Les valeurs numériques relatives à chaque problème ou exercice sont données en début d'énoncé.
Les sacs seront laissés devant le tableau. Conservez seulement de quoi écrire et une calculatrice : pas de téléphone !
Si vous ne comprenez pas une notation, une question, ou si vous pensez avoir découvert une erreur d'énoncé, signalez-le immédiatement.
Les circuits électriques seront étudiés dans l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires.

Problème 1 : Supercondensateur

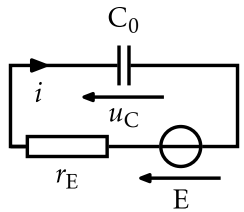
On étudie quelques applications industrielles de condensateurs de grande capacité. On note C_0 la capacité d'un de ces condensateurs.

Données :

- capacité d'un supercondensateur $C_0 = 3200\,\mathrm{F}$,
- tension maximale aux bornes d'un supercondensateur $U_{max} = 2{,}85\,\mathrm{V}$
- résistance d'un «module» $r_m = 10\,\mathrm{m\Omega}$.

I Dimensionnement d'un module

I.1. On considère un condensateur de capacité C_0 initialement déchargé aux bornes duquel on branche à l'instant $t = 0$ un générateur de tension de force électromotrice $E = 2\,\mathrm{V}$ et de résistance interne $r_E = 1\,\Omega$.



(a) Établir l'expression de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.

(b) En déduire la durée nécessaire pour avoir $u_c > 1{,}75\,\mathrm{V}$.

(c) Déterminer également l'expression de l'intensité $i(t)$ traversant le condensateur.

I.2. Rappeler l'expression de l'énergie électrostatique stockée dans un condensateur. En déduire la capacité C nécessaire pour stocker une énergie de $\mathcal{E}_n = 100\,\mathrm{MJ}$ quand la tension aux bornes du condensateur est $U_n = 500\,\mathrm{V}$.

I.3. (a) Déterminer la capacité de l'association série de deux condensateurs de capacités C_1 et C_2.

(b) Déterminer la capacité de l'association parallèle de deux condensateurs de capacités C_1 et C_2.

(c) En déduire comment brancher des supercondensateurs de capacité C_0 pour que leur association stocke l'énergie $\mathcal{E}_n$ quand la tension à ses bornes est U_n. On nomme «module» cette association et on note C_m sa capacité.

II Charge d'un module

II.1. On charge un «module» par un générateur de tension de force électromotrice $E = 500\,\mathrm{V}$ dont la résistance interne est $r_E = 1\,\Omega$.

(a) Déterminer l'ordre de grandeur de la durée de charge.

(b) Déterminer l'expression de la puissance fournie par le générateur lors de la charge et en déduire la puissance maximale qu'il doit pouvoir fournir.

(c) Déterminer l'expression de la puissance dissipée par effet Joule et en déduire l'instant où elle est égale à la moitié de la puissance fournie par le générateur.

II.2. Déterminer l'expression, en fonction de la capacité C_m, de la résistance r_E et de la tension E de l'énergie fournie par le générateur, notée $\mathcal{E}_E$ et calculer le quotient $\mathcal{E}_n/\mathcal{E}_E$. Commenter.

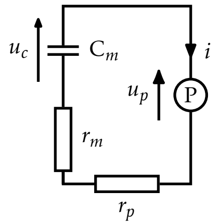
II.3. On charge d'abord le «module» par un générateur de tension E/2 puis quand la tension $u_C \simeq E/2$ on remplace ce générateur par un générateur de tension E.

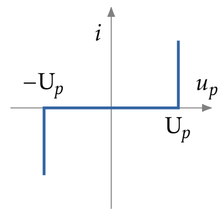
(a) Tracer l'allure de la tension u_C aux bornes du module au cours de ces deux étapes.

(b) Déterminer l'énergie totale fournie par les deux générateurs, notée $\mathcal{E}'_E$, et commenter. Quel défaut présente cette technique ?

