Les valeurs numériques relatives à chaque problème ou exercice sont données en début d'énoncé. Les sacs seront laissés devant le tableau. Conservez seulement de quoi écrire et une calculatrice : pas de téléphone !
Si vous ne comprenez pas une notation, une question, ou si vous pensez avoir découvert une erreur d'énoncé, signalez-le immédiatement.
Pour l'optique, on rappelle les formules de conjugaison de Descartes et de Newton. Soit une lentille mince $\mathcal{L}$ de centre O, de foyers objet et image F et F′ dont on note f' la distance focale. Si A′ et A sont deux points de l'axe optique conjugués par $\mathcal{L}$, on a :

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{OA'}}} - \frac{1}{\overline{\mathrm{OA}}} = \frac{1}{\overline{\mathrm{OF'}}} = \frac{1}{f'} \quad \text{et :} \quad \overline{\mathrm{FA}} \cdot \overline{\mathrm{F'A'}} = \overline{\mathrm{FO}} \cdot \overline{\mathrm{F'O'}} = -f'^2.$$

On rappelle également les formules du grandissement transversal γ. Si B et B′ sont deux points conjugués, hors de l'axe optique, dans les plans conjugués contenant A et A′, on a :

$$\gamma = \frac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\overline{\mathrm{AB}}} - \frac{\overline{\mathrm{F'A'}}}{f'} = \frac{f'}{\overline{\mathrm{FA}}} = \frac{\overline{\mathrm{OA'}}}{\overline{\mathrm{OA}}}.$$

Exercice 1 : Hyperboles de conjugaison

On considère une lentille mince convergente, notée $\mathcal{L}_c$ de centre optique O et de distance focale image notée f_c'. La figure 1 (à rendre avec la copie) représente la position $\overline{\mathrm{OA'}}$ de l'image que la lentille $\mathcal{L}_c$ donne d'un objet de position $\overline{\mathrm{OA}}$ situé sur l'axe optique.

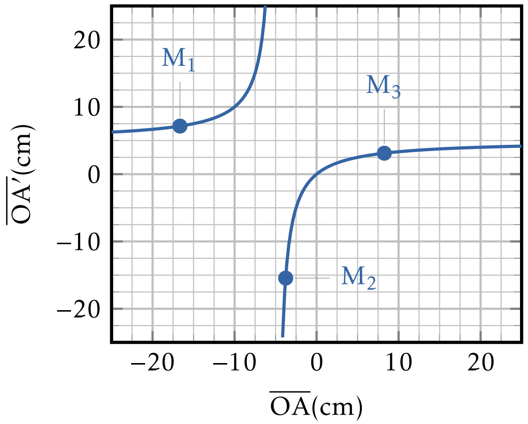
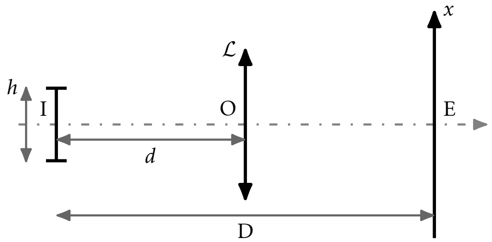


Figure 1 – Position de l'image en fonction de celle de l'objet pour une lentille convergente.

