

Problème 1 : Mission Rosetta

On étudie quelques aspects de la mission Rosetta, qui a conduit entre 2004 et 2014 une sonde spatiale jusqu'à la comète 67P/Tchourioumov-Guérassimenko (surnommée « Tchouri » dans toute la suite).

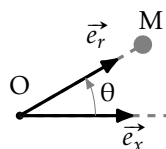
On établit ou rappelle dans une première partie des généralités utiles pour toute la suite. Selon les phases du mouvement, on travaillera dans différents référentiels : héliocentrique \mathcal{R}_S ou géocentrique \mathcal{R}_T qu'on considérera à chaque fois galiléen pour la durée du phénomène étudié.

Données :

- Période de révolution terrestre : $T_T = 3,65 \cdot 10^2$ jours ; rayon de l'orbite terrestre considérée circulaire : $r_T = 1,50 \cdot 10^{11}$ m = 1 ua ; rayon de la Terre : $R_T = 6,40 \cdot 10^3$ km ; masse de la Terre : $m_T = 6,00 \cdot 10^{24}$ kg.
- Périhélie de « Tchouri » $r_p = 1,24$ ua, aphélie de Tchouri $r_a = 5,68$ ua.
- Constante gravitationnelle $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11}$ S · I · .

I Généralités

On étudie le mouvement, dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_S , d'un point matériel de masse m et de position M soumis uniquement à la force de gravitation exercée par une masse m_T fixe en O dans \mathcal{R}_S . Son mouvement sera caractérisé par ses coordonnées polaires : la distance $r = OM$ et l'angle θ entre un vecteur fixe \vec{e}_x dans \mathcal{R}_S et le vecteur unitaire \vec{e}_r défini par $\vec{OM} = r\vec{e}_r$.



I.1. On désigne par $\vec{\sigma}_O$ le moment cinétique en O du point matériel. Montrer que $\vec{\sigma}_O$ est conservé au cours du mouvement, et déterminer sa norme, notée σ_c , en fonction de m , r et θ . On définit le vecteur unitaire \vec{e}_z par $\vec{\sigma}_O = \sigma_c \vec{e}_z$. Quelle propriété géométrique de la trajectoire est assurée par la conservation de $\vec{\sigma}_O$?

I.2. On considère un mouvement circulaire de rayon R autour de O .

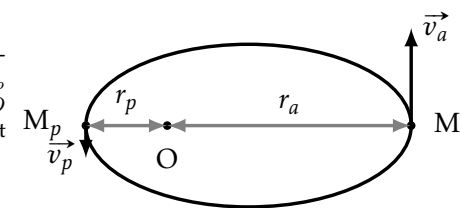
(a) Montrer qu'il est uniforme. Déterminer :

- la norme v de la vitesse,
- les énergies cinétique, potentielle et mécanique,

en fonction de la constante gravitationnelle \mathcal{G} , de m_T , m et R .

- (b) Déterminer l'expression du quotient T^2/R^3 en fonction des constantes du problème. On admet que ce quotient conserve la même valeur pour les trajectoires elliptiques autour du même astre.
- (c) Calculer v pour l'orbite de révolution de la Terre autour du soleil, de rayon noté r_T . On notera v_T sa valeur.
- (d) On considère un point matériel situé sur l'orbite terrestre ($r = r_T$). Quelle vitesse doit-il posséder pour pouvoir s'éloigner à l'infini du soleil ultérieurement ? On l'exprimera en fonction de v_T .

I.3. On considère une trajectoire elliptique (on ne cherchera pas à montrer son existence) de périastre M_p et d'apoastre M_a . On note r_p la distance à l'astre O et \vec{v}_p la vitesse (respectivement r_a et \vec{v}_a) au point M_p (resp. M_a).



Montrer que l'énergie mécanique se met sous la forme :

$$\mathcal{E}_m = -\frac{\mathcal{G}m_T m}{r_p + r_a}. \quad (1)$$

II Trajectoires

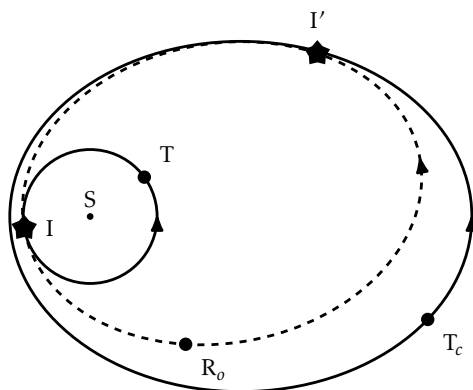
II.1. On étudie d'abord le lancement de la sonde dans le référentiel géocentrique. On ne considère que l'attraction gravitationnelle de la Terre.

- (a) La sonde est lancée de la Terre le 2 mars 2004 avec une vitesse à la surface terrestre dans le référentiel géocentrique de norme v_ℓ . Déterminer et calculer sa valeur minimale, nommée v_1 pour qu'elle puisse s'éloigner à l'infini de la Terre, dans l'hypothèse où l'on néglige les frottements.
- (b) Calculer la vitesse de la sonde quand elle est loin de la Terre, en négligeant l'attraction des autres astres, pour $v_\ell = 2v_1$.
- (c) On suppose que la sonde a été lancée dans le sens du mouvement de la Terre sur son orbite, avec $v_\ell = v_1$ et on considère qu'après son lancement on peut négliger l'attraction gravitationnelle de la Terre pour ne plus considérer que celle du soleil. Justifier qu'on considère que la sonde décrit ensuite une orbite circulaire autour du soleil dont on précisera la période et le rayon.
- (d) On suppose maintenant qu'on a toujours $v_\ell = v_1$ mais qu'à l'issue d'une manœuvre ultérieure le vecteur vitesse de Rosetta a changé de direction sans changer de norme et forme un angle α avec celui de la Terre dans \mathcal{R}_S . Représenter sur un schéma l'orbite de la Terre et l'allure de celle de Rosetta. On choisira α de l'ordre de $2,00 \cdot 10^{10}$ avec un vecteur vitesse de Rosetta la rapprochant initialement du soleil. On justifiera la valeur du grand axe de la trajectoire de Rosetta.

