Problème 1 : Générateur de Marx

On s'intéresse à des montages utilisés pour tester la réponse de composants ou d'installations électriques à des circonstances extrêmes.

I Générateur de choc

On considère le montage de la figure 1 dans lequel les deux condensateurs sont identiques, de même capacité C.

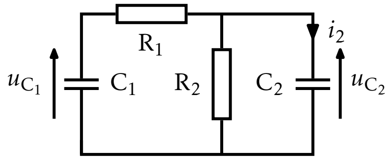


Figure 1 – Générateur de choc. Les deux condensateurs ont même capacité C.

I.1. (a) Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u_{C_2}. On pourra pour y parvenir mettre en œuvre la technique utilisant les impédances complexes.

(b) Mettre l'équation différentielle sous forme canonique et identifier :
- une pulsation propre ω_0,
- un facteur de qualité Q,

qu'on exprimera en fonction de R_1, R_2 et C.

(c) Vérifier que pour $R_1 \ll R_2$, le facteur de qualité se met sous la forme :

$$Q = \alpha\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{\beta}. \qquad (1)$$

Avec α et β des constantes positives. On considère cette condition réalisée dans toute la suite, sauf mention explicite du contraire.

I.2. Initialement la tension aux bornes du condensateur C_1 est $u_{c_1} = U_0$, et le condensateur C_2 est déchargé. On utilisera autant que possible la simplification $R_1 \ll R_2$, au moyen de développements limités.

(a) Déterminer l'expression de u_{C_2} en fonction du temps. On la mettra sous la forme :

$$u_{C_2}(t) = U_\infty + V\left(e^{-\omega_2 t} - e^{-\omega_1 t}\right), \qquad (2)$$

avec U_∞, V, ω_1 et ω_2 des constantes positives qu'on exprimera en fonction des paramètres du système.

(b) Comparer les valeurs de ω_1 et ω_2 et en déduire l'allure de $U_{C_2}(t)$.

(c) On cherche à simuler l'effet de la foudre. Proposer des valeurs de R_1, R_2 permettant d'avoir une tension U_{c_2} qui :
- augmente initialement rapidement en un temps de l'ordre de 1 µs,
- puis diminue lentement en un temps de l'ordre de 50 µs.

I.3. Calculer l'ordre de grandeur de la valeur initiale de l'intensité du courant traversant le condensateur i_2 pour les paramètres choisis précédemment et U_0 de l'ordre de 10 kV.

II Circuit d'alimentation

On étudie désormais la charge du condensateur C_1 préalable à celle de C_2 étudiée précédemment. Cette charge s'effectue au moyen d'un générateur idéal de haute tension continue E en série avec une résistance R_c élevée. Le circuit de décharge comporte également un éclateur X formé de deux conducteurs séparés d'une distance de l'ordre du cm. Ce circuit est représenté sur la figure 2.

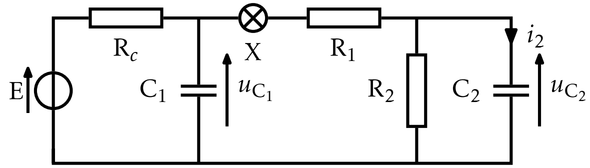


Figure 2 – Circuit d'alimentation du générateur de choc. L'éclateur X se comporte comme un interrupteur ouvert ou fermé selon la valeur de la tension à ses bornes. Il est ouvert tant qu'elle est inférieure en valeur absolue à U_X mais se ferme dès qu'elle atteint U_X, et le reste tant qu'un courant le parcourt.

II.1. Tant que la tension aux bornes de l'éclateur est inférieure en valeur absolue à la valeur de rupture U_X, celui-ci se comporte comme un interrupteur ouvert.

(a) Déterminer l'évolution temporelle de la tension U_{C_1} aux bornes du condensateur C_1 initialement déchargé.

(b) En déduire la durée nécessaire pour que la tension aux bornes de l'éclateur atteigne la valeur U_X. Comparer aux valeur du **I.2c** et commenter.

II.2. Dès que la tension aux bornes de l'éclateur atteint la valeur U_X, un arc électrique se forme dans l'éclateur et ce dernier se comporte comme un interrupteur fermé, jusqu'à la fin de l'expérience.

Justifier brièvement, par exemple en considérant les ordres de grandeur des intensités des courants dans les deux phases, que le dispositif quand l'arc électrique est formé se ramène à celui étudié à la section I.

III Générateur de Marx

Le montage précédent permet de régler les paramètres temporels d'un «choc» électrique mais pas d'augmenter sensiblement l'amplitude de celui-ci. Le montage de la figure 3 permet en revanche de passer d'une haute tension de quelques dizaines de kV à des tensions de plusieurs centaines de kV.

Tous les condensateurs ont même capacité C et toutes les résistances ont même valeur R_c. Les éclateurs ont tous la même tension de rupture U_X sauf le dernier dont la valeur U_{Xf} est réglable (en réglant l'écartement des conducteurs).

III.1. Les condensateurs sont initialement tous déchargés quand on allume le générateur de tension de force électromotrice E_M. Déterminer la tension aux bornes de chacun des condensateurs au bout d'un temps assez long. Observera-t-on des décharges dans les éclateurs ?

III.2. Donner sans calcul un ordre de grandeur du temps nécessaire.

III.3. On déclenche manuellement un arc électrique dans le premier éclateur X_1 (une bougie de moteur de voiture suffit).