1. (a) Déterminer à l'aide de la figure 1 la valeur de la distance focale f_c'.
   (b) Pour chacun des points M_1, M_2 et M_3, déterminer la nature réelle ou virtuelle de l'objet et de l'image correspondant.
2. (a) Proposer une détermination du grandissement transversal utilisant la figure 1.
   (b) En déduire le grandissement correspondant aux points M_1 et M_2.
3. On cherche avec cette lentille à former une image réelle deux fois plus grande d'un objet réel.
   (a) Quel sera le signe du grandissement ?
   (b) Déterminer à l'aide de la figure 1 la distance entre la lentille et l'objet ainsi que la distance entre l'objet et son image.
4. On considère une lentille mince divergente, de vergence V = −10 δ.
   (a) Tracer l'allure de la courbe $\overline{\mathrm{OA'}}$ en fonction de $\overline{\mathrm{OA}}$ en précisant soigneusement les points remarquables. On pourra se contenter de modifier quelques paramètres de la figure 1 et l'utiliser pour les questions suivantes.
   (b) Cette lentille modélise le verre correcteur d'un œil myope. Où se forme l'image formée par ce verre d'un objet réel placé à 20 cm ?
   (c) Avec ce verre, l'œil corrigé voit net sans accommoder un objet à l'infini. En déduire le «punctum remotum» de l'œil non corrigé.
   (d) Le «punctum proximum» de l'œil non corrigé est 5 cm, quel est le «punctum proximum» de l'œil corrigé ?

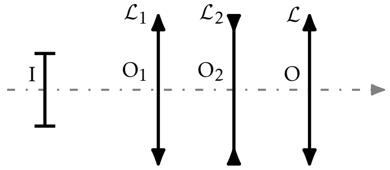
Exercice 2 : Projecteur de diapositives

On souhaite former, sur un écran noté E, l'image agrandie d'une diapositive à l'aide d'une lentille mince convergente $\mathcal{L}$. On désigne par I l'intersection de la diapositive avec l'axe optique, par O et f' le centre optique et la distance focale image de la lentille. On désigne par d la distance IO.



1. (a) Déterminer le signe de γ.
   (b) On souhaite que la taille de l'image sur l'écran soit $|\gamma|h$, avec $|\gamma| > 1$. Déterminer l'expression de la distance d puis de la distance focale f' en fonction de D et γ. Calculer d, et f' pour $h = 24$ mm, $H = |\gamma|h = 1{,}2$ m et $D = D_0 = 3{,}0$ m. On note d_0 la valeur de d et et O_0 la position correspondante.
   (c) On peut régler l'objectif en translatant O par rapport à I. Déterminer les distances D_{min} et D_{max} quand on déplace O de 1 mm de part et d'autre de la position O_0 et commenter.

2. Pour cette question, D est de nouveau fixé à $D = D_0$ et la lentille en O_0. On souhaite multiplier la taille de l'image sur l'écran par 2 sans déplacer ni celui-ci ni la diapositive, ni la lentille. On envisage d'intercaler, entre la diapositive et la lentille $\mathcal{L}$, une lentille mince convergente $\mathcal{L}_1$ de distance focale image f_1' et une lentille mince divergente $\mathcal{L}_2$ de distance focale image f_2', avec $|f_2'| = 2f_1'$.

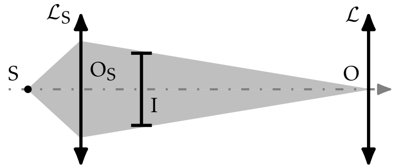


   (a) Justifier qu'on n'aurait pas pu réaliser cette dilatation par 2 en n'ajoutant qu'une seule lentille.

   (b) On place la lentille $\mathcal{L}_1$ de telle sorte que son foyer objet coïncide avec I. Où doit-on placer $\mathcal{L}_2$? On justifiera le fonctionnement de ce dispositif en s'aidant d'une construction.

3. On supprime dans cette partie les lentilles $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ pour étudier maintenant la source lumineuse éclairant la diapositive. On la considère ponctuelle, située en S à une distance d_S en amont de la diapositive. La distance D est à nouveau fixée à D_0.

   On intercale, en O_S une lentille mince convergente $\mathcal{L}_S$ (de distance focale f_S') entre S et la diapositive de telle sorte que le faisceau lumineux issu de S englobe toute la diapositive et se focalise en O_0, centre optique de la lentille $\mathcal{L}$.



   (a) Le schéma ci-dessus représente l'enveloppe « utile » du faisceau lumineux issu de S atteignant la lentille $\mathcal{L}$. Compléter ce schéma pour représenter cette enveloppe entre la lentille $\mathcal{L}$ et l'écran E.