II.2. On étudie maintenant une version simplifiée des trajectoires de la comète Tchouri et de la sonde Rosetta autour du soleil. On étudie ces mouvements dans le référentiel héliocentrique et on ne considère que l'attraction gravitationnelle du soleil.

On représente ci-contre l'allure des orbites de la Terre T , de Tchouri T_c et de la dernière orbite de Rosetta R_o autour du soleil S .

- (a) Déterminer et calculer la période de révolution de Tchouri, notée T_{Tc} , ainsi que sa vitesse à son périhélie et à son aphélie, notées respectivement $r_{Tc p}$ et $r_{Tc a}$.
- (b) La sonde étant initialement sur une orbite quasi-circulaire de rayon qu'on considérera égal à R_T , on modifie (par une méthode qu'on étudiera plus loin) la vitesse de Rosetta quand elle passe au point I . On note v_I sa norme à l'issue de cette manœuvre et v_{pTc} la vitesse de Tchouri à son périhélie. Sur la figure ci-contre v_I est-elle supérieure ou inférieure à v_{pTc} ? On justifiera soigneusement l'affirmation.
- (c) Comparer, pour la situation ci-dessus, la période de Rosetta à T_{Tc} . Que peut-on en conclure concernant la position de Tchouri au moment de la manœuvre si on veut que Rosetta et Tchouri se rencontrent au point I' ?
- (d) Déterminer et calculer $v_I^2 - v_T^2$ si la période de l'orbite de Rosetta à l'issue de la manoeuvre avait été égale à T_{Tc} .

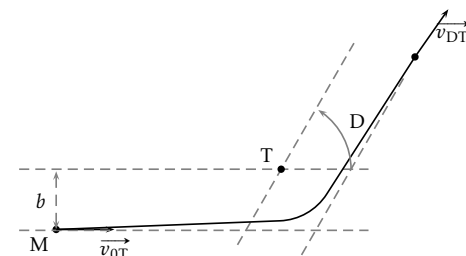


III Assistance gravitationnelle

Cette technique consiste à utiliser le passage de Rosetta à proximité de la Terre pour augmenter ou diminuer sa vitesse dans le référentiel héliocentrique \mathcal{R}_S . Le mouvement de Rosetta est affecté par la Terre pendant un temps suffisamment court, et la Terre est suffisamment massive, pour qu'on puisse considérer que le mouvement dans \mathcal{R}_S de la Terre (de position T et de masse m_T) est, pendant cette manoeuvre, rectiligne uniforme à une vitesse qu'on notera \vec{V}_T .

III.1. On étudie le mouvement de Rosetta dans le référentiel géocentrique, noté \mathcal{R}_T , en translation à \vec{V} par rapport à \mathcal{R}_S . On note \vec{v}_{0T} le vecteur vitesse de Rosetta quand elle est loin de la Terre et se dirige vers celle-ci et b son paramètre d'impact.

- (a) Quelle est la nature de son mouvement quand elle est loin de la Terre et qu'elle s'en approche. Même question quand elle en est loin et s'en éloigne.
- (b) On note \vec{v}_{DT} son vecteur vitesse quand elle est loin et s'en éloigne. Que vaut v_{DT} ?
- (c) On nomme « déviation », notée D , l'angle entre \vec{v}_{0T} et \vec{v}_{DT} . Préciser sans calculs pour quelles conditions initiales on aura $D = 0$ et pour quelles conditions initiales on aura $D = \pi$.

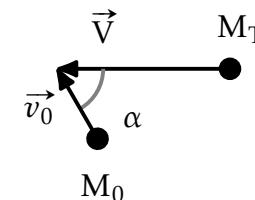


- (d) On admet que D ne dépend que des paramètres b, v_{0T}, \mathcal{G} et m_T . Former un nombre sans dimension β à partir de ces grandeurs et proposer une fraction rationnelle $F(\beta)$ de degré 1 en β telle que :

$$\cos(D) = F(\beta).$$

III.2. On désigne par \vec{v}_0 le vecteur vitesse initial de la sonde dans le référentiel héliocentrique et \vec{v}_{0T} celui dans le référentiel \mathcal{R}_T .

- (a) Reproduire la figure ci-contre et y représenter la construction de \vec{v}_{0T} à partir du point M_0 .
- (b) On note D la déviation subie par la sonde dans \mathcal{R}_T et \vec{v}_{1T} sa vitesse dans \mathcal{R}_T à l'issue de la déviation. Représenter \vec{v}_{1T} sur la figure. On le fera pointer vers le point M_T et on choisira D de l'ordre de 120° (sens trigonométrique). En déduire la construction de la vitesse dans \mathcal{R}_S à l'issue de la déviation, notée \vec{v}_1 , et vérifier qu'on accélère ainsi la sonde dans \mathcal{R}_g .
- (c) Représenter sur le schéma la configuration rendant la norme v_1 maximale quand l'angle $\alpha = (\widehat{\vec{v}_0; \vec{V}})$ reste fixé. On note $v_{1 \max}$ la norme correspondante. Établir l'expression de $v_{1 \max}$ en fonction de V, v_0 et de α quand v_1 est maximale.