III Alimentation d'un moteur

On modélise le module comme un condensateur de capacité C_m en série avec un résistor de résistance r_m. Le module est initialement chargé sous une tension de $E = 500\,\mathrm{V}$. On le branche à l'instant $t = 0$ sur un moteur électrique.





III.1. Dans un certain régime d'utilisation, la caractéristique du moteur noté P peut être modélisée par la caractéristique en convention récepteur du moteur sur la figure ci-dessus : elle est caractérisée par la tension $U_p < 500\,\mathrm{V}$. On considère qu'il possède de plus une résistance interne $r_p = 1\,\Omega$.

(a) Déterminer l'expression de la tension $u_c(t)$ et tracer l'allure de la courbe représentative de $u_c(t)$.

(b) Déterminer l'expression de la puissance reçue par le moteur, tracer son allure.

(c) Pour quelle valeur de U_p (en fonction de E) la puissance initiale est-elle maximale ? Calculer la valeur de ce maximum et commenter.

III.2. On peut également faire fonctionner le moteur de manière à ce que l'intensité du courant qui le traverse soit constante, en faisant varier U_p en fonction du temps. On note $I_p \geqslant 0$ l'intensité constante traversant alors le moteur.

(a) Déterminer dans ces conditions l'expression de $u_c(t)$ ainsi que celle de $U_p(t)$ correspondante. Tracer l'allure de leurs courbes représentatives ainsi que l'expression de la durée de fonctionnement.

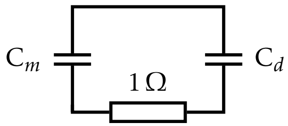
(b) Déterminer l'expression de la puissance reçue par le moteur en fonction du temps et tracer sa courbe représentative.

III.3. Décrire brièvement, en s'appuyant sur des allures de courbes, le fonctionnement si le moteur consomme désormais une puissance constante. On ne cherchera pas à résoudre l'équation différentielle.

IV Dépannage

On considère le cas où ce moteur alimente un véhicule. La tension de charge initiale est toujours $E = 500\,\mathrm{V}$. On met en service un véhicule de recharge mobile, équipé d'une cellule de deux «modules» branchés en parallèle, de capacité notée C_d.

Le véhicule de recharge mobile rejoint un véhicule équipé d'un «module» C_m, en panne car sa tension a chuté jusqu'à $80\,\mathrm{V}$. Le véhicule de recharge mobile branche son module sur celui d'un autre véhicule par l'intermédiaire d'un résistor de résistance $1\,\Omega$.

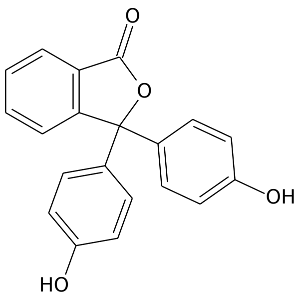


IV.1. Déterminer les tensions aux bornes de chacun des modules à l'issue de la recharge.

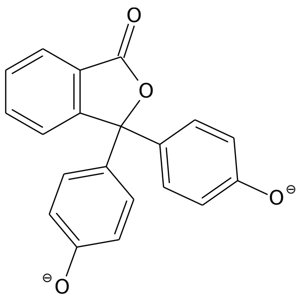
IV.2. Déterminer l'énergie dissipée par effet Joule lors de la recharge ainsi que la constante de temps de celle-ci.

Problème 2 : Cinétique de décoloration de la phénolphtaléine

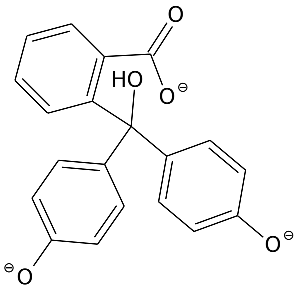
La phénolphtaléine est un indicateur coloré des solutions basiques. Sa forme acide (PH_2), prédominante pour $\mathrm{pH} \leqslant 9,4$, est en effet incolore, alors que sa forme basique (P^{2-}), prédominante pour $\mathrm{pH} \geqslant 9,4$, est rose. On considère donc que sa zone de virage est située entre $\mathrm{pH} = 8,4$ et $\mathrm{pH} = 10,4$.