   (b) Déterminer l'expression de la distance SO_S en fonction de f_S', d_S et d_0. Calculer SO_S pour $f_S' = 1{,}8\,\text{cm}$ et $d_S = 5\,\text{cm}$.

   (c) Quelle est l'utilité de la lentille $\mathcal{L}_S$?

Problème 1 : Interférences de condensats de Bose-Einstein

On étudie deux expériences d'interférences d'ondes de matière. Elles utilisent des nuages d'atomes ultra froids dans l'état quantique dégénéré nommé «condensat de Bose-Einstein» dont tous les constituants (atomes ou molécules) sont dans le même état quantique. Aucune connaissance sur ces états n'est nécessaire, on les traitera comme s'il s'agissait d'un seul atome ou molécule.

Données : masse d'un nucléon $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}$, constante de Planck $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\text{J} \cdot \text{s}$, accélération de la pesanteur $g = 9{,}81\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$. Les autres données sont à rechercher dans les figures expérimentales ou dans l'énoncé des questions.

I Généralités

I.1. On considère l'onde de matière d'une particule libre de masse m et de quantité de mouvement $\vec{p} = p\vec{e_y}$, avec $p \geqslant 0$.

   (a) Donner l'expression de son énergie cinétique en fonction de p et m, notée E_p

   (b) Rappeler l'expression de sa longueur de de Broglie, notée λ_{dB} en fonction entre autres de p.

   (c) La particule est maintenant confinée dans un piège unidimensionnel de longueur ℓ selon $\vec{e_y}$. Déterminer les valeurs de p possibles pour des états stationnaires (on identifiera chaque état stationnaire par un entier $n > 0$). En déduire les valeurs de l'énergie cinétique de la particule correspondantes, notées E_n et tracer l'allure de la densité de probabilité de présence en fonction de y, notée $|\Psi_n(y)|^2$.

I.2. On admet que la fonction d'onde d'une particule de quantité de mouvement $\vec{p} = p\vec{e_y}$, notée $\psi_p(y,t)$ peut se mettre sous la forme :

$$\psi_p(y,t) = A_p e^{i(py - E_p t)/\hbar}, \text{avec } A_p \text{ indépendante de } y \text{ et } t. \tag{1}$$

   (a) Tracer la fonction $|\psi_p(y,t) + \psi_{-p}(y,t)|^2$ en fonction de y. On pourra choisir de prendre $A_{-p} = -A_p$.

   (b) En déduire que les états stationnaires du **I.1c** peuvent être modélisés comme des superpositions de deux états de quantités de mouvement opposées.

II Interférences entre deux condensats en mouvement

Dans cette expérience, deux condensats identiques sont mis en mouvement l'un vers l'autre avec des vecteurs vitesse opposés, de même norme v_0. Ils sont formés de molécules diatomiques de ^{6}Li, dont on note m_{Li_2} la masse.

II.1. Rappeler l'expression de la longueur d'onde de de Broglie λ_{dB} d'une particule de masse m_{Li_2} et de vitesse v_0.

II.2. Les courbes ci-contre représentent l'évolution des positions horizontales (selon $\vec{e}_y$) des deux condensats en fonction du temps quand ils sont lancés l'un vers l'autre. L'échelle des abscisses est de 1 ms par division : les courbes s'intersectent en particulier pour $t = 14\,\text{ms}$.

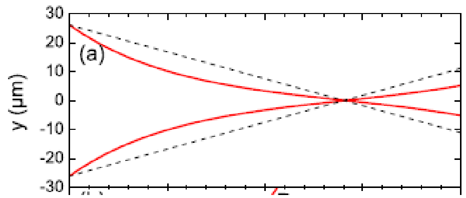


FIGURE 2

Lesquelles des courbes correspondent-elles à des mouvements rectilignes uniformes ? Déterminer par lecture graphique la norme des vecteurs vitesse correspondants.

II.3. On s'intéresse dans la suite aux mouvements correspondant aux courbes en traits pleins.