- III.3. (a) On considère le cas particulier $v_0 = 0$. Déterminer $v_{1 \max}$. On pourra s'aider d'un schéma si l'expression générale n'a pas été établie.
- (b) On considère le cas particulier $v_0 = V$. Déterminer l'expression de $\frac{v_{1 \max} - V}{V}$ pour $\alpha \ll 1$. On effectuera un développement limité en α au terme non nul d'ordre le plus bas.

III.4. Après son lancement le 2 mars 2004, Rosetta recroise pour la première fois la Terre un an plus tard. À l'issue de la phase d'assistance gravitationnelle, la NASAⁱ annonce que sa vitesse s'est accrue de $3,80 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. En supposant qu'on était dans la configuration réalisant $v_{1 \max}$, déterminer et calculer la valeur de l'angle entre les trajectoires de Rosetta et de la Terre avant la manoeuvre.

Problème 2 : Swing au golf

L'objectif du golf est de parvenir, en un nombre de coups le plus faible possible, à envoyer la balle dans chacun des 18 trous du parcours, en la frappant à l'aide d'un instrument appelé « club » : le geste effectué par le joueur avec le club pour frapper la balle est appelé « swing ». On étudie dans cette partie la mécanique du swing, pour mettre en évidence à la fois la cinématique et les efforts mis en jeu.

Le référentiel terrestre sera considéré galiléen pour la durée des phénomènes étudiés. On négligera tout frottement.

i. National Aeronautics and Space Administration

I Caractéristiques du club

Un club de golf est schématiquement composé de deux parties, rigidement liées entre elles : le manche et la tête de club. Le joueur tient le club avec ses mains par l'extrémité A du manche, et la tête de club est fixée à l'autre extrémité B et entre en contact avec la balle lors de l'impact (voir la figure 1). Dans tout l'énoncé, le mot « club » représentera l'ensemble {manche et tête de club}.

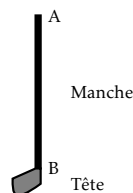


FIG. 1 : .

Le manche est une tige rectiligne sans épaisseur de longueur $AB = L_c$ et le club possède un centre d'inertie G_c qu'on considérera situé sur le manche, avec $AG_c = h_c$; une masse totale m_c et un moment d'inertie total J_{cA} par rapport à un axe perpendiculaire passant par A . Il faut bien noter que la tête de club est prise en compte dans G_c , m_c et J_{cA} .

On cherche dans cette partie à déterminer expérimentalement $AG_c = h_c$ et J_{cA} .

- I.1. Expliquer brièvement, en s'appuyant sur un ou deux schéma(s) simple(s) et clair(s), pourquoi, en tendant son index à l'horizontale et en s'arrangeant pour poser le club en équilibre dessus à l'horizontale, on détermine la position de G_c .

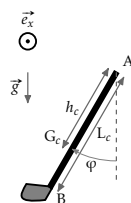


FIG. 2 : .

- I.2. Afin de mesurer J_{cA} , on réalise à l'aide du club un pendule pesant, en suspendant l'extrémité supérieure du manche (point A) à un axe horizontal (Ax) fixe, par une liaison pivot sans frottement. On repère l'écart du club avec la verticale descendante par l'angle φ (voir la figure 2).

- (a) À l'aide du théorème du moment cinétique et en négligeant les frottements de l'air, établir l'équation différentielle du mouvement.
 (b) On mesure la période des petites oscillations : $T_0 = 2,30$ s. Exprimer J_{cA} en fonction de m_c , g , h_c et T_0 . Calculer sa valeur.
 (c) On admet (théorème d'Huygens) que le moment d'inertie par rapport à (Ax) s'exprime en fonction de celui par rapport à (G_cx), noté J_{cG} selon :

$$J_{cA} = J_{cG} + m_c A G_c^2. \quad (2)$$

Justifier sans calcul le signe de $J_{cA} - J_{cG}$ et calculer la valeur de J_{cG} .

II Cinématique du swing club bloqué

Pour décrire le swing de golf, il faut prendre en compte le mouvement du club mais aussi celui du golfeur. Le modèle le plus simple consiste à considérer que les bras du golfeur sont en rotation autour d'un axe fixe.

On assimile de manière simplifiée l'association des deux bras à une tige unique OA , rectiligne homogène, de longueur $OA = L_b$, de masse m_b et de moment d'inertie J_{bO} par rapport à l'axe (Ox) (voir la figure 3).

Lors d'un swing complet, le golfeur commence par faire pivoter les bras et le club vers le haut, jusqu'à parvenir à une situation de torsion extrême où il ne peut plus tourner ses bras davantage puis il fait redescendre les bras et le club rapidement afin que la tête de club frappe la balle avec une vitesse élevée.

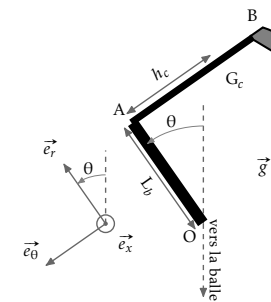


FIG. 3

On s'intéressera ici uniquement à cette phase de descente. La descente a lieu entre l'instant défini comme $t = 0$, où l'ensemble des bras et du club sont immobiles au dessus du golfeur et l'instant $t = \tau$ où la tête B du club vient frapper la balle, à l'aplomb du point O . L'axe (Ox) est fixe. La tige OA (les bras) pivote dans le plan vertical orthogonal à Ox , autour de (Ox) fixe : on repère son écart par rapport à la verticale ascendante par l'angle θ . Le golfeur maintient le **club orthogonal à (OA)** pendant toute une première partie du mouvement, dans la géométrie représentée sur la figure 3.