PH_2, incolore, pour $\mathrm{pH} \leqslant 8,4$.



P^{2-}, rose, pour $\mathrm{pH} \geqslant 10,4$.



POH^{3-}, incolore, en milieu très basique.

La forme colorée P^{2-} se décolore cependant en milieu fortement basique en captant un ion hydroxyde OH^- selon la réaction :

$$P^{2-} + OH^- \xrightarrow{k} POH^{3-} \tag{1}$$

On cherche à vérifier que cette réaction admet les ordres m et n respectivement par rapport à OH^- et P^{2-}, *ie* que sa vitesse se met sous la forme :

$$v = k[OH^-]^m[P^{2-}]^n, \tag{2}$$

avec k sa constante de vitesse. On néglige dans un premier temps la formation de l'espèce POH^{3-}.

Données :

- Concentration de la solution de PH_2 : $c = 1,60 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$,
- Concentration de la solution mère de soude NaOH : $c_0 = 4,00 \cdot 10^{-1}\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$,

Toute l'étude s'effectuera au maximum d'absorption de P^{2-}, de longueur d'onde $\lambda = 550\,\mathrm{nm}$. On rappelle la formule de Beer-Lambert donnant l'absorbance, à la longueur d'onde λ, d'une solution contenant les espèces X_i, de coefficients d'absorption molaire $\varepsilon_i(\lambda)$, aux concentrations $[X_i]$ dans une cuve de longueur ℓ :

$$A(\lambda) = \ell \sum_i \varepsilon_i(\lambda)[X_i]. \tag{3}$$

I Détermination des ordres

On prépare une solution de soude en introduisant un volume $V_1 = 25\,\mathrm{mL}$ de la solution mère à la concentration c_0 dans une fiole jaugée de $100\,\mathrm{mL}$ qu'on complète avec de l'eau distillée. On ajoute ensuite à l'instant initial un volume $0,5\,\mathrm{mL}$ de la solution de phénolphtaléine. On observe que la solution se colore instantanément en rose. On étudie l'évolution temporelle de l'absorbance, notée A.

I.1. (a) Déterminer la concentration, notée c_1, de la solution en OH^- avant l'introduction de la phénolphtaléine.

(b) Déterminer la concentration de la solution en P^{2-} immédiatement après l'introduction de la phénolphtaléine en considérant la réaction de PH_2 avec OH^- totale et instantanée. On la note c_{P_1}. En déduire qu'on peut considérer $[OH^-] \simeq c_1$ après l'introduction de la phénolphtaléine. On fera cette approximation dans toute la suite.

I.2. On note x_V l'avancement volumique de la réaction (1). On note A_0 l'absorbance à l'instant initial et A_∞ sa valeur au bout d'un temps très long.

(a) Établir l'expression de l'absorbance à tout instant t, notée $A(t)$, en fonction entre autres de x_V, A_0 et A_∞.

(b) En déduire une équation différentielle vérifiée par A, ne faisant plus intervenir x_V.

(c) On suppose que l'ordre partiel par rapport à P^{2-} est $n = 1$. Résoudre l'équation différentielle de la question précédente.

(d) Même question en supposant désormais que $n = 2$.

I.3. La courbe de la figure 1 représente l'évolution de $\ln((A_0 - A_\infty)/(A(t) - A_\infty))$ en fonction du temps.

(a) Déduire de sa forme la valeur de l'ordre partiel n.

(b) En déduire l'allure de la courbe expérimentale de l'absorbance A en fonction du temps. On précisera en particulier le temps de ½-réaction.