   (a) Lire les normes des vitesses à l'instant où les deux condensats se rencontrent et calculer la longueur d'onde de de Broglie correspondante.

   (b) La figure 3 est une photographie des deux condensats à l'instant où ils se rencontrent (obtenue en mesurant leur absorbance), accompagnée du profil de densité correspondant. Mesurer la valeur de l'interfrange correspondant et commenter. L'intensité du signal observé est proportionnelle au carré de l'amplitude de probabilité.

   (c) Déduire de ces mesures la masse des particules dont on observe les ondes des matière et commenter.

   (d) Si les vitesses étaient celles données par les courbes en traits pointillés de la figure 2, aurait-on pu observer ces franges d'interférences ?

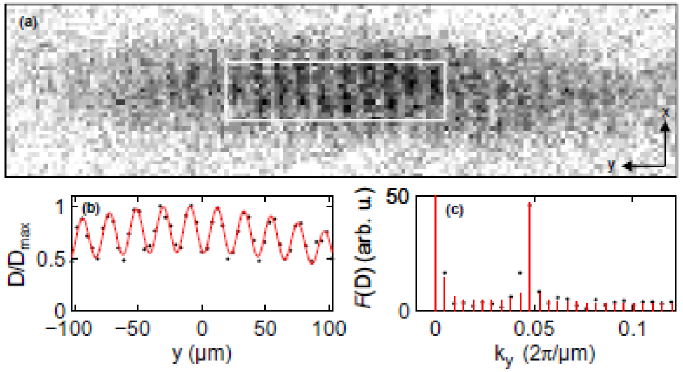


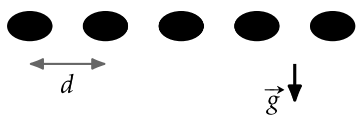
Figure 3 – La figure (a) est la photographie à l'instant où les deux condensats se rencontrent. La figure (b) représente le profil de la partie centrale. La figure (c) (pas nécessaire ici) représente la décomposition en série de Fourier de la courbe de la figure (b), k_y ayant la dimension d'un vecteur d'onde. Le signal représenté est proportionnel à la densité de probabilité de présence.

III Interférences dans un réseau de condensats

Dans cette nouvelle expérience, un condensat d'atomes de ^{87}Rb de masse m_{Rb} est découpé en plusieurs condensats situés chacun aux nœuds d'une onde stationnaire formée par deux faisceaux lasers.

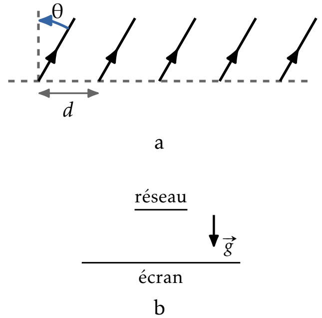
On désigne par d la distance entre deux neuds consécutifs. On coupe ensuite les dispositifs assurant le confinement des condensats et ceux-ci chutent librement sous l'effet du poids pendant une durée $\mathrm{T} = 22\,\mathrm{ms}$ avant qu'on n'en prenne une photographie. On réalise ainsi l'analogue de la diffraction de la lumière par un réseau.

Figure 4



III.1. On établit dans cette question la diffraction d'une onde optique par un réseau de pas d. L'onde incidente est monochromatique de longueur d'onde λ et on étudie la figure d'interférences sur un écran situé à la distance D du plan du réseau (voir la Figure 5b). On pourra admettre le résultat donné pour poursuivre.

Figure 5



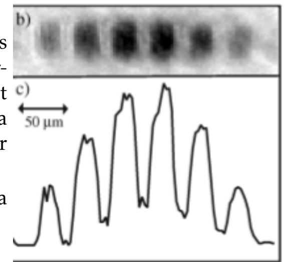
(a) Déterminer les directions θ dans lesquelles les interférences seront constructives (voir la Figure 5a).

