

Les valeurs numériques relatives à chaque problème ou exercice sont données en début d'énoncé. Les sacs seront laissés devant le tableau. Conservez seulement de quoi écrire et une calculatrice : pas de téléphone !

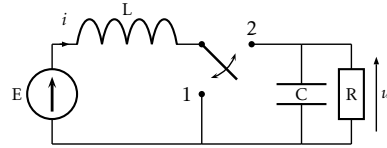
Si vous ne comprenez pas une notation, une question, ou si vous pensez avoir découvert une erreur d'énoncé, signalez-le immédiatement.

Les circuits électriques seront étudiés dans l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires.

Problème 1 : Étude d'un hacheur

Un hacheur est un dispositif réalisant un générateur de tension quasi-stationnaire u variable à partir d'un générateur de tension stationnaire E fixée. On utilise à cet effet un système de commutation périodique dans un circuit comportant entre autres un condensateur et une bobine.

On étudie ici le montage particulier, nommé « convertisseur boost » représenté ci-contre comportant une source idéale de tension stationnaire $E > 0$ et produisant une tension u quasi-stationnaire aux bornes de la résistance R d'utilisation. La période du système est T et on nomme α son rapport cyclique : pour la période $t \in [0; T]$, l'interrupteur est en position 1 pour $t \in [0; \alpha T]$ et en position 2 pour $t \in [\alpha T; T]$.



Dans toute la suite, l'intensité du courant traversant la bobine sera notée i et la tension aux bornes du condensateur sera notée u .

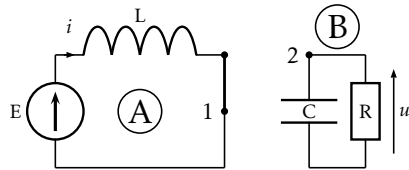
Les différentes parties du problème sont largement indépendantes.

I Étude générale

On étudie le comportement général de ce circuit suivant la position de l'interrupteur.

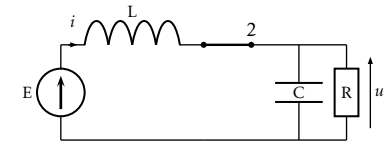
1. L'interrupteur est à l'instant $t = 0$ en position 1.

Le système est donc formé des deux circuits à une maille déconnectés A et B représentés ci-contre. La tension u aux bornes du