- II.1. Déterminer, en la justifiant rapidement, l'expression du moment cinétique des bras par rapport à l'axe Ox , noté σ_b , en fonction de J_{bO} et $\dot{\theta}$.

- II.2. (a) On admet que l'expression (2) reste valable en remplaçant A par O pour déterminer le moment d'inertie du club par rapport à l'axe horizontal Ox , noté J_{cO} . Déterminer l'expression de J_{cO} et calculer sa valeur.

- (b) En déduire l'expression de son moment cinétique par rapport à l'axe Ox , noté σ_c .

- II.3. En déduire l'énergie cinétique de l'ensemble du club et des bras tant qu'ils restent orthogonaux en fonction entre autres de $\dot{\theta}^2$.

- II.4. (a) Déterminer l'expression de la quantité de mouvement du centre d'inertie des bras en fonction entre autres de $\dot{\theta}$. On l'exprimera dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ représentée sur la figure 3.

- (b) Déterminer l'expression, dans la même base, de la quantité de mouvement du centre d'inertie du club.

III Dynamique du swing club bloqué

On considère désormais que les efforts sont suffisamment importants pour pouvoir **négliger le poids et les frottements de l'air**.

L'action du reste du corps sur les bras, au niveau de l'articulation en O , se réduit à une force inconnue appliquée en O et à un couple $\vec{\Gamma}_{O \rightarrow b} = \Gamma_{O \rightarrow b} \vec{e}_x$ que l'on considérera comme indépendant du temps.

- III.1. En considérant l'ensemble {bras et club}, établir une première équation différentielle d'évolution de l'angle θ faisant notamment intervenir $\Gamma_{O \rightarrow b}$.

III.2. Afin de déterminer plus complètement les efforts fournis par le golfeur, il faut s'intéresser à l'action des bras sur le club, au niveau de la liaison en A : on considérera que les actions des bras sur le club se réduisent à une force de résultante $\vec{F}_{b \rightarrow c}$ et à un couple $\vec{\Gamma}_{b \rightarrow c} = \Gamma_{b \rightarrow c} \vec{e}_x$.

- (a) Dédire de la question II.4b l'expression de la force $\vec{F}_{b \rightarrow c}$. On l'exprimera dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, en fonction entre autres de $\dot{\theta}$ et de $\dot{\theta}^2$.
- (b) Utiliser le théorème du moment cinétique pour établir l'expression de $\Gamma_{b \rightarrow c}$ en fonction entre autres de $\dot{\theta}$ et $F_{b \rightarrow c}$. En déduire qu'on a :

$$\Gamma_{b \rightarrow c} = A\ddot{\theta} - B\dot{\theta}^2, \quad (3)$$

avec A et B des constantes positives qu'on exprimera en fonction de J_{cA} , m_c , L_b et h_c .

III.3. (a) Résoudre l'équation III.1 pour $\Gamma_{O \rightarrow b}$ constant.

- (b) En déduire l'expression du couple $\Gamma_{b \rightarrow c}$ en fonction du temps et montrer qu'il existe un instant, noté t_0 , où $\Gamma_{b \rightarrow c}$ s'annule. Établir également l'expression de l'angle θ_0 correspondant et calculer la valeur de ce dernier. Commenter.

IV Dynamique du swing poignet libre

Pour $t > t_0$, et jusqu'à l'instant de l'impact avec la balle à $t = \tau$, un bon golfeur n'exerce quasiment plus aucun couple sur le club, c'est-à-dire qu'il « libère » ses poignets. On peut alors considérer que $\Gamma_{b \rightarrow c} = 0$ (la liaison bras – club au niveau de l'axe (Ax) devient un pivot parfait). Le couple $\Gamma_{O \rightarrow b}$ reste cependant non nul et toujours indépendant du temps.

On considère enfin qu'à l'instant $t = \tau$, quand le club frappe la balle, les bras et le club sont alignés, avec $\theta = \pi$.

IV.1. (a) Justifier brièvement que, de $t = 0$ à $t = \tau$ le travail des forces intérieures au système {bras et club} est nul.

- (b) Déterminer l'expression du travail du couple $\Gamma_{O \rightarrow b}$ entre $t = 0$ et $t = \tau$.

IV.2. On constate qu'au moment de l'impact la rotation du club autour du point A , caractérisée par la vitesse angulaire $\dot{\varphi}$ est beaucoup plus rapide que celle du bras autour de O : on peut donc considérer que le club constitue alors un solide en rotation autour de l'axe (Ax) , considéré désormais fixe, et que les bras sont alors immobiles.

On admet de plus que le théorème de l'énergie cinétique s'applique au système formé de l'ensemble {bras et club} en tenant compte des travaux des actions **intérieures et extérieures**.

- (a) En déduire la vitesse de rotation $\dot{\varphi}$ puis la vitesse du point B au moment où il frappe la balle si $\Gamma_{O \rightarrow b} = 1,00 \cdot 10^2 \text{ N} \cdot \text{m}$.
- (b) Quelle aurait-été cette vitesse si le club avait été dans le prolongement des bras (\vec{AB} colinéaire et de même sens que \vec{OA}) durant tout le mouvement de $\theta = 0$ à $\theta = \pi$? Commenter.
- (c) Vérifier brièvement s'il était légitime de négliger l'effet du poids.

