Les sacs seront laissés devant le tableau. Conservez seulement de quoi écrire et une calculatrice : pas de téléphone !
Si vous ne comprenez pas une notation, une question, ou si vous pensez avoir découvert une erreur d'énoncé, signalez-le immédiatement.

Problème 1 : Étude du radar

Un radar[i] utilise des ondes radio (de fréquences comprises entre 1 MHz et 110 GHz) pour détecter la présence et le mouvement d'objets.

Il utilise une antenne émettant des impulsions sinusoïdales de durée τ, répétées avec une période dite « de répétition » notée T. On a représenté sur la figure l'allure ci-contre l'allure temporelle du signal (pour un vrai signal, le rapport T/τ est beaucoup plus grand que ce qui y est représenté).

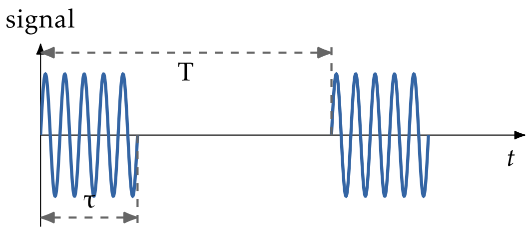

Fig. 1 : . Train d'impulsions émises par le radar.

Lorsqu'une impulsion rencontrent un objet réfléchissant présentant la bonne orientation, elle est réfléchie vers l'antenne, qui est utilisée en récepteur entre deux impulsions. L'impulsion alors reçue par l'antenne est nommée « écho ».
Données : célérité des ondes électromagnétiques dans l'air : $c = 3{,}00 \cdot 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

I Mesure de position

Le radar émet dans l'air des ondes de fréquence $\nu = 2{,}90\,\mathrm{GHz}$, par impulsions de durée $\tau = 1{,}00\,\mu\mathrm{s}$ avec une période de répétition $T = 1{,}00 \cdot 10^2\,\mu\mathrm{s}$.

1. Calculer la longueur d'onde λ associée à la fréquence ν ainsi que le nombre d'oscillations pendant la durée d'une impulsion.
2. On détecte trois échos, en retard de $\Delta t_1 = 25\,\mu\mathrm{s}$, $\Delta t_2 = 56\,\mu\mathrm{s}$ et $\Delta t_3 = 75\,\mu\mathrm{s}$ par rapport au début d'une impulsion. On a représenté sur la figure ci-contre la chronologie des impulsions émises et des échos reçus.

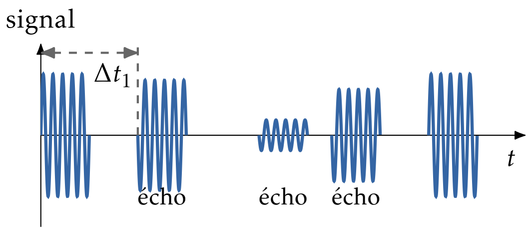

Fig. 2 : . Impulsions émises et échos reçus par le radar.

   (a) Proposer une explication (sans aucun calcul) à la plus faible amplitude des échos.
   (b) En déduire les distances auxquelles se trouvent les objets détectés.
3. Déterminer l'expression de la distance minimale en dessous de laquelle on ne peut pas détecter un objet et calculer sa valeur. Commenter.

II Mesure temporelle de la vitesse

Un objet s'éloigne du radar avec une vitesse notée v.

1. On envisage de mesurer la vitesse en étudiant le décalage temporel entre deux échos successifs, noté T_v.
   (a) Déterminer l'expression de T_v.
   (b) Calculer T_v pour un avion se déplaçant à $1{,}50 \cdot 10^2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Quelle est la précision temporelle nécessaire pour mesurer la vitesse v de cette manière ?
2. On cherche désormais à mesurer la vitesse par une étude de la phase des échos. On note $f_1(t)$ le signal associé au premier écho et $f_2(t)$ celui au deuxième écho et on admet qu'on est capable de retarder le signal du premier écho d'une durée T, pour observer simultanément $f_1(t-T)$ et $f_2(t)$.
   (a) Déterminer le déphasage entre $f_1(t-T)$ et $f_2(t)$.
   (b) Calculer sa valeur pour la vitesse de l'avion précédent et commenter.

III Mesure fréquentielle de la vitesse

L'effet Doppler assure que si l'avion s'éloigne à la vitesse v de la source, la fréquence de l'onde réfléchie sera $\nu' = \nu(1 - v/c)$.

1. Calculer la fréquence de l'écho associé à l'avion précédent. Quelle précision sur les mesures de fréquence doit-on posséder pour pouvoir mesurer sa vitesse de cette manière.
2. On forme la somme de l'écho de l'avion s'éloignant à la vitesse v et d'une véritable sinusoïde à la fréquence ν et de même amplitude que l'écho.
   (a) Déterminer l'expression (à une phase près) du signal somme, noté $s(t)$.
   (b) Comment l'étude de $s(t)$ permet-elle de mesurer la vitesse v. Quelle devrait être la durée minimale des impulsions pour mesurer une vitesse $v = 1{,}50 \cdot 10^2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

i. Radio Detection And Ranging

Problème 2 : Saut à l'élastique
I Question préliminaire

Le résultat de cette question ne sera nécessaire que pour la partie III.
On considère la fonction :

$$f : t \mapsto A\cos(\omega_a\, t) + B\sin(\omega_b\, t),$$

avec A , B , ω_a et ω_b des constantes positives.

