

Objectifs :

Réaliser l'acquisition analogique des oscillations libres d'un pendule. On utilisera un capteur analogique d'angle et on mettra en place la dérivation analogique de son signal.

Matériel :

- un pendule mécanique formé d'une tige, lestée par une masse amovible, pouvant tourner autour d'un axe
- une ficelle enroulée autour de l'axe de rotation, tendue par un ressort pour accuser le frottement solide sur l'axe
- des plaques en plastique pouvant être fixées sur la tige pour augmenter les frottements avec l'air
- une carte d'acquisition permettant l'interfaçage avec le logiciel *Lat isPro*, logiciel *Qt ip lot*
- une balance
- des systèmes électroniques fonctionnels (« boîtes noires ») réalisant les fonctions suiveur, sommateur, amplificateur
- générateur basse fréquence, oscilloscope, résistances et condensateurs, multimètre.

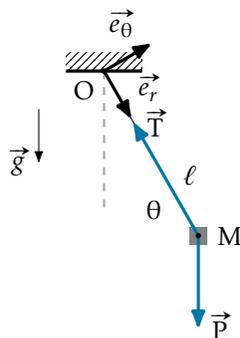
I Rappels

On n'oubliera pas d'imprimer les courbes quand l'enregistrement aura donné satisfaction.

On étudie un pendule pesant formé d'une tige de masse fixée à l'axe de rotation d'un potentiomètre à 1 tour et d'une masse m dont le centre d'inertie est placé à la distance r de l'axe. On note J_{tige} le moment d'inertie de la tige par rapport à ce même axe^a.

Le système constitue un pendule pesant. On note θ l'angle orienté (\vec{g}, \vec{OM}) .

a. Le moment d'inertie sera défini dans le cours sur le moment cinétique.

**Questions :**

- À quelles conditions portant sur la masse de la tige m_t , la masse m , la distance r et la taille caractéristique a de la masse m peut-on considérer que le dispositif constitue un pendule simple ?

- Quand ces conditions sont vérifiées, montrer que l'angle θ vérifie l'équation différentielle non linéaire :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \theta = 0,$$

avec ω_0 une constante qu'on exprimera en fonction de r et m .

Dans le cas le plus général, on verra qu'on a :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad \text{avec:} \quad \omega_0^2 = g \frac{m_{\text{tige}}d + mr}{J_{\text{tige}} + mr^2}, \quad (1)$$

en notant d la distance du centre d'inertie de la tige à l'axe.

- Pour une faible extension angulaire θ_{max} , on obtient la solution approchée $\theta = \theta_{\text{max}} \cos(\omega_0 t + \varphi)$, soit une période $T_0 = 2\pi/\omega_0$.
- Pour des extensions angulaires plus importantes, on peut obtenir un développement de la période à l'ordre 3 en $\theta_{\text{max}} \ll 1$: $T = T_0 \left(1 + \frac{\theta_{\text{max}}^2}{16} + o(\theta^4)\right)$ (formule de Borda, voir l'exercice « Oscillations anharmoniques d'un pendule simple » du TD sur les lois de Newton).

II Acquisition des données

L'axe de révolution du pendule est relié à un capteur de déplacement angulaire (un potentiomètre monté dans un pont diviseur de tension) délivrant une tension U variant linéairement avec l'angle θ . On utilise *Lat isPro* pour enregistrer l'évolution de θ .

On veillera à enregistrer suffisamment de points par période pour pouvoir identifier une sinusoïde.

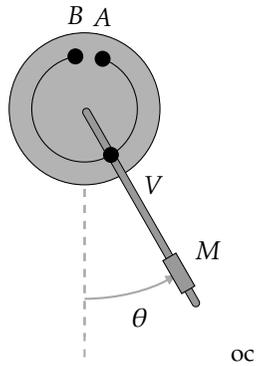
On utilisera l'alimentation 15 V, -15 V, plus stable que celle de la carte *Sysam*. On reliera alors la borne médiane (correspondant à 0 V) à la masse du circuit (oscilloscope, carte *Sysam*).

II.1 Capteur angulaire

Le capteur angulaire est un potentiomètre à un tour alimenté par des sources idéales de tension -12 V ; 12 V intégrées à la carte d'acquisition (on pourra éventuellement utiliser une alimentation indépendante -15 V ; 15 V, fournissant une tension plus stable).

Questions :

- Montrer que le montage électrique ci-dessus (nommé pont de Wheatstone) permet d'obtenir une tension u proportionnelle à l'angle θ .