Données : masse du clubⁱⁱ $m_c = 3,20 \cdot 10^{-1} \text{ kg}$; accélération de la pesanteur $g = 9,80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$; longueur du club $L_c = 1,10 \text{ m}$; distance du centre d'inertie du club au point A ; $h_c = 8,00 \cdot 10^1 \text{ cm}$; longueur des bras ; $L_b = 6,50 \cdot 10^{-1} \text{ m}$.

ii. données typiques pour un club de type « driver », utilisé pour frapper les coups les plus longs

Correction du problème 1

I Généralités

I.1. La force étant centrale, le moment cinétique en O fixe est conservé. Le mouvement est donc plan puisque la trajectoire est localement dans le plan orthogonal à $\vec{\sigma}_O$. Dans le plan de la trajectoire, en coordonnées polaires, on ira $\sigma_c = mr^2\dot{\theta}$.

I.2. (a) Pour $r = R = cste$, la conservation de $\vec{\sigma}_O$ assure $\dot{\theta} = cste \equiv \omega$: le mouvement est uniforme de vitesse $v = R\omega$. L'accélération radiale en coordonnées polaires est alors $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 - \frac{v^2}{R}$. Le point matériel n'étant soumis qu'à la force de gravitation $\vec{F} = -\frac{\mathcal{G}mm_a}{R^2}\vec{e}_r$, le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors : $-m\frac{v^2}{R} = -\frac{\mathcal{G}mm_a}{R^2}$. On en déduit :

- la vitesse $v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}m_a}{R}}$,
- les énergies cinétique $\mathcal{E}_{\text{cin}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{\mathcal{G}m_a m}{2R}$, potentielle $-\frac{\mathcal{G}m_a m}{R}$ et mécanique $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{\text{cin}} + \mathcal{E}_{\text{pot}} = -\frac{\mathcal{G}m_a m}{2R}$.

(b) Sur ce mouvement circulaire uniforme, on a :

$$T = \frac{2\pi R}{v} \rightarrow \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}m_T}$$

(c) On calcule :

$$v_T = \frac{2\pi r_T}{T} = 3,00 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(d) À l'infini, l'énergie potentielle est nulle, l'énergie mécanique est alors : $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{\text{cin}} + 0 \geq 0$. Comme le système est conservatif, l'énergie est conservée entre le départ de l'orbite terrestre et l'infini, on a donc : $\mathcal{E}_{\text{pot}}(R_T) + \frac{1}{2}mv^2 \geq 0$, soit $v = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}m_O}{R_T}} = \sqrt{2}v_T = 4,20 \cdot 10^4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Il s'agit de la deuxième vitesse de libération.

I.3. On exprime l'énergie mécanique au périastre et à l'apoastre : $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv_{pa}^2 - \frac{\mathcal{G}m_a m}{r_{pa}} = \frac{1}{2}mv_{aa}^2 - \frac{\mathcal{G}m_a m}{r_{aa}}$. Au périastre et à l'apoastre, la vitesse est orthogonale au rayon vecteur, le moment cinétique vérifie $\sigma_c = mr_{pa}v_{pa} = mr_{aa}v_{aa}$. On en déduit $v_{pa} = \frac{\sigma_c}{mr_{pa}}$ et $v_{aa} = \frac{\sigma_c}{mr_{aa}}$ soit :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m &= \frac{L_{O^2}}{2mr_{pa}^2} - \frac{\mathcal{G}m_a m}{r_{pa}} &= \frac{L_{O^2}}{2mr_{aa}^2} - \frac{\mathcal{G}m_a m}{r_{aa}} \\ 0 &= r_{pa}^2 \mathcal{E}_m + \mathcal{G}mm_a r_{pa} - \frac{\sigma_c^2}{2m} &= r_{aa}^2 \mathcal{E}_m + \mathcal{G}mm_a r_{aa} - \frac{\sigma_c^2}{2m} \end{aligned}$$

Les longueurs r_{pa} et r_{aa} sont donc les deux racines du trinôme : $\mathcal{E}_m X^2 + \mathcal{G}mm_a X - \frac{\sigma_c^2}{2m}$ et vérifient donc : $r_{pa} + r_{aa} = -\frac{\mathcal{G}mm_a}{\mathcal{E}_m}$, soit : $\mathcal{E}_m = -\frac{\mathcal{G}mm_a}{r_{pa} + r_{aa}}$. Pour un mouvement circulaire de rayon R , on a $r_{pa} + r_{aa} = 2R$, on retrouve bien l'expression précédente.

II Trajectoires

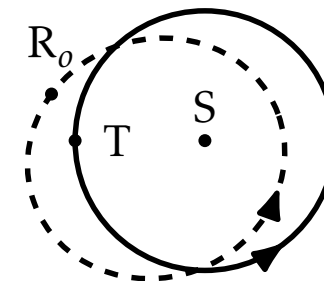
II.1. (a) On écrit la conservation de l'énergie mécanique entre la surface terrestre et l'infini où la sonde sera immobile.

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{\mathcal{G}m_T m}{R_T} = 0 \rightarrow v_1 = \sqrt{2\mathcal{G}m_T/R_T} = 1,12 \cdot 10^4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

(b) De même :

$$\frac{v_\infty^2}{2} = \frac{4v_1^2}{2} - \frac{\mathcal{G}m_T}{R_T} = 2v_1^2 - \frac{v_1^2}{2} \rightarrow v_\infty = \sqrt{3}v_1 = 1,90 \cdot 10^4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

(c) Quand la sonde a été lancée à v_l dans le référentiel géocentrique elle échappe à l'attraction et parvient loin de la Terre avec une vitesse nulle par rapport à celle-ci, donc une vitesse de v_T par rapport à \mathcal{R}_S . Comme la sonde a été lancée dans le sens du mouvement de la Terre, elle se trouve dans le même état de mouvement de la Terre ; elle parcourt donc une orbite circulaire de rayon r_T . Rappelons en effet que les mouvements orbitaux sont indépendants de la masse de l'objet en orbite.