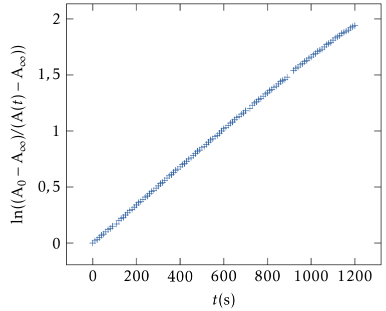


Figure 1 – Évolution de $\ln((A_0 - A_\infty)/(A(t) - A_\infty))$.

$[OH^-](\mathrm{mol\cdot L^{-1}})$	$2{,}00\cdot10^{-1}$	$3{,}00\cdot10^{-1}$	$4{,}00\cdot10^{-1}$
$\dfrac{\mathrm{d}\ln((A_0-A_\infty)/(A-A_\infty))}{\mathrm{d}t}(\mathrm{s^{-1}})$	$3{,}34\cdot10^{-3}$	$6{,}32\cdot10^{-3}$	$8{,}60\cdot10^{-3}$

TABLE 1 – Pentes pour différentes valeurs la concentration initiale en OH^-

I.4. On réalise les mêmes expériences avec des valeurs différentes de la concentration initiale en ions OH^-. On mesure à chaque fois la pente de la courbe représentative de $\ln((A_0-A_\infty)/(A(t)-A_\infty))$ en fonction du temps. Les résultats sont donnés dans la table 1.
Déduire de ces données la valeur de l'ordre m par rapport aux ions OH^- ainsi que celle de la constante de vitesse k.

II Une erreur de manipulation

Un élève maladroit a mal préparé ses solutions. Donner le temps de ½-réaction si :

II.1. la concentration initiale en OH^- est $4{,}00\cdot10^{-1}\,\mathrm{mol\cdot L^{-1}}$ et le volume de introduit de phénolphtaléine est 0,3 mL,

II.2. le volume de phénolphtaléine introduit est 0,5 mL et la concentration initiale en OH^- est $2{,}50\cdot10^{-1}\,\mathrm{mol\cdot L^{-1}}$.

III Réaction inverse

On prend désormais en considération la réaction inverse. L'ordre par rapport à POH^{3-} est supposé égal à 1 et on note k' sa constante de vitesse :

$$P^{2-} + OH^- \underset{k'}{\overset{k}{\rightleftharpoons}} POH^{3-}. \tag{4}$$

On étudie de nouveau l'expérience dans les conditions de la courbe de la figure 1.

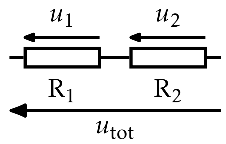
III.1. Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par l'absorbance.

III.2. Relier la pente de la courbe de la figure 1 aux constantes de vitesse k et k'.

III.3. Quelle autre grandeur devrait-on mesurer pour déterminer les valeurs de k et k' ?

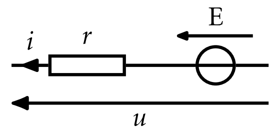
Problème 3 : Ponts de Wheatstone
I Généralités

I.1. On considère le dipôle ci-dessous, formé de l'association série de deux résistors de résistances R_1 et R_2.



Établir l'expression du quotient u_2/u_{tot} en fonction des résistances R_1 et R_2.

I.2. On considère le dipôle ci-dessous, formé de l'association série d'un générateur de tension idéal de force électromotrice E et d'un résistor de résistance r.



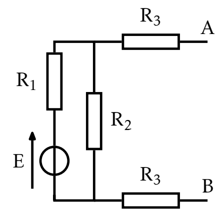
(a) Tracer sa caractéristique statique courant tension i, u. Donner l'expression de son courant électromoteur noté η.

(b) Donner la tension indiquée par un voltmètre idéal branché à ses bornes.

(c) Donner l'intensité indiquée par un ampèremètre idéal branché à ses bornes.