(a) Capteur angulaire utilisant un potentiomètre à un tour. La résistance entre M et A (resp. (M) et B) est proportionnelle à l'angle $\pi - \theta$ (resp. $(\pi + \theta)$).

Manipulations :

- Observer les valeurs de la tension u quand on fait tourner le pendule axe. Vérifier l'accord avec le modèle proposé.
- Réaliser l'enregistrement de quelques oscillations du pendule.
- ☉ Proposer un montage utilisant une boîte noire pour ramener les valeurs extrémales de la tension u entre -10 V et 10 V , valeurs maximales admises par la carte d'acquisition. On pourra choisir d'avoir $u = 4,5\text{ V}$ pour $\theta = 90^\circ$ pour faciliter l'interprétation.

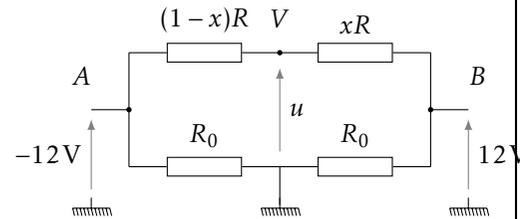
On pourra être amené à faire tourner le capteur **avant d'y fixer la tige** pour que la valeur $u = 0$ corresponde à la position d'équilibre stable du pendule.

II.2 Dérivation analogique

Questions :

☚ Proposer un montage réalisant un filtre pseudo-dérivateur utilisant un résistor de résistance R et un condensateur de capacité C .

- Rappeler l'expression de sa fréquence de coupure f_c et de son gain en fonction de R et C .
- Quelle inégalité doit vérifier le produit RC pour qu'un signal sinusoïdal de fréquence f_0 soit dérivé. Quelle sera alors le gain du filtre ?
- En déduire un couple de paramètres R et C permettant de dériver le signal du pendule dont la fréquence d'oscillations sera de l'ordre de 1 Hz .



(b) Montage électrique dans lequel est inséré le potentiomètre AMB . La tension u est proportionnelle à l'angle θ .

Manipulations :

- Utiliser les dipôles et boîtes noires à disposition pour produire une tension v qui représente fidèlement la dérivée analogique de u .
- ☉ Vérifier rapidement à l'oscilloscope le fonctionnement du montage obtenu sur des signaux produits par le **GBF**, pour des fréquences du même ordre que celles du pendule.
- Qu'observe-t-on pour des fréquences très supérieures à celles du pendule ?

III Étude qualitative des frottements

Pour cette étude, on se place à $r = 25\text{ cm}$ et on réalisera des oscillations de grande amplitude.

Manipulations :

On réalisera :

un frottement fluide à l'aide d'une plaque en plastique fixée sur la tige (sur son extrémité la plus proche de l'axe)

un frottement solide en fixant un fil plus ou moins tendu (à l'aide du ressort) frottant sur l'axe du pendule.

Enregistrer environ une cinquantaine de pseudo périodes

- pour le frottement fluide,
- pour le frottement solide,
- et en l'absence de dispositif de frottement supplémentaire.

On enregistra simultanément la tension représentant l'angle et celle représentant la vitesse sur deux entrées analogiques différentes de la carte d'acquisition.

Exploitation :

- Caractériser les courbes $\theta(t)$ (pseudopériode T , amortissement exponentiel ou linéaire, durée caractéristique de l'amortissement τ).
- Représenter les trajectoires dans l'espace des phases ie l'ensemble des courbes $(\theta, \dot{\theta})$. On y distinguera les conditions initiales, le sens de parcours, le point attracteur.

Questions :

- Comment détermine-t-on l'énergie mécanique du pendule assimilé à un point matériel ? En déduire une lecture graphique de la perte d'énergie par pseudo-période.
- Retrouver les formes d'amortissement caractéristiques de frottements fluides et solides.

- *Quels types de frottement prédominent en l'absence de dispositif de frottement supplémentaire ?*

Manipulations :

☹ Réaliser le portrait de phase du pendule (quasi) non amorti. On superposera pour cela les trajectoires de phase pour différentes valeurs de l'angle initial en se limitant à une pseudo-oscillation. On représentera également quelques trajectoires du mouvement de révolution du pendule.

IV Étude de la période ☺

Pour cette étude, on place le centre d'inertie de la masse à la distance $d = 40$ cm.

Manipulations :

Enregistrer quelques oscillations du pendule pour différentes valeurs de l'amplitude θ_{max} .

Exploitation :

- Mesurer (par *Outils* → *Mesures Automatiques*) leur période.
- Tracer, dans *Qtiplot* $T - T_0$ en fonction de θ_{max}^2 . Vérifier la loi de Borda.