(d) Comme le vecteur initial n'est plus orthoradial, la trajectoire ne peut plus être circulaire et la position initiale n'est plus le périhélie. En revanche, l'énergie mécanique a toujours la même valeur puisqu'on a la même énergie cinétique au même point : le grand axe a donc toujours la même longueur comme on l'illustre sur la figure ci-contre.

II.2. (a) Pour la trajectoire de Tchouri, on lit graphiquement que le périhélie est à 1,20 ua et l'aphélie à 5,70 ua, soit un demi-grand axe de $a_{Tc} = 3,50$ ua. La troisième loi de Képler, par comparaison avec l'orbite terrestre autour du Soleil, donne :

$$T_{Tc} = T_T \left(\frac{a_{Tc}}{r_T} \right)^{3/2} = 6,50 \text{ ans.}$$

On calcule ensuite les vitesses au périhélie et à l'aphélie grâce à la conservation de l'énergie :

$$\frac{v_{Tc}^2}{2} - \frac{\mathcal{G}m_S}{r_{Tc}} = -\frac{\mathcal{G}m_S}{r_{Tc} + r_{Tca}} \rightarrow v_{Tc}^2 = \frac{8\pi^2 r_T^3}{T_T^2} \left(\frac{1}{r_{Tc}} - \frac{1}{r_{Tc} + r_{Tca}} \right) = 3,50 \cdot 10^4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

De même :

$$v_{Tca}^2 = \frac{8\pi^2 r_T^3}{T_T^2} \left(\frac{1}{r_{Tca}} - \frac{1}{r_{Tc} + r_{Tca}} \right) = 7,40 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

(b) On lit le périhélie de Rosetta : $r_{Rp} = 1,00$ ua et son aphélie $r_{Ra} = 5,00$ ua. Comme précédemment :

$$v_{Rcp}^2 = \frac{8\pi^2 r_T^3}{T_T^2} \left(\frac{1}{r_{Rcp}} - \frac{1}{r_{Rcp} + r_{Rca}} \right) = 3,80 \cdot 10^4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

- (c) Le grand-axe de Tchouri est supérieur, la 3^e loi de Képler assure que sa période le sera également. Tchouri doit donc être « en avance » par rapport à Rosetta pour qu'elles se croisent en I . C'est le cas sur le schéma de l'énoncéⁱⁱⁱ.

III Assistance gravitationnelle

III.1. On travaille dans cette question dans le référentiel \mathcal{R}_T , considéré galiléen pour la durée de l'étude.

- (a) À grande distance de la Terre, on peut négliger l'attraction de celle-ci : le mouvement est donc rectiligne uniforme qu'elle soit en phase d'approche ou d'éloignement.
- (b) La conservation de l'énergie mécanique entre l'approche et l'éloignement assure que $v_{DT} = v_{0T}$.
- (c) On aura $D = 0$ si elle arrive tellement vite ($v_{0T} \rightarrow \infty$) ou passe tellement loin ($b \rightarrow \infty$) que l'influence de la Terre est négligeable. En revanche elle fera demi-tour, avec $D = \pi$ quand elle passe trop près ($b \rightarrow 0$) ou arrive trop lentement $v_{0T} \rightarrow 0$.
- (d) $\mathcal{G}m_T/b$ a la dimension d'une énergie massique, tout comme v_{0T}^2 . On peut donc former le nombre sans dimension $\beta = bv_{0T}^2/(\mathcal{G}m_T)$. On peut proposer :

$$\cos(D) = \frac{\beta + 1}{\beta - 1},$$

qui assure bien $\cos(D) = 1$ quand $\beta \gg 1$ et $\cos(D) = -1$ quand $\beta \ll 1$. Notons qu'on aurait tout aussi bien pu utiliser $4bv_{0T}^2/(\mathcal{G}m_T)$.

III.2. (a) Par composition des vitesses, on a : $\vec{v}_{0T} = \vec{v}_0 - \vec{V}$. On en déduit la construction ci-contre.

(b) On construit \vec{v}_{1T} comme représenté ci-contre. On en déduit la construction de $\vec{v}_1 = \vec{V} + \vec{v}_{1T}$. Dans ce cas particulier, on a $|\vec{v}_1| > |\vec{v}_0|$, la sonde a bien été accélérée dans \mathcal{R}_S .

(c) La norme $|\vec{v}_1|$ sera maximale quand \vec{v}_1 est colinéaire et de même sens que \vec{V} , comme représenté ci-contre. On a alors $v_{1\max} = V + v_{0T}$. On détermine alors la norme v_{0T} dans le triangle CM_0M_T à l'aide du théorème d'Al-Kashi : $v_{0a}^2 = v_0^2 + V^2 - 2v_0V \cos \alpha$ et on en déduit :

$$v_{1\max} = V + \sqrt{V^2 + v_0^2 - 2v_0V \cos \alpha}. \quad (4)$$

III.3. (a) Pour $v = 0$, on a immédiatement $v_{1\max} = 2V$.

