Les sacs seront laissés devant le tableau. Conservez seulement de quoi écrire et une calculatrice : pas de téléphone !
Si vous ne comprenez pas une notation, une question, ou si vous pensez avoir découvert une erreur d'énoncé, signalez-le immédiatement.
Le référentiel terrestre sera considéré galiléen durant toute la durée des phénomènes étudiés.

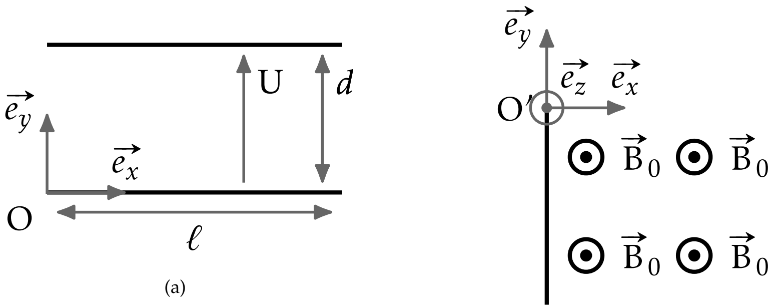
Problème 1 : Trajectoires de particules chargées

On considère le mouvement d'un proton dans des champs magnétique et électriques dans le vide. On néglige la pesanteur.

Données : masse du proton $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$; charge du proton $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$; vitesse de la lumière $c = 3{,}00 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$; distance entre les plaques $d = 3{,}00 \cdot 10^{1}\,\mathrm{cm}$.

I Généralités

I.1. On étudie son mouvement dans un champ électrique uniforme $\vec{E} = E_0\vec{e_y}$. Il se trouve initialement en O animé d'une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{e_x}$ (avec $v_0 \geqslant 0$; voir la figure 1a).



(a) (b)

Fig. 1

(a) Déterminer les équations horaires du mouvement $x(t)$ et $y(t)$.

(b) Le champ est créé par une paire de plaques conductrices orthogonales à $\vec{e_y}$ distantes d'une distance notée d (placées en $y = 0$ et $y = d$) entre lesquelles est appliquée une tension U. Rappeler l'expression de la tension U en fonction de E_0 et d. On précisera le signe de U pour que les protons soient se dirigent vers les y croissants.

(c) Déterminer et calculer la longueur maximale des plaques selon x, notée ℓ pour laquelle les protons n'atteignent pas la plaque en $y = d$. On prendra $d = 3{,}00 \cdot 10^{1}\,\mathrm{cm}$; $E = 1{,}00 \cdot 10^{6}\,\mathrm{V \cdot m^{-1}}$ et $v_0 = 5{,}00 \cdot 10^{6}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

I.2. On étudie désormais le mouvement du proton dans un champ magnétique uniforme $B = B_0\vec{e_z}$. Il est initialement en O' animé de la vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{e_x}$ (avec $v_0 \geqslant 0$; voir la figure 1b).

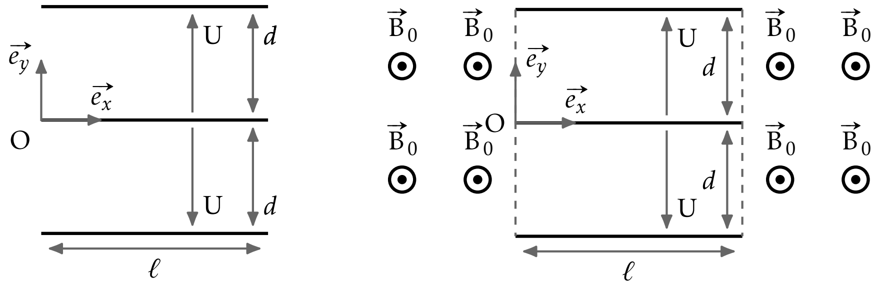
(a) Montrer que le mouvement est circulaire uniforme. On précisera l'expression de sa période et la position de son centre. Quel doit être le signe de B_0 pour que le déplacement s'effectue vers les y décroissants ?

(b) Calculer la période et la position du centre pour $v_0 = 5{,}00 \cdot 10^{6}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et $B_0 = 2{,}00 \cdot 10^{-1}\,\mathrm{T}$.

(c) On considère désormais que la vitesse, toujours de norme v_0, forme désormais l'angle α avec la direction $\vec{e_x}$. Déterminer les expressions de la position et du vecteur vitesse du proton quand il repasse par la droite $O'y$.

II Oscillations

On considère la configuration de plaques conductrices représentée à la figure 2a, chaque paire étant soumise à la même tension U en valeur absolue.



(a) (b)

Fig. 2

II.1. Définir une énergie potentielle pour le mouvement du proton. Quel doit être le signe de U pour que les protons soient rappelés vers le plan $y = 0$? On suppose cette situation réalisée dans toute la suite.

