Réseaux linéaires en régime sinusoïdal établi

Circuit linéaire stable

Définition : Circuit linéaire stable
Un circuit linéaire est dit *stable* en régime sinusoïdal établi (ou permanent) si :

- toutes les tensions $u_n(t)$ et intensités $i_n(t)$ du régime transitoire tendent vers 0,
- toutes les tensions $u_n(t)$ et intensités $i_n(t)$ du régime sinusoïdal établi sont bornées.

Impédance

Impédance
Un dipôle linéaire passif est caractérisé en régime sinusoïdal établi dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires, par une ***impédance*** $\underline{Z} = Ze^{j\varphi_Z}$, $(Z > 0\,, \varphi \in \mathbb{R})$ complexe, telle que, en convention récepteur, à chaque instant :

$$\frac{\underline{U}(t)}{\underline{I}(t)} = \frac{\underline{U_m}}{\underline{I_m}} = \underline{Z}$$

On a donc :

$$Z = |\underline{Z}| = \frac{U_m}{I_m} \quad \text{et: } \varphi_{\underline{Z}} = \varphi_U - \varphi_I\,.$$

En régime sinusoïdal établi :

réel	$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$	$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$
complexe	$\underline{U}(t) = \underline{U_m} e^{j\omega t}$	$\underline{I}(t) = \underline{I_m} e^{j\omega t}$

Équation caractéristique pour un dipôle passif linéaire :

$$\sum_n \alpha_n \frac{\mathrm{d}^n u}{\mathrm{d}t^n} + \sum_n \beta_n \frac{\mathrm{d}^n i}{\mathrm{d}t^n} = 0 \rightarrow \sum_n (j\omega)^n \alpha_n \underline{U}_m e^{j\omega t} = -\sum_n (j\omega)^n \beta_n \underline{I}_m e^{j\omega t}$$

Il existe $\underline{Z}$ tel que :

$$\frac{\underline{U}(t)}{\underline{I}(t)} = \frac{\underline{U_m}}{\underline{I_m}} = \underline{Z} = Ze^{j\varphi_Z}$$

Résistance et réactance

Définition : Résistance et réactance
On nomme respectivement ***résistance*** et ***réactance*** les parties réelle et imaginaire de $\underline{Z}$.

$$\underline{Z} = R + jS \quad \begin{cases} R\text{: résistance} & = \mathrm{Re}\,(\underline{Z}) \\ S\text{: réactance} & = \mathrm{Im}\,(\underline{Z}) \end{cases}$$

On définit également l'admittance :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = G + jB \quad \begin{cases} G\text{: conductance} & = \mathrm{Re}\,(\underline{Y}) \\ B\text{: susceptance} & = \mathrm{Im}\,(\underline{Y}) \end{cases}$$

La représentation dans le plan complexe de $\underline{Z}$ est nommée ***représentation de Fresnel***[a] de $\underline{Z}$.

a. A. J. Fresnel (1788-1827) physicien français

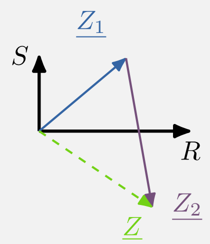
Lois de Kirchhoff
En régime sinusoïdal établi dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires, les lois de Kirchhoff s'écrivent :

$$\sum_p \varepsilon_p \underline{U_{pm}} = 0 \text{ sur une maille orientée et: } \sum_p \varepsilon_p \underline{I_{pm}} = 0 \text{ à un nœud.}$$

On en déduit :

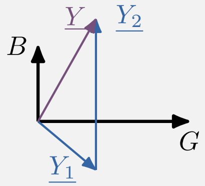
Impédance d'une association série de dipôles

$$\underline{Z} = \sum_p \underline{Z_p}$$



Admittance d'une association parallèle de dipôles

$$\underline{Y} = \sum_p \underline{Y_p}$$



Les relations des ponts

diviseur de tension $\underline{U_{nm}} = \dfrac{\underline{Z_n}}{\sum_p \underline{Z_p}} \underline{U_{0m}}$,

diviseur de courant $\underline{I_{nm}} = \dfrac{\underline{Y_n}}{\sum_p \underline{Y_p}} \underline{I_{0m}}$,