(b) On calcule :

$$v_{1\max} = V \left(1 + \sqrt{2(1 - \cos \alpha)} \right) \rightarrow \frac{v_{1\max} - V}{V} = \sqrt{2(1 - \cos \alpha)} \simeq \sqrt{2} \sqrt{\frac{\alpha^2}{2}} = |\alpha|.$$

iii. On peut observer ces orbites sur http://www.esa.int/esaft/Videos/2013/12/Rosetta_s_Journey_B-Roll/Solar_system_animation_showing_Rosetta_trajectory.

III.4. On est dans les conditions du I.2d. Rosetta est à peine libérée de la Terre, elle a donc à l'issue de sa libération une vitesse de norme v_T dans \mathcal{R}_S . Elle a donc la même énergie que la Terre dans \mathcal{R}_S et recroise donc cette dernière au même point au bout d'un an et leurs vecteurs vitesse ont alors la même norme v_1 . On est alors dans les conditions du I.2d et $\frac{v_1 - V}{V} = \alpha$. La mesure donne :

$$\alpha = \frac{v_{1\max} - v_T}{v_T} = \frac{3,80}{3,00 \cdot 10^1} = 1,30 \cdot 10^{-1} \text{ rad} = 7,30^\circ.$$

Correction du problème 2

I Caractéristiques du club

I.1. Le poids du club s'exerce en son centre d'inertie. S'il est posé sur le doigt, son moment par rapport à un axe passant par le doigt est nul et il demeure à l'équilibre.

I.2. (a) On applique le théorème du moment cinétique pour un solide en rotation autour de l'axe Ax fixe.

- le moment des actions exercées en A est nul puisqu'on néglige les frottements,
- le bras de levier du poids est immédiatement $-h_c \sin(\varphi)$.

On a donc :

$$J_{cA} \ddot{\varphi} + m_c g h_c \sin(\varphi) = 0 \rightarrow \ddot{\varphi} + \omega^2 \sin(\varphi) = 0 \quad \text{avec : } \omega = \sqrt{\frac{m_c g h_c}{J_{cA}}}. \quad (5)$$

(b) Les petites oscillations ($\varphi \ll 1$) ont pour période :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J_{cA}}{m_c g h_c}} \rightarrow J_{cA} = \frac{T_0^2 m_c g h_c}{4\pi^2} = 3,36 \cdot 10^{-1} \text{ kg} \cdot \text{m}^2. \quad (6)$$

(c) Pour une rotation autour d'un axe passant par A il y a davantage de masse loin de l'axe de rotation que pour un axe passant par G , le moment d'inertie doit donc être supérieur. On calcule :

$$J_{cG} = J_{cA} + m_c h_c^2 = 5,41 \cdot 10^{-1} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (7)$$

II Cinématique du swing club bloqué

II.1. Les bras constituent un solide en rotation en de l'axe Ox fixe, on a donc :

$$\sigma_b = J_{bO} \dot{\theta}. \quad (8)$$

II.2. (a) Le centre d'inertie des bras est à la distance $L_b^2 + h_c^2$ du point O . La formule (2) donne alors :

$$J_{cO} = J_{cG} + m_c (L_b^2 + h_c^2) = 6,76 \cdot 10^{-1} \text{ kg} \cdot \text{m}^2. \quad (9)$$

(b) On a de nouveau un solide en rotation autour d'un axe fixe :

$$\sigma_c = J_{cO} \dot{\theta}. \quad (10)$$

II.3. Le moment cinétique de l'ensemble est alors :

$$\sigma = \sigma_c + \sigma_b = (J_{cO} + J_{bO}) \dot{\theta}, \rightarrow \mathcal{E}_c = \frac{1}{2} (J_{cO} + J_{bO}) \dot{\theta}^2, \quad (11)$$

d'après la relation liant moment cinétique et énergie cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe.

II.4. (a) Le centre d'inertie des bras est à la distance $L_b/2$ de l'axe Ox puisqu'ils sont homogènes. Il décrit donc un cercle de rayon $L_b/2$ et de centre O . Sa quantité de mouvement est donc :

$$\vec{p}_b = \frac{m_b L_b \dot{\theta}}{2} \vec{e}_\theta. \quad (12)$$

(b) Le centre d'inertie des bras décrit lui-aussi un mouvement circulaire uniforme à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$, de rayon OG_c . Le plus simple pour déterminer le vecteur dirigeant sa vitesse est d'utiliser $\dot{\theta} \vec{e}_x \wedge \vec{OG}_c$:

$$\vec{p}_c = m_c \dot{\theta} \vec{e}_x \wedge L_b \vec{e}_r - h_c \vec{e}_\theta = m_c \dot{\theta} (L_b \vec{e}_\theta + h_c \vec{e}_r). \quad (13)$$

III Dynamique du swing club bloqué

III.1. On applique le théorème du moment cinétique à l'ensemble, qui constitue un solide en rotation. Il ne reste que le moment exercé par le golfeur puisqu'on néglige le poids.

$$(J_{bO} + J_{cO}) \ddot{\theta} = \Gamma_{O \rightarrow b}. \quad (14)$$

III.2. (a) La loi de la quantité de mouvement pour le club, s'écrit, en utilisant l'expression (12) :

$$\vec{F}_{b \rightarrow c} = m_c \dot{\vec{p}}_c = m_c \frac{d\dot{\theta} (L_b \vec{e}_\theta + h_c \vec{e}_r)}{dt} = m_c \left[\ddot{\theta} (L_b \vec{e}_\theta + h_c \vec{e}_r) + \dot{\theta}^2 (-L_b \vec{e}_r + h_c \vec{e}_\theta) \right] \quad (15)$$