1. Faire une construction de Fresnel pour $A = 2$, $B = 1$, $\omega_b = 2\,\omega_a$.

2. Déterminer les valeurs minimale et maximale de f ainsi que les instants où elles sont atteintes.

3. Préciser les valeurs de f pour $t = 0$, $t = \pi/(2\,\omega_b)$, $t = \pi/\,\omega_b$ et $t = 2\pi/\,\omega_b$.

II Caractéristiques d'un saut

On modélise une corde de saut à l'élastique de longueur au repos ℓ_0 de la manière suivante :

- sa masse est négligeable,
- elle exerce une force nulle tant qu'elle n'est pas tendue,
- c'est un ressort de raideur k quand sa longueur est supérieure à ℓ_0

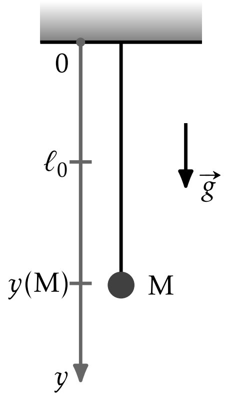

FIG. 3 : . Notations.

Les mouvements considérés seront unidimensionnels, repérés par la coordonnée y selon la verticale descendante depuis le point d'attache de la corde (voir la figure 3). L'accélération de la pesanteur est notée g.
Données : Longueur au repos : $= \ell_0 = 40\,\text{m}$; masse du sauteur $m = 80\,\text{kg}$; accélération de la pesanteur $g = 9{,}80\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

1. Quand le sauteur est suspendu immobile au bout de la corde, celle-ci est allongée de $\Delta\ell_{\text{eq}} = 55\,\text{m}$. Déterminer l'expression puis la valeur de sa constante de raideur, notée k.

2. Le sauteur se laisse tomber avec une vitesse nulle du point d'attache de coordonnée $y = 0$. On limite l'étude à sa première descente.

- **(a)** Montrer que la vitesse $\dot{y}$ vérifie, $\dot{y} = \sqrt{2gy}$, tant que $y \leqslant \ell_0$.
- **(b)** Établir l'équation différentielle d'évolution de y pour $y \geqslant \ell_0$ et la résoudre.
- **(c)** En déduire la hauteur minimale à laquelle doit être accrochée la corde pour que le sauteur ne se blesse pas.
- **(d)** Déterminer également la valeur maximale de la vitesse au cours du mouvement ainsi que la valeur maximale de la force de tension exercée par la corde.

III Un jeu dangereux

Deux sauteurs de même masse m décident de se suspendre l'un à l'autre à l'aide de deux cordes identiques à la précédente selon la configuration représentée ci-contre. On suppose dans toute la suite que les sauteurs n'atteignent pas le sol et que les deux cordes sont toujours tendues

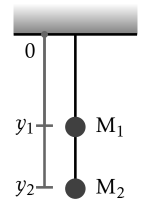

FIG. 4 : Le sauteur M_1 est attaché par une corde au support en $y = 0$ et par une autre corde identique au sauteur M_2.

1.
- **(a)** Déterminer les deux positions y_1 et y_2 des deux sauteurs quand ils sont à l'équilibre. On les note $y_{1\text{eq}}$ et $y_{2\text{eq}}$.
- **(b)** Quelle doit être la hauteur minimale à laquelle doit être attachée la corde pour que M_2 ne touche pas le sol.

2. On descend le sauteur M_2 d'une hauteur $\Delta\ell_i$ et on le maintient à cette position. Quand M_1 est immobile, on libère M_2.

- **(a)** On définit les écarts aux positions d'équilibre $Y_1 = y_1 - y_{1\text{eq}}$ et $Y_2 = y_2 - y_{2\text{eq}}$. Établir les équations différentielles d'évolution temporelle de Y_1 et Y_2.
- **(b)** Déterminer les expressions de Y_1 et Y_2 à l'instant où on lâche M_2 en fonction, entre autres, de $\Delta\ell_i$.
- **(c)** On peut montrer qu'il existe des réels α_a et α_b tels que les fonctions

$$X_a = Y_1 + \alpha_a Y_2 \quad \text{et: } X_b = Y_1 + \alpha_b Y_2,$$

vérifient l'équation différentielle canonique d'un oscillateur harmonique, avec des pulsations qu'on note ω_a et ω_b :

$$\ddot{X}_a + \omega_a^2 X_a = 0 \qquad \ddot{X}_b + \omega_b^2 X_a = 0.$$

Déterminer les expressions de X_a et X_b en fonction du temps et en déduire celles de Y_1 et Y_2.

3. On donne, avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$:

$$\frac{\omega_a^2}{\omega_0^2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \simeq 2{,}62 \qquad \alpha_a = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \simeq -0{,}618$$
$$\frac{\omega_b^2}{\omega_0^2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \simeq 0{,}382 \qquad \alpha_b = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}62.$$

- **(a)** Tracer l'allure de $Y_2(t)$. On étudiera en particulier le nombre de fois que M_2 voit sa vitesse s'annuler quand il évolue entre son maximum et son minimum.
- **(b)** **Question subsidiaire, s'il reste du temps :** Vérifier que Y_1 et Y_2 sont bien solutions de l'équation différentielle du **2a** avec les valeurs[ii] données au **3**.

ii. Et oui, on retrouve ici aussi le nombre d'or.