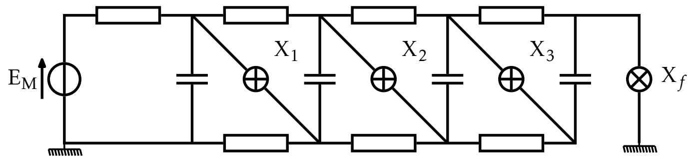


FIGURE 3 – Générateur de Marx. Tous les résistors on même résistance R_c, tous les condensateurs ont même capacité C et tous les éclateurs ont la même tension de rupture U_X à l'exception du dernier X_f dont la tension de rupture, notée U_{X_f} est supérieure à U_X.

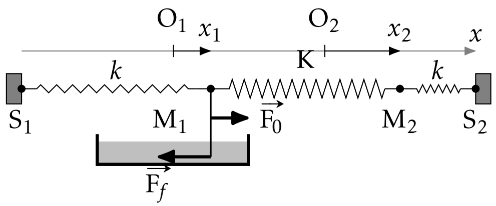
(a) On admet qu'on peut alors négliger les courants circulant dans les résistors. Donner un schéma électrique équivalent ne contenant plus que les condensateurs et les éclateurs.

(b) En déduire la tension aux bornes du second éclateur et justifier que l'arc électrique s'amorce. Décrire le fonctionnement ultérieur.

(c) On admet qu'il faut, dans l'air sec, une tension de 36 kV par cm d'air entre les écarteurs. Quelle pourra être la largeur maximale de l'écarteur X_f permettant d'observer un arc ? Quelle aurait été cette distance si on n'avait disposé que de l'alimentation E_M sans machine de Marx ?

Données : Tension d'alimentation du générateur de choc $E = 40\,\text{kV}$; résistance de charge ; capacité des condensateurs $C = 2\,\text{nF}$; $R_c = 1\,\text{M}\Omega$; tension de rupture $U_X = 30\,\text{kV}$; tension d'alimentation du générateur de Marx $E_M = 25\,\text{kV}$.

Exercice 1 : Transparence électromagnétiquement induite



On considère deux points matériels identiques M_1 et M_2 de même masse m. Ils sont liés à des supports fixes (notés S_1 et S_2) par des ressorts idéaux identiques de même constante de raideur k et l'un à l'autre par un ressort de raideur K. Le point matériel M_1 est de plus soumis à une force de frottement fluide $\vec{F_f}$ et à une force d'excitation sinusoïdale $\vec{F_0}$ à la pulsation ω.

Les mouvements sont unidimensionnels selon l'axe x. Quand M_1 et M_2 sont en équilibre (aux positions respectives O_1 et O_2), la longueur de chaque ressort est sa longueur à vide. On note x_1 et x_2 les abscisses respectives de M_1 et M_2 par rapport à leur O_1 et O_2. On pose $F_{0x} = F_0 \cos(\omega t)$ et $F_{fx} = -\beta \dot{x}_1$.

1. Écrire les équations différentielles vérifiées par les abscisses x_1 et x_2. On fera apparaître les pulsations ω_0 et Ω définies par $\omega_0^2 = (k+K)/m$ et $\Omega^2 = K/m$. On utilisera également $Q = m\omega_0/\beta$.

2. On considère dans cette question le cas $K = 0$, en régime sinusoïdal permanent à la pulsation ω.

   (a) Déterminer l'amplitude complexe $\underline{X_1}$ du mouvement de M_1. On l'exprimera en fonction de F_0, m, ω_0, ω et Q.

   (b) On définit la puissance moyenne, notée $\mathcal{P}_1$, sur une période $T = 2\pi/\omega$, par :

$$\mathcal{P}_1 = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{t=T} \mathcal{P}(\vec{F})\,dt = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{t=T} F_{0x}\dot{x}\,dt.$$

   Déterminer l'expression de $\mathcal{P}_1$.

   (c) Tracer l'allure de $\mathcal{P}_1$ en fonction de ω.

3. On revient maintenant au cas $K > 0$, toujours en régime sinusoïdal permanent à ω.

   (a) Établir les équations vérifiées par les amplitudes complexes $\underline{X_1}$ et $\underline{X_2}$. Résoudre ce système pour déterminer $\underline{X_1}$ en fonction de $F_0, m, \omega, \omega_0, \Omega$ et Q.

   (b) Montrer qu'on a maintenant $\mathcal{P}_1(\omega_0) = 0$. Décrire qualitativement les mouvements de M_1 et M_2 pour $\omega = \omega_0$.

   (c) On pose $\delta = \omega - \omega_0$. Simplifier l'expression de $\mathcal{P}_1$ pour $\delta \ll \omega_0$ et en déduire la largeur à mi-hauteur de la bande de fréquence où $\mathcal{P}_1$ est réduite. En déduire la nouvelle allure de $\mathcal{P}_1(\omega)$.

Ce système modélise l'effet nommé « transparence électromagnétiquement induite ». L'absorbance de certains gaz atomiques pour une certaine longueur d'onde peut s'annuler complètement quand on les excite simultanément par un rayonnement à une autre longueur d'onde. Ce phénomène peut conduire à des effets remarquables comme la diminution considérable de la vitesse de la lumière dans ce gaz.

On peut décrire cet effet en modélisant les niveaux électroniques par des oscillateurs harmoniques et l'interaction avec la lumière par une force d'excitation sinusoïdale.
