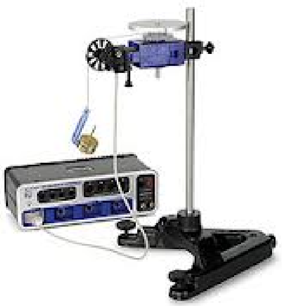
Objectifs :
- Mesurer le moment d'inertie d'un solide en rotation et étudier sa variation quand on déplace les masses qui le constituent.
- Comparer les oscillations d'un pendule pesant au modèle du pendule simple.

Matériel :
- *poulies avec capteur de rotation, masses marquées, fils, tige métallique*
- *balance*
- *logiciels `DataStudio`, `Qtiplot`*

I Rotation dans un plan horizontal : expérience de l'« hélicoptère »

Un fil est enroulé autour d'un capteur de rotation de rayon a et d'axe vertical. Il passe ensuite autour d'une autre poulie d'axe horizontal pour finir vertical. On fixe une masse m_0 à son extrémité libre. Une tige homogène est fixée rigidement au capteur de rotation par son centre de masse G. La chute de la masse m_0 entraîne la rotation de l'ensemble de la tige et du capteur. Le moment d'inertie de la tige peut être modifié en lui ajoutant deux masses m symétriquement de G. On note r la distance de leurs centres d'inertie à G.



Le logiciel `DataStudio` permet d'enregistrer l'évolution au cours du temps de la position angulaire θ et de la vitesse $\omega = \dot{\theta}$ de l'ensemble.

I.1 Modèle

On note J_{tige} le moment d'inertie par rapport à l'axe Gz vertical de l'ensemble de la tige. On néglige tout frottement et on considère le fil idéal.

Questions :
- ✍*À quelle condition portant sur la géométrie du dispositif peut-on écrire que le moment d'inertie du solide formé de la tige et des deux masses m par rapport à l'axe de rotation du capteur est $J = J_{tige} + 2mr^2$. On supposera cette condition réalisée par la suite.*
- ✍*Appliquer la loi du moment cinétique au solide formé de la tige et des deux masses m et celle de la quantité de mouvement à la masse m_0 pour montrer que la vitesse angulaire ω varie selon :*

$$\left(J + m_0 a^2\right) \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = m_0 g a.$$

Le mouvement est alors uniformément accéléré.

I.2 Mouvement uniformément accéléré

On n'ajoute pas les deux masses m pour commencer.

Manipulations :
- *Observer l'évolution de ω quand le dispositif est entraîné par la chute de la masse m_0. Dans quel domaine les frottements sont-ils négligeables ?*
- *Enregistrer le mouvement pour différentes valeurs de m_0 pour lesquelles les frottements peuvent être négligés pendant une bonne partie du mouvement.*

Exploitation :
- *Déterminer les accélérations angulaires $\dot{\omega}$ pour chacun des enregistrements.*
- *Vérifier que les valeurs obtenues sont bien compatibles avec $J_{tige} = m_{tige} l^2/12$ pour une tige de longueur $l = 38\,\text{cm}$ et de masse $m = 28\,\text{g}$.*

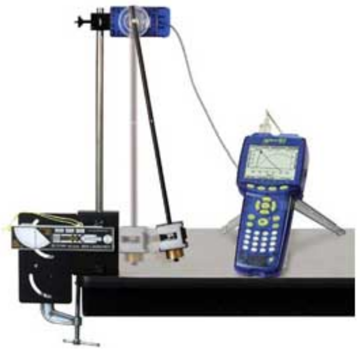
I.3 Modifications de J

Manipulations :
Reprendre les mesures précédentes en ajoutant les deux masses $m = 75\,\text{g}$ pour différentes valeurs de la distance r à laquelle leurs centres d'inertie sont placés de part et d'autre de G.

Exploitation :
- *Calculer la valeur de $\dot{\omega}$ pour chacune des valeurs de r.*
- *Vérifier par un ajustement numérique sa variation avec r.*

II Oscillations du pendule pesant

L'axe du capteur est maintenant vertical. On y fixe la tige par une extrémité. On peut fixer une masse m à une distance variable de l'axe de rotation. On note r la distance de son centre d'inertie à l'axe. On réalise ainsi un pendule pesant.



II.1 Modèle

On désigne par J le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation du capteur de l'ensemble de la tige et de la masse m.

Questions :

- ✍*Justifier, en utilisant l'expression de J_{tige} de la configuration précédente, que le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe de rotation du capteur est maintenant $J_{tige} = m_{tige}l^2/3$.*

- ✍*À quelle condition portant sur la géométrie du dispositif peut-on écrire que $J = J_{tige} + mr^2$. Quel sera alors le moment du poids de la masse m par rapport à l'axe ? On supposera cette condition réalisée par la suite.*

- ✍*En déduire que l'évolution de l'angle de rotation θ est régie par l'équation différentielle :*

$$\left(\frac{m_{tige}l^2}{3} + mr^2\right)\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\left(\frac{m_{tige}l}{2} + mr\right) g\sin(\theta),$$

  puis que la période des oscillations de faible amplitude est :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_{tige}l^2/3 + mr^2}{g\left(m_{tige}l/2 + mr\right)}}. \tag{1}$$

Manipulations :

- *Enregistrer l'évolution temporelle de θ lors d'oscillations de faible amplitude. Comment s'assurer qu'on est bien dans le cadre des faibles amplitudes.*

- *Réaliser plusieurs enregistrements pour différentes valeurs de r.*

Exploitation :

- *Mesurer la période T pour chaque valeur de r.*

- *Tracer T en fonction de r dans `Qtiplot`. Vérifier l'accord avec l'expression 1 par un ajustement numérique.*