(b) En déduire que si $\lambda/d \ll 1$, on pourra observer au centre de l'écran une figure d'interférences dont l'interfrange est $\lambda \mathrm{D}/d$.

III.2. (a) En considérant que la chute des condensats, initialement immobiles, peut être décrite classiquement, montrer brièvement que la distance D parcourue avant la prise d'image et la vitesse verticale v des condensats à cet instant ont pour expression :

$$\mathrm{D} = g\mathrm{T}^2/2 \qquad v = g\mathrm{T}.$$

(b) En déduire l'expression de la longueur de de Broglie à la fin de la chute en fonction de h, g, m_{Rb} et T. Calculer sa valeur.



(c) La figure ci-contre représente la distribution des atomes après une chute de durée T. Proposer une détermination de l'interfrange, en fonction des paramètres de la question précédente et $d = 2{,}7\,\mu\mathrm{m}$, en admettant qu'on peut utiliser les résultats de la question **III.1b**. Justifier que l'interfrange observé est supérieur à celui déterminé en utilisant la valeur de la question **III.2b**

(d) Proposer un calcul plus précis de l'interfrange. On n'effectuera pas le calcul.

III.3. La longueur d'onde des deux lasers utilisés pour former l'onde stationnaire découpant le condensat initial est $\lambda_b = 532\,\mathrm{nm}$. Quelle serait la distance entre deux nœuds consécutifs de l'onde stationnaire qu'ils réaliseraient s'ils étaient rigoureusement contrapropageant ? En déduire l'angle entre les deux faisceaux choisi dans l'expérience pour découper le condensat. On fera un schéma pour illustrer les notations.

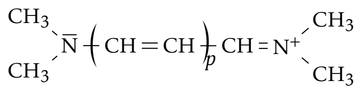
Références :

"Observation of interference between two molecular Bose–Einstein condensates", C.Kohstall et al., New Journal of Physics 13 (2011) 065027 (section II), "Interference of an Array of Independant Bose-Einstein Condensates", Z. Hadzibabic et al., Physical Review Letters 93 (2004) 180403-3 (section III).

Exercice 3 : Couleur de colorants moléculaires

On s'intéresse aux streptocyanines, des colorants organiques répandus.

Dans ces molécules, le motif CHCH est répété p fois, avec $p \in \mathbb{N}^{\star}$. Leur couleur varie du rouge (pour $p = 2$) au cyan (pour $p = 5$). On interprète ces résultats en étudiant l'état quantique des électrons. Une molécule possède en effet $2(p+1)$ électrons délocalisés entre les deux atomes d'azote N. On modélise cette zone par un puits quantique infini unidimensionnel.



Données : masse d'un électron $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, célérité de la lumière dans le vide $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, constante de Planck $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$.

1. (a) En admettant que toutes les liaisons C–C et C–N ont même longueur $a = 1{,}39 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$, déterminer la longueur ℓ_p sur laquelle les électrons sont susceptibles de se déplacer.

   (b) Établir l'énergie E_n du niveau d'énergie n (pour $n \in \mathbb{N}^{\star}$) dans un puits de longueur ℓ_p.

   (c) On peut placer au plus deux électrons dans un même niveau d'énergie. Quelle est la répartition des électrons délocalisés pour laquelle leur énergie totale est minimale ?

2. Lorsque la molécule absorbe un photon, un des électrons délocalisés change de niveau d'énergie pour un niveau d'énergie précédemment non occupé, la différence entre ces deux niveaux étant égale à l'énergie du photon.

   (a) Montrer que la plus grande longueur d'onde que la molécule peut absorber a pour expression :

   $$\lambda_{\max}(p) = \frac{8ma^2c}{h}\mathrm{F}(p),$$

   avec $\mathrm{F}(p)$ une fraction rationnelle en p.

   (b) Calculer $\lambda_{\max}(p)$ pour $p = 2$ et $p = 5$ et commenter.

Données : masse de l'électron $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, vitesse de la lumière dans le vide $c = 3{,}0 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, constante de Planck $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$.