II.2. Le proton est initialement en $(x = 0\,; y = 0)$, animé d'une vitesse $v_0\vec{e_x} + v_1\vec{e_y}$. À quelle distance maximale pourra-t-il s'éloigner du plan $y = 0$?

II.3. **(a)** Déterminer l'expression de la distance $y(\ell)$ à laquelle il se trouve quand il a parcouru la distance ℓ selon $\vec{e_x}$.

(b) Tracer l'allure de la courbe de $y(\ell)$ en fonction de v_1. On en précisera en particulier un équivalent pour $v_1 \to \infty$.

III Allers et retours

On considère la structure de la figure 2b dans laquelle il règne un champ $\vec{B}_0 = B_0\vec{e_z}$ uniforme pour $x \geqslant \ell$ et pour $x \leqslant 0$. Le champ magnétique pour $0 \leqslant x \leqslant \ell$ pourra être nul ou non nul. On cherche à faire effectuer aux protons un grand nombre d'allers selon $\vec{e_x}$.

III.1. On considère dans cette question $U = 0$ et un champ magnétique nul pour $0 \leqslant x \leqslant \ell$.

(**a**) Déterminer la trajectoire d'un proton animé d'un vecteur vitesse selon $\vec{e_x}$ en $(x = 0\,; y = 0)$ dans le cas $B_0 \geqslant 0$.

(**b**) Même question quand le vecteur vitesse en $(x = 0\,; y = 0)$ forme un petit angle α avec la direction $\vec{e_x}$. Commenter.

(**c**) L'ajout d'une tension U non nulle peut-il efficacement régler ce problème ? On donnera une réponse qualitative basée sur des allures de trajectoires.

III.2. Dans cette question la tension U est non nulle et on suppose que le champ $\vec{B} = B_0\vec{e_z}$ est présent dans tout l'espace, y compris pour $0 \leqslant x \leqslant \ell$.

(**a**) On considère un proton situé initialement en $(x = 0\,, y = y_0)$ avec $y0 \geqslant 0$, et animé d'une vitesse $v_0 = v_0\vec{e_x}$ avec $v_0 \geqslant 0$. Montrer qu'il existe une valeur de B_0 pour laquelle son mouvement est rectiligne uniforme.

(**b**) Tracer l'allure de la trajectoire ultérieure pour différentes valeurs de y_0. On veut avoir $y_0 = 3{,}00 \cdot 10^1$ cm, et $v_0 = 5{,}00 \cdot 10^6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ pour $d = 4{,}00 \cdot 10^1$ cm. Pour quelles valeurs de B_0 pourra-t-on effectuer des allers et retour selon $\vec{e_x}$.

Calculer les valeurs de U correspondantes.

On admettra qu'on peut avoir un champ électrique rigoureusement nul pour $x \leqslant 0$ et $x \geqslant \ell$, au besoin en l'éteignant quand les protons s'y trouvent.

Correction du problème 1

I Généralités

I.1. **(a)** La loi de la quantité de mouvement s'écrit $m\vec{a} = q\vec{E}_0 =$. Le mouvement est donc uniformément accéléré. La solution vérifiant les conditions initiales $M(0) = 0$; $\vec{0} = \vec{0}$ est :

$$x = v_0 t \qquad y = \frac{qE_0 t^2}{2m} \tag{1}$$

(b) Le champ électrique est dans le sens des potentiels décroissants, on a donc ici $\vec{E}_0 = -(U/d)\vec{e_y}$. On devra donc avoir $U \leqslant 0$ pour que les protons, de charge positive, soient déviés selon $+\vec{e_y}$.

(c) On calcule $y(x)$, la longueur $\ell_{\max}$ est celle pour laquelle $y(\ell_{\max}) = d$. On obtient :

$$y(x) = \frac{qE_0 x^2}{2mv_0^2} \rightarrow \ell_{\max} = \sqrt{\frac{2mv_0^2 d}{qE_0}} = 3{,}96 \cdot 10^{-1}\ \mathrm{m}. \tag{2}$$

I.2. **(a)** Comme vu en cours le mouvement est circulaire uniforme puisque le vecteur vitesse initial est orthogonal au champ magnétique. Sa pulsation ω_c est la pulsation cyclotron et son rayon est $R = v_0/\omega_c$. L'enroulement pour un proton est donné par la règle de la main gauche : il faut donc avoir $B_0 \geqslant 0$.

(b) On calcule :

$$\omega_c = \frac{qB_0}{m} = 1{,}92 \cdot 10^7\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_c} = 3{,}28 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{s} \quad \text{et: } R = \frac{v_0}{\omega_c} = 2{,}61 \cdot 10^{-1}\ \mathrm{m} \tag{3}$$

(c) La trajectoire est représentée sur la figure 3a. Il s'agit d'un cercle de même rayon R mais dont le centre n'est plus sur l'axe $O'y$. On constate géométriquement que le point de sortie (noté S_α) est situé en $y = -2R\cos(\alpha)$.