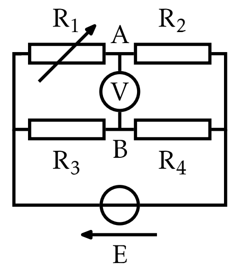
(d) On remplace le générateur de force électromotrice E par un fil : quelle est l'indication d'un ohmmètre branché à ses bornes.

I.3. On admet qu'on peut appliquer les résultats de la question **I.2** pour tout générateur linéaire. Déterminer la force électromotrice, le courant électromoteur et la résistance interne du générateur linéaire représenté ci-contre.



II Pont de Wheatstone

On considère le circuit de la figure ci-contre formé d'un générateur idéal de tension, de quatre résistors et d'un voltmètre. On considère dans un premier temps que la résistance du voltmètre est infinie.
Données : $\theta_0 = 250\,°\mathrm{C}$; $R_2 = R_3 = R_4 = 25\,\Omega$; $E = 6{,}0\,\mathrm{V}$.



II.1. (a) Déterminer l'expression de la tension U_{AB} en fonction de E et des résistances.

(b) En déduire que si $U_{AB} = 0$ les valeurs des résistances vérifient $R_1R_4 = R_2R_3$.

II.2. La résistance R_1 varie en fonction de la température θ (exprimée en °C) selon la loi :

$$R_1 = R_0(1 + \theta/\theta_0), \tag{5}$$

où θ_0 est une constante positive.

(a) Déterminer la valeur de R_0 pour que la tension U_{AB} soit nulle pour $\theta = 0\,°\mathrm{C}$. On suppose cette condition vérifiée dans toute la suite.

(b) Déterminer l'expression de U_{AB} en fonction entre autres de la température θ et calculer sa valeur pour $\theta = 15{,}0\,°C$.

II.3. (a) Utiliser les résultats de la question **I.2** pour déterminer la force électromotrice, le courant électromoteur et la résistance interne du dipôle entre les nœuds A et B, formé par le générateur et les résistors R_1, R_2, R_3 et R_4.

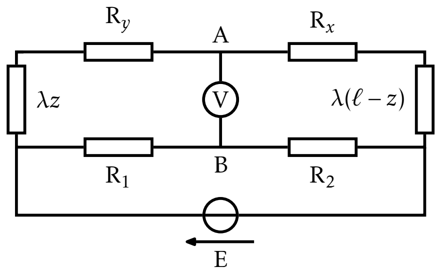
(b) On utilise un voltmètre analogique dont la résistance vaut $R_V = 2{,}0\,k\Omega$. Établir l'expression de la tension U_{AB} en fonction des résistances R_1, R_2, R_3, R_4, R_V et la tension E.

(c) On lit une température en utilisant l'expression du **II.2b**, *ie* sans tenir compte de la résistance R_V finie. Déterminer l'erreur relative commise lors de la mesure d'une température $\theta = 15\,°C$. Commenter.

III Pont de Carey Foster

Le voltmètre utilisé est de nouveau considéré idéal.

On étudie une variation du pont de Wheatstone adaptée à la mesure de faibles différences entre deux résistances. Le montage est représenté ci-contre : il utilise un potentiomètre dont la position z du curseur entre $z = 0$ et $z = \ell$ définit les résistances λz et $\lambda(\ell - z)$, avec λ la résistance par unité de longueur. On cherche cette fois à mesurer la différence $R_x - R_y$.



III.1. Déterminer l'expression de z en fonction des résistances pour laquelle la tension U_{AB} est nulle. On la note z_1.

III.2. On intervertit ensuite les résistors R_x et R_y. Déterminer la nouvelle expression de z pour laquelle la tension U_{AB} est nulle. On la note z_2. En déduire que la mesure de $z_2 - z_1$ donne accès à $R_x - R_y$. Quelle est la plus grande valeur de $R_x - R_y$ mesurable ?