

Exercice 1 : Convertisseur numérique-analogique

On étudie le principe d'un montage permettant de coder un entier écrit en base 2 en une tension.

- (a) On considère le montage de la figure 1 ci-contre composé, d'une source idéale de courant de courant électromoteur η , et de résistors identiques, de résistance notée $2R$. Établir l'expression de la tension U aux bornes des résistors.

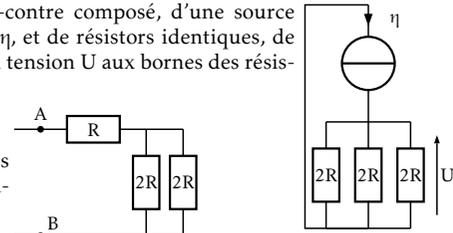


Figure 1 : pour la question 1a.

- (b) Déterminer la résistance équivalente entre les nœuds A et B du réseau de la figure 2 ci-contre.

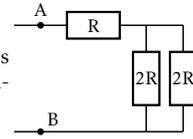


Figure 2 : pour la question 1b.

- On considère le réseau de résistors représenté sur la figure 3 ci-dessous, formé par association de n cellules élémentaires comme celle représentée sur la figure 4, fermée (à droite) par deux résistors de résistance R . Pour tout $k = 1 \dots n$, on désigne par U_k la différence de potentiel entre les nœuds A_k et B_k et par R_k la résistance équivalente à l'association des $k - 1$ premières cellules et des deux résistors de fermeture, entre les mêmes nœuds.

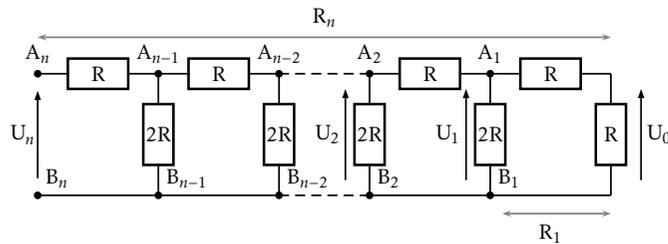


Figure 3 : pour la question 2

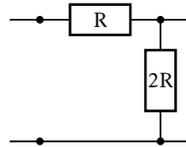
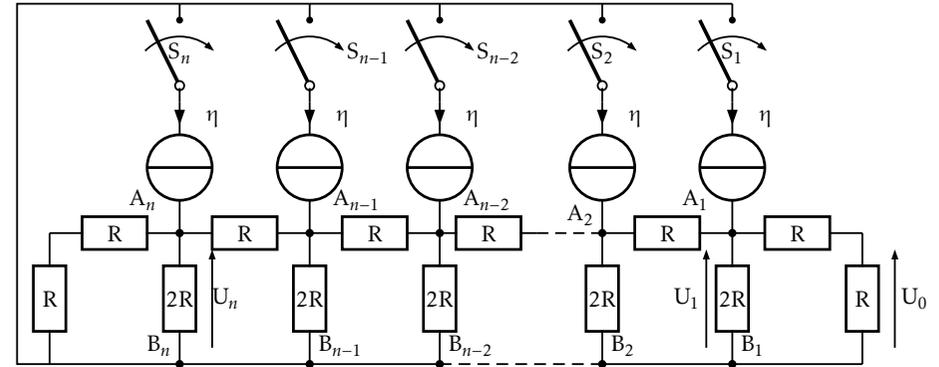


Figure 4 : pour la question 2.

- Établir l'expression de R_{k+1} en fonction de R_k et R et celle de U_{k+1} en fonction de U_k , R_k et R .
- En déduire les expressions de U_n et R_n en fonction de U_0 et de R .

- Le montage complet du convertisseur est représenté ci-contre. Il se compose de n cellules identiques de résistors identiques à celles étudiées précédemment, fermées à gauche et à droite cette fois, par deux résistors de résistance R . Chacune est connectée à un générateur idéal de courant identique de courant électromoteur η . Les autres bornes de ces générateurs peuvent être reliées entre elles par des interrupteurs, notés S_k avec $k = 1 \dots n$.

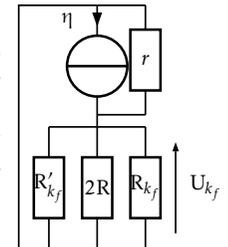


- Dans cette question, on considère que tous les interrupteurs sont ouverts sauf un, dont on nomme l'indice k_f . Établir l'expression de la tension U_{k_f} et en déduire celle de U_0 .

- On rappelle qu'un entier Q s'écrit en base 2 comme une somme de différentes puissances de 2 : $Q = \sum_{k \in \mathbb{N}} p_k 2^k$, où les coefficients p_k valent 0 ou 1.