La force magnétique ne travaillant pas, la norme de la vitesse quand on repasse par la droite $O'y$ (point S_α sur la figure 3a) est toujours v_0. Le vecteur vitesse en sortie, noté $\vec{v}\,S\alpha$ a pour expression :

$$\vec{v}_{S\alpha} = v_0\left(-\cos(\alpha)\vec{e_x} + \sin(\alpha)\vec{e_y}\right). \tag{4}$$

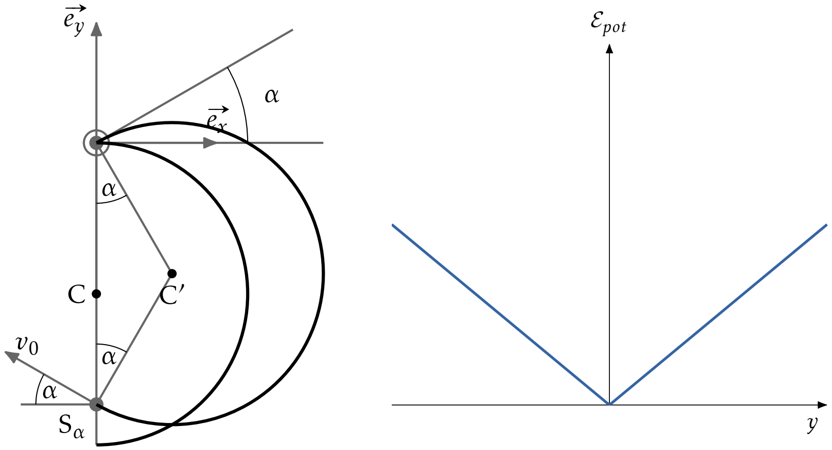
On constate qu'il s'agit du symétrique du vecteur vitesse à l'entrée en O' : ce dispositif constitue en quelque sorte un « miroir à protons ». Ce n'est pas rigoureusement un miroir puisqu'il décale aussi du faisceau de particules.

II Oscillations

II.1. La force électrique est conservative, on peut lui associer l'énergie potentielle $\mathcal{E}_{\text{pot}} = eV$. Comme ici on a $V = U\,|y|\,/d$, on a :

$$\mathcal{E}_{\text{pot}} = \frac{eU\,|y|}{d}. \tag{5}$$

Les protons seront rappelés vers $y = 0$ si cette droite constitue un minimum d'énergie potentielle, soit si $U \geqslant 0$. L'énergie potentielle a alors l'allure représentée sur la figure 3b.



(a) (b)

Fig. 3 : .

II.2. La loi de la quantité de mouvement assure que le mouvement est rectiligne uniforme selon $\vec{e_x}$. Selon $\vec{e_y}$ il est animé d'une accélération constante en norme mais toujours dirigée vers le plan $y = 0$. Il décrit donc des oscillations autour de ce plan, tout en progressant à v_0 selon $\vec{e_x}$.

La conservation de l'énergie mécanique entre l'instant initial un instant où son écart au plan $y = 0$ est maximal (noté $y_{\max}$), *ie* où $v_y = 0$ et donc $\vec{v} = v_0\vec{e_x}$ s'écrit :

$$m\frac{v_0^2 + v_1^2}{2} + 0 = m\frac{v_0^2}{2} + \frac{eUy_{\max}}{d} \rightarrow y_{\max} = \frac{mv_1^2 d}{2eU}. \tag{6}$$

II.3. **(a)** Un quart d'oscillation entre $y = 0$ et $y = y_{\max}$, à accélération constante $eU/(md)$ dure Δt_0, avec :

$$\frac{eU}{md}(\Delta t_0) = v_1 \rightarrow \Delta t_0 = \frac{mdv_1}{eU}. \tag{7}$$

Tous les $2\Delta t_0$, le proton repassera donc par $y = 0$.

Il sort par ailleurs en $x = \ell$ au bout d'une durée ℓ/v_0. Entre le dernier passage par $y = 0$ et la sortie, il s'écoule donc la durée $\Delta t_s = \ell/(2v_0\Delta t_0) - E[\ell/(2v_0\Delta t_0)]$, pendant laquelle il est animé d'un mouvement uniformément accéléré et de vitesse initiale de norme v_1 et parcourt donc la distance :

$$y(\ell) = v_1\Delta t_s - \frac{eU\Delta t_s^2}{2md}, \tag{8}$$

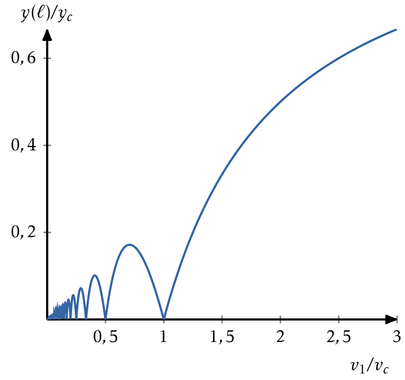
avec $E(x)$ la partie entière de x.

