On étudiera les mouvements dans le référentiel terrestre, considéré galiléen pour la durée des phénomènes étudiés et dans lequel règne le champ de pesanteur considéré uniforme, d'accélération notée $\vec{g}$, de norme $g = 9{,}80\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Problème 1 : Mouvement d'un jouet

On étudie dans ce problème le mouvement d'un jouet, modélisé par un point matériel noté M de masse m glissant sur un support dans le champ de pesanteur terrestre. Le mouvement s'effectuera dans un plan vertical.

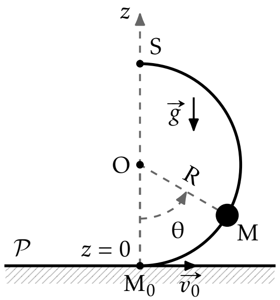
On n'hésitera pas à annoter la Figure 1 et à la joindre à la copie.

Données : Rayon du cylindre $\mathrm{R} = 30\,\mathrm{cm}$, masse de l'objet $m = 20\,\mathrm{g}$.

I Mouvement circulaire sans frottement

Le jouet aborde avec un vecteur vitesse $\vec{v_0}$ horizontal (point $\mathrm{M_0}$) un support hémicylindrique de rayon noté R. Dans cette partie, on néglige tout frottement entre le support et le jouet. On note $\vec{\mathrm{N}}$ la réaction normale du support.

On nomme O le centre du cercle et on note θ l'angle entre la verticale descendante passant par O et le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$.



I.1. (a) Écrire le principe fondamental de la dynamique en coordonnées polaires de centre O. On fera apparaître une pulsation caractéristique, qu'on notera ω_0 et qu'on exprimera en fonction de g et R.

(b) Vérifier que la vitesse angulaire $\dot\theta$ vérifie l'équation :

$$\dot\theta^2 = \frac{v_0^2}{\mathrm{R}^2} - \frac{2g}{\mathrm{R}}\left(1-\cos(\theta)\right). \tag{1}$$

(c) En déduire l'expression de la force de réaction $\vec{\mathrm{N}}$ tant que la vitesse ne s'annule pas.

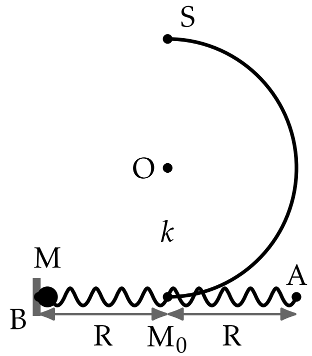
(d) Déterminer à quelle condition portant sur la vitesse v_0 le point matériel peut parvenir au sommet S du cercle. Calculer la valeur correspondante de v_0.

On suppose dans toute la suite que cette condition est réalisée : le contact est alors rompu quand le jouet parvient au point S et il n'est ensuite plus soumis qu'à son poids.

I.2. On néglige les frottements avec l'air dans la suite du mouvement. Déterminer l'expression, en fonction entre autres de v_0, de la distance à laquelle il passe du point $\mathrm{M_0}$ quand il rejoint le plan horizontal passant par $\mathrm{M_0}$.

I.3. La vitesse v_0 initiale lui a été communiquée par un ressort dont une extrémité est fixe au point A situé à une distance R de $\mathrm{M_0}$, de longueur à vide égale à R et de constante de raideur notée k.

Une plaque sans masse est fixée à l'autre extrémité B du ressort. Initialement le ressort est allongé de la même longueur R par le jouet appuyé contre la plaque, l'ensemble étant maintenu immobile. C'est la contraction ultérieure du ressort qui propulse le jouet jusqu'au point $\mathrm{M_0}$.

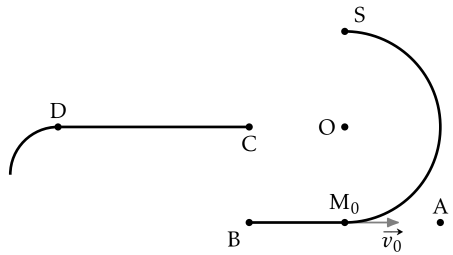


(a) Justifier que si l'objet est seulement appuyé contre la plaque sans y être fixé, il s'en sépare quand il atteint le point $\mathrm{M_0}$.

(b) En déduire l'expression puis la valeur numérique de la valeur minimale de la constante de raideur pour qu'après avoir parcouru le demi-cercle le jouet atteigne le point S.