(b) On applique le théorème du moment cinétique au club seul, soumis à la force $\vec{F}_{b \rightarrow c}$ appliquée en A et au couple $\Gamma_{b \rightarrow c}$. On obtient :

$$\begin{aligned} J_{cO} \ddot{\theta} &= \Gamma_{b \rightarrow c} + \vec{e}_x \cdot (\vec{OA} \wedge \vec{F}_{b \rightarrow c}) \\ \Gamma_{b \rightarrow c} &= J_{cO} \ddot{\theta} - m_c \vec{e}_x \cdot \left(L_b \vec{e}_r \wedge \left[\dot{\theta} (L_b \vec{e}_\theta + h_c \vec{e}_r) + \dot{\theta}^2 (-L_b \vec{e}_r + h_c \vec{e}_\theta) \right] \right) \\ \Gamma_{b \rightarrow c} &= J_{cO} \ddot{\theta} - m_c L_b \left(h_c \dot{\theta}^2 + L_b \ddot{\theta} \right) = (J_{cO} - m_c L_b^2) \ddot{\theta} - m_c L_b h_c \dot{\theta}^2 \end{aligned} \quad (16)$$

III.3. (a) Si $\Gamma_{O \rightarrow b}$ est constant, l'équation (14) donne immédiatement, avec $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$:

$$\theta = \frac{\Gamma_{O \rightarrow b} t^2}{2(J_{bO} + J_{cA} + m_c L_b^2)}. \quad (17)$$

(b) On calcule alors :

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{\Gamma_{O \rightarrow b}}{J_{bO} + J_{cA} + m_c L_b^2} & \dot{\theta}^2 &= \frac{\Gamma_{O \rightarrow b}^2}{(J_{bO} + J_{cA} + m_c L_b^2)^2} \\ \rightarrow \Gamma_{b \rightarrow c} &= \frac{J_{cA} \Gamma_{O \rightarrow b}}{J_{bO} + J_{cA} + m_c L_b^2} - \frac{m_c L_b h_c \Gamma_{O \rightarrow b}^2 t^2}{(J_{bO} + J_{cA} + m_c L_b^2)^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Cette expression s'annule pour :

$$t_0 = \sqrt{\frac{J_{cA} (J_{bO} + J_{cA} + m_c L_b^2)}{\Gamma_{O \rightarrow b} m_c L_b h_c}} \quad \text{où: } \theta(t_0) = \frac{J_{cA}}{2 m_c L_b h_c} = 2,00 \text{ rad} = 1,16 \cdot 10^2 \text{°}. \quad (19)$$

C'est donc pratiquement la moitié du mouvement qui doit être effectuée avec le poignet « libre ».

IV Dynamique du swing poignet libre

IV.1. (a) • Tant que le club est bloqué, il n'y a pas de mouvement relatif du club et du bras, les actions du bras sur le club ne travaillent donc pas,
• par la suite, le mouvement relatif mais les actions sont nulles, le travail est de nouveau nul.

(b) Le couple $\Gamma_{O \rightarrow b}$ étant constant, son travail de $\theta = 0$ à $\gamma = \pi$ est donc :

$$W(\Gamma_{O \rightarrow b}) = \Gamma_{O \rightarrow b} \pi. \quad (20)$$

IV.2. (a) Au moment de l'impact, on peut considérer que toute l'énergie cinétique est contenue dans le mouvement de rotation du club autour de A : elle a donc pour expression $1/2 J_{cA} \dot{\varphi}^2$. Comme les forces intérieures n'ont pas travaillé, le théorème de l'énergie cinétique assure :

$$W(\Gamma_{O \rightarrow b}) = \frac{J_{cA} \dot{\varphi}^2}{2} \rightarrow \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{2\pi \Gamma_{O \rightarrow b}}{J_{cA}}}. \quad (21)$$

Comme il s'agit d'un solide en rotation autour de A , on calcule :

$$\vec{v}_B = L_c \dot{\theta} \vec{e}_\theta = L_c \sqrt{\frac{2\pi \Gamma_{O \rightarrow b}}{J_{cA}}} \vec{e}_\theta. \rightarrow v_B = 4,60 \cdot 10^1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (22)$$

(b) Avec le même couple, l'énergie aurait été communiquée au solide formé des bras et du club alignés, de moment d'inertie :

$$J_{\max} = J_{b0} + J_{cA} + m_c (L_b + h_c)^2. \quad (23)$$

L'équation (21) devient donc :

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{2\pi \Gamma_{O \rightarrow b}}{J_{b0} + J_{cA} + m_c (L_b + h_c)^2}}, \quad (24)$$

qui aurait été significativement inférieure.

- (c) On peut estimer grossièrement le travail du poids en considérant que la masse (essentiellement celle des bras, de l'ordre de $1,00 \cdot 10^1$ kg) voit son centre d'inertie descendre de $6,50 \cdot 10^1$ cm. On a donc :

$$W(\vec{P}) \simeq 1,00 \cdot 10^1 \text{ kg} \times g \times 6,50 \cdot 10^1 \text{ cm} \simeq 7,00 \cdot 10^1 \text{ J}. \quad (25)$$

On doit comparer ce travail à celui du couple $\Gamma_{O \rightarrow b}$, égal à $W(\Gamma_{O \rightarrow b}) = \Gamma_{O \rightarrow b} \pi = 3,14 \cdot 10^2 \text{ J}$. L'approximation est donc raisonnable mais on ne peut pas dire que le travail du poids soit rigoureusement négligeable.