Exercice : circuit RLC série

1. Déterminer l'impédance d'un dipôle RLC série en régime sinusoïdal établi en fonction de $R\,, L\,, C$ et ω. Établir sa représentation de Fresnel pour $\omega \geqslant 1/\sqrt{LC}$ et $\omega \leqslant 1/\sqrt{LC}$.
2. En déduire l'amplitude complexe du courant $\underline{I_m}$ le traversant, en fonction de la tension $\underline{U_m}$ à ses bornes (en convention récepteur). Retrouver la résonance en courant du dipôle. Illustrer par une construction de Fresnel.
3. Exprimer la tension aux bornes du condensateur en fonction de $\underline{U_m}$ à l'aide d'un diviseur de tension.

Superposition

Théorème : de superposition

Dans un circuit linéaire, alimenté par plusieurs sources sinusoïdales indépendantes, la ***valeur complexe*** $\underline{X}(t)$ d'une grandeur $X(t)$ (courant ou tension) est égale à la somme des ***valeurs complexes*** produites par chacune des différentes sources agissant séparément, toutes les autres sources étant éteintes.

Norton et Thévenin

Représentations de Norton et Thévenin

Un dipôle linéaire actif peut être en régime sinusoïdal établi, représenté en convention générateur par :

Thévenin	$\underline{U_m} = \underline{E_m} - \underline{Z}\underline{I_m}$
Norton	$\underline{I_m} = \underline{\eta_m} - \underline{Y}\underline{U_m}$

, avec $\underline{\eta_m} = \underline{E_m}/\underline{Z}$.

Puissance active et facteur de puissance

Soit, en notation complexe, un dipôle d'impédance $\underline{Z} = Ze^{j\varphi_Z} = R + jS$ (resp. d'admittance $\underline{Y} = G + jB$) parcouru par un courant d'intensité $\underline{I}(t) = \underline{I_m}e^{j\omega t}$ et soumis à une tension $\underline{U}(t) = \underline{U_m}e^{j\omega t}$ (en convention récepteur).

La puissance moyenne qu'il reçoit, en régime sinusoïdal établi, nommée ***puissance active***, s'exprime selon :

$$\begin{aligned} <\mathcal{P}>_T &= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u(t)i(t)\mathrm{d}t = \frac{U_m I_m \cos\varphi_Z}{2} \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\underline{U}(t)\overline{\underline{I}(t)}\right) = \frac{1}{2}RI_m^2 = \frac{1}{2}GU_m^2. \end{aligned}$$

On nomme ***facteur de puissance*** du dipôle la quantité $\cos\varphi_Z$.

Valeurs efficaces

Définition : Valeur efficace

Pour une fonction $h(t)$ périodique de période T, on définit la valeur efficace h_{eff} de h par :

$$h_{\text{eff}} = \sqrt{<h(t)^2>_T} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} h^2(t)\mathrm{d}t}.$$

Puissance moyenne

Pour une fonction sinusoïdale, $h(t) = H_m \cos(\omega t + \varphi)$, on a :

$$h_{\text{eff}} = \frac{H_m}{\sqrt{2}}.$$

En particulier la puissance moyenne reçue, en régime sinusoïdal établi, par un dipôle de résistance R (de conductance G) s'exprime selon :

$$< \mathcal{P} >_T = R I_{\text{eff}}^2 = G U_{\text{eff}}^2.$$

Indispensable

- impédances des dipôles linéaires de base
- expressions de la puissance : ☠ $< \mathcal{P} > \neq U_m I_m$ si la réactance n'est pas nulle.
- réviser les théorèmes en régime établi stationnaire
- constructions de Fresnel