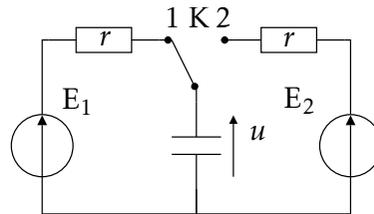
Soit Q un entier décrit en base 2 par un ensemble de coefficients $\{p_k\}$. Montrer brièvement qu'on peut, en fermant certains interrupteurs, obtenir une tension U_0 proportionnelle à Q . Préciser en particulier les interrupteurs à fermer pour coder l'entier $Q = 44$ si on dispose d'un montage à $n = 6$ cellules.

- Les générateurs ne sont pas idéaux : on les modélise comme des générateurs de courant linéaires de résistance interne r . Le schéma électrique d'une cellule particulière, d'indice k_f , est représenté ci-contre. Établir l'expression de la tension U_{k_f} et commenter. On pourra l'exprimer en fonction uniquement de R et r si on a précédemment établi les expressions de R_{k_f} et R'_{k_f} en fonction de R .



Problème 1 : Simulation de résistance

Un condensateur de capacité C peut être mis en contact avec deux générateurs linéaires de force électromotrice E_i ($i = 1..2$) et de même résistance interne r par l'intermédiaire d'un commutateur K . Les forces électromotrices vérifient $E_1 > E_2$. On pose $\tau = rC$.



I Charges initiales des condensateurs

Le condensateur est initialement déchargé et l'interrupteur est basculé en position 2 à l'instant $t = 0$.

- I.1. Déterminer l'expression de la tension $u(t)$ pour $t > 0$.
- I.2. Au bout d'un temps T_0 , l'interrupteur est basculé en position 1. Déterminer l'expression ultérieure de $u(t)$.
- I.3. Tracer l'allure de $u(t)$ entre $t = 0$ et $t = \infty$ quand $T_0 = 2rC$. On y fera figurer les constantes de temps pertinentes.

II Régime périodique

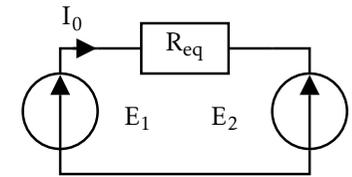
Le commutateur bascule désormais périodiquement d'une position à l'autre suivant la loi suivante pour

$$n \in \mathbb{Z} : \begin{cases} K \text{ en position 1 pour } nT < t \leq (n + \frac{1}{2})T \\ K \text{ en position 2 pour } (n + \frac{1}{2})T < t \leq (n + 1)T \end{cases}$$

On suppose qu'un régime périodique (non sinusoïdal) a eu le temps de s'établir : **toutes les grandeurs électrocinétiques sont périodiques de période T** . On choisit comme origine des temps la commutation correspondant à $n = 0$.

- II.1. On pose $u(0) = U_0$ et $u(T/2) = U'_0$.
 - (a) Tracer très schématiquement l'allure générale de $u(t)$ sur une période T .
 - (b) Établir les expressions de $u(t)$ pour $t \in]0; T]$ à l'aide de U_0 et U'_0 .
- II.2.
 - (a) Exprimer, en régime périodique, U_0 et U'_0 en fonction de E_1 , E_2 et de la constante $a = T/(2\tau)$ dont on précisera la dimension.
 - (b) En déduire l'expression de la charge Q_0 qui transite du générateur de force électromotrice E_1 vers celui de f.é.m E_2 pendant une période T .
 - (c) Calculer l'intensité moyenne I_0 sur une période correspondant à ce transfert de charge.
- II.3.

- (a) Quelle serait la résistance R_{eq} qui serait traversée par le même courant moyen? On donnera son expression en fonction de r et a .
- (b) Déterminer un équivalent de R_{eq} pour $T \gg \tau$ et interpréter le résultat obtenu. **On se placera dans ce régime dans toute la suite.**
- (c) Déterminer la valeur limite $\lim_{T \ll \tau} R_{eq}$ et justifier cette valeur en décrivant le fonctionnement dans ce régime.



II.4. La commutation se fait avec une fréquence f égale à 20 kHz.

- (a) Quelles valeurs des paramètres peut-on choisir pour réaliser une résistance de 1 k Ω ?
- (b) Quelle condition doit vérifier la valeur de r ?
- (c) Que se passe-t-il si on change les valeurs de E_1 ou E_2 ?

III Défauts du dispositif

On considère désormais que le condensateur possède une résistance de fuite R_f branchée en parallèle.

- III.1.
 - (a) Établir les nouvelles équations différentielles vérifiées par $u(t)$ quand le commutateur est en position 1 ou 2.
 - (b) En déduire la nouvelle constante de temps qui caractérise le système ainsi que la nouvelle valeur de la résistance simulée.
- III.2. Quelle condition doit vérifier R_f pour qu'on soit dans le régime de la question II.3b?

IV Et avec une bobine ?

On remplace le condensateur par une bobine. Déterminer le comportement du dispositif. A-t-on toujours une simulation de résistance ?