II Atterrissage

Après avoir quitté le support au point S, le jouet peut atteindre un plan horizontal situé à l'altitude R, commençant au point C à l'aplomb du point B et qui se termine par une portion circulaire de rayon R/2 au point D. On suppose que le point D est suffisamment loin pour que le jouet ne puisse pas le dépasser.



II.1. Le jouet peut-il tomber entre C et O ?

On considère dans la suite qu'il atteint le plan horizontal entre les points C et D.

II.2. On suppose par la suite qu'il conserve après l'atterrissage sur le plan horizontal CD la composante horizontale du vecteur vitesse qu'il avait à l'instant de l'atterrissage.

(a) Déterminer l'expression de sa vitesse sur le plan horizontal en fonction, entre autres, de v_0.

(b) À quelle condition, portant entre autres sur v_0, décolle-t-il de la portion circulaire dès qu'il atteint le point D ? Conclure.

III Effet des frottements

Dans cette dernière partie, on prend en compte les frottements entre le jouet et les différents supports (horizontaux et circulaires) qu'on modélise par un frottement solide de coefficient noté μ. On rappelle les lois d'Amontons et Coulomb. En notant respectivement $\vec{\mathrm{N}}$ et $\vec{\mathrm{T}}$ les composantes normale et tangentielle de la force de contact :

- l'équilibre n'est possible que si $\mathrm{T/N} \leqslant \mu$,
- s'il y a mouvement, l'intensité de la force tangentielle est donnée par $\mathrm{T} = \mu\mathrm{N}$.

III.1. Déterminer brièvement la nature des mouvements quand le jouet se déplace sur les supports horizontaux (BM_0) et (CD).

III.2. On considère que le jouet parvient au point M_0 avec la vitesse horizontale v_0. On s'intéresse par la suite à la portion circulaire.

(a) Écrire la loi de la quantité de mouvement en coordonnées polaires.

(b) En déduire une expression de $\ddot{\theta}$ en fonction de θ, $\dot{\theta}$, de μ, g et R, au cours de la phase d'ascension.

III.3. La Figure 1 représente le portrait de phase du mouvement dans la portion circulaire.

(a) Déterminer les angles θ pour lesquels l'équilibre du jouet est possible.

(b) Que représente la courbe $\mathcal{C}$? Déterminer son équation.

(c) Déterminer graphiquement la valeur du coefficient μ et vérifier la valeur de la pente de la trajectoire dans l'espace des phases pour les plus grandes valeurs de $\dot{\theta}$.

(d) Déterminer graphiquement une approximation de la valeur minimale de la vitesse permettant d'atteindre le point S. Commenter.

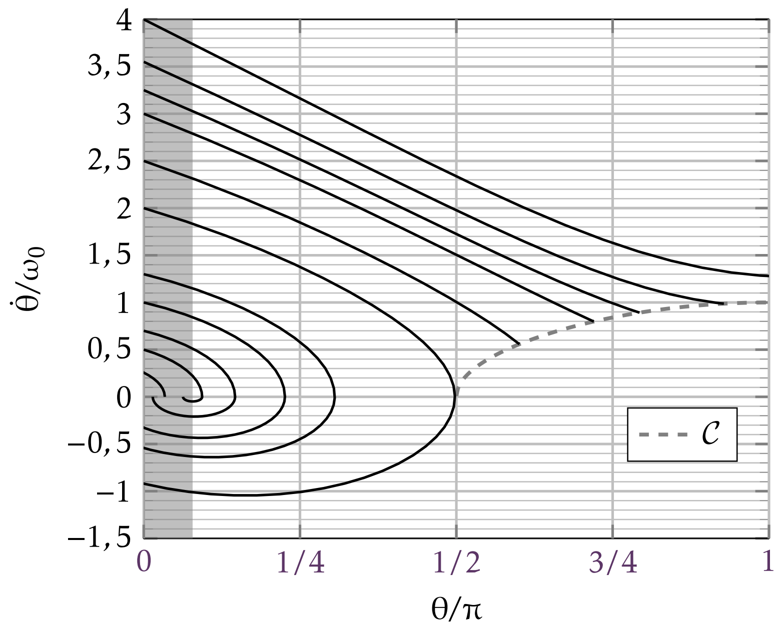


Figure 1 – Portrait de phase du mouvement du jouet dans la portion circulaire. Les abscisses de la zone grisée sont celles pour lesquelles l'équilibre est possible.