(b) La courbe a l'allure représentée ci-contre. On a simplifié l'expression de $y(\ell)$ à l'aide des longueurs et vitesses caractéristiques :

$$y_c = \frac{\ell^2 eU}{2dmv_0^2} \quad v_c = \frac{\ell eU}{2mdv_0}. \tag{9}$$

Pour $v_1 \gg v_c$, le proton n'a pas le temps de faire une oscillation complète, et on a :

$$y(\ell) = \frac{v_1 \ell}{v_0} - \frac{eU}{2dm}\left(\frac{\ell}{v_0}\right)^2 \tag{10}$$



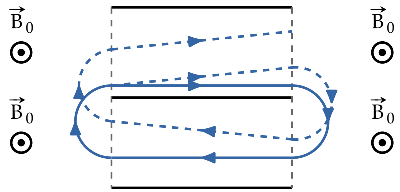
III Allers et retours

III.1. (a) Aucune force ne s'applique pour $0 \leqslant x \leqslant \ell$, le mouvement est donc rectiligne uniforme à $v_0\overrightarrow{e_x}$ de $x = 0$ à $x = \ell$. Le proton parcourt ensuite un demi-cercle de rayon v_0/ω_c, puis traverse à $-v_0\overrightarrow{e_x}$ de $x = \ell$ à $x = 0$, puis fait un demi-tour…

(b) Si la trajectoire entre les plaques n'est pas horizontale, par exemple croissante selon $+\overrightarrow{e_y}$, les résultats de la question **I.2c** assurent qu'à l'issue du mouvement circulaire dans le champ magnétique :

- elle sortira à une altitude supérieure,
- en continuant à remonter selon $+\overrightarrow{e_y}$.

Ceci se poursuivra à chaque traversée et la trajectoire finira inévitablement par toucher une plaque, comme on l'a représenté sur figure ci-contre.



(c) On peut ajouter une force électrique vers le bas pour compenser la dérive lors de la traversée de $x = 0$ à $x = \ell$. Les protons arriveront donc dans la zone magnétique avec une vitesse horizontale et effectueront donc un demi-tour. Mais alors ils seront soumis à une force électrique et dévieront vers le bas ou vers le haut selon qu'ils se trouvent alors dans la zone $y \geqslant 0$ ou $y \leqslant 0$. La trajectoire va donc dériver, voire osciller autour de l'axe $y = 0$ avant de subir de nouveau un miroir en $x = 0$. Elle ne sera pas stable.

III.2. (a) Pour un mouvement rectiligne uniforme selon $\overrightarrow{e_x}$, la force électrique et la force magnétique sont toutes les deux dirigées selon $\overrightarrow{e_y}$. Le mouvement sera rectiligne uniforme si leur somme est nulle, soit si :

$$\overrightarrow{0} = E_0\overrightarrow{e_y} + v_0 v_0\overrightarrow{e_x} \wedge B_0\overrightarrow{e_z} = (E_0 - v_0 B_0)\,\overrightarrow{e_y} \to E_0 = v_0 B_0. \tag{11}$$

Il suffit donc de choisir $B_0 = E_0/v_0$, ce qui impose d'avoir $E_0 \geqslant 0$ et donc $U \leqslant 0$.

(b) On vérifie que la condition de la question précédente est également vérifiée si le retour s'effectue dans la zone $y \leqslant 0$ car la vitesse et le champ électrique ont tous les deux changé de sens. En revanche dans la « mauvaise » zone ($y \leqslant 0$) les forces électriques et magnétiques s'ajoutent au lieu de se compenser pour une vitesse selon $+\overrightarrow{e_x}$.

On pourra donc effectuer des allers et retour si à l'issue du mouvement dans le champ magnétique en $x \geqslant \ell$, il se trouve dans la zone $y \leqslant 0$. Il faut donc qu'on ait :

$$y_0 \leqslant 2R \leqslant d + y_0 \to \frac{2mv_0}{e(d+y_0)} \leqslant B_0 \leqslant \frac{2mv_0}{ey_0} \to 1{,}49 \cdot 10^{-1}\,\mathrm{T} \leqslant B_0 \leqslant 3{,}48 \cdot 10^{-1}\,\mathrm{T}, \tag{12}$$

et on déduit :

$$|U| = dv_0 B_0 \to 3{,}00 \cdot 10^5\,\mathrm{V} \leqslant |U| \leqslant 6{,}96 \cdot 10^5\,\mathrm{V}. \tag{13}$$