisable. Il est tout à fait possible d'atteindre un point situé à environ 3 m.

IV Utilisation d'un ressort

IV.1. Sur un mouvement circulaire uniforme, l'accélération est purement radiale. Or ici la tension du ressort est toujours radiale mais le poids aura une composante orthoradiale pour $\theta \neq 0 \mod \pi$: le mouvement circulaire uniforme n'est pas possible.

IV.2. (**a**) Les équations du mouvement sur $\vec{e_r}$ et $\vec{e_\theta}$ s'écrivent respectivement :

$$m(\ddot\ell - \ell\dot\theta^2) = -k(\ell-\ell_0) + mg\cos(\theta) \qquad m(2\dot\ell\dot\theta + \ell\ddot\theta) = -mg\sin(\theta)$$
$$\ddot\ell - \ell\dot\theta^2 = -\frac{k}{m}(\ell-\ell_0) + g\cos(\theta) \qquad 2\dot\ell\dot\theta + \ell\ddot\theta = -g\sin(\theta),$$

(**b**) Pour un mouvement uniforme, avec $\dot\ell = \text{cste} \equiv \omega$ et $\theta = \omega t$ on obtient :

$$\ddot\ell - \ell\omega^2 = -\frac{k}{m}(\ell-\ell_0) + g\cos(\theta) \qquad 2\dot\ell\omega = -g\sin(\omega t).$$

La deuxième équation peut, puisque $\dot\theta = \text{cste} = \omega$, s'intégrer en :

$$\int_{t=0}^{t}\dot\ell\,\mathrm{d}t = -\frac{g}{2\omega}\int_{t=0}^{t}\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t \to \ell = \ell_i - \frac{g}{2\omega^2}(1-\cos(\omega t)). \tag{1}$$

Pour que la première équation soit vérifiée, il faut alors avoir :

$$\ddot\ell - \ell\omega^2 = -\frac{k}{m}(\ell-\ell_0) + g\cos(\omega t)$$
$$-\frac{g}{2}\cos(\omega t) - \left(\ell_i - \frac{g}{2\omega^2}(1-\cos(\omega t))\right)\omega^2 = g\cos(\theta) - \frac{k}{m}\left(\ell_i - \ell_0 - \frac{g}{2\omega^2}(1-\cos(\omega t))\right).$$

Pour que cette égalité soit vérifiée pour tout t, il faut que les termes en cos soit égaux d'une part et que les termes constants le soient d'autre part, soit :

$$\frac{kg}{2m\omega^2} = 2g \qquad \text{et:} \qquad -\ell_i\omega^2 + \frac{g}{2} = -\frac{k}{m}\left(\ell_i - \ell_0 - \frac{g}{2\omega^2}\right)$$
$$\frac{k}{m} = 4\omega^2 \qquad\qquad \ell_i = \frac{4}{3}\ell_0 + \frac{g}{2\omega^2}.$$

(**c**) On avait $v_0 = 15\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. On a par ailleurs : $\omega = v_0/\ell_i$, on doit donc résoudre le système :

$$k = \frac{4mv_0^2}{\ell_i^2} \qquad l_i = \frac{4\ell_0}{3} + \frac{g\ell_i^2}{2v_0^2}.$$

On cherche les valeurs de ℓ_i vérifiant la deuxième équation. On obtient : $\ell_i = 1{,}09\,\mathrm{m}$ ou $\ell_i = 44{,}8\,\mathrm{m}$. La deuxième solution n'est évidemment pas raisonnable, on aura donc $\ell_i = 1{,}09\,\mathrm{m}$. On calcule alors :

$$\ell_i = 1{,}09\,\mathrm{m} \qquad k = \frac{4mv_0^2}{\ell_i^2} = 38\,\mathrm{N}$$

L'élongation du ressort est loin d'être négligeable puisque il doit être allongé de 30 cm par rapport à une longueur au repos de 80 cm.

(**d**) L'équation 1 assure que l'amplitude des oscillations de ℓ (notée $\Delta\ell$), entre $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, sera $\Delta\ell = g/(2\omega^2) = \frac{g\ell_i^2}{2v_0^2} = 2{,}6\,\mathrm{cm}$: le mouvement est pratiquement circulaire uniforme puisque $\Delta\ell \ll \ell_i$.

IV.3. Au vu des grandes vitesses qu'on cherche à atteindre, le fil ne risque pas de se détendre. De plus le mouvement n'est pas une simple rotation autour de la main du lanceur puisque celle-ci décrit également un cercle pour communiquer plus efficacement de l'énergie à la fronde. L'utilisation d'un ressort au lieu d'un fil ne présente donc pas un grand intérêt.

Il faudrait d'ailleurs développer davantage le modèle pour étudier et prendre en compte le mouvement de la main du lanceur, qui est primordiale pour accélérer le projectile, entretenir le mouvement et rajouter une impulsion à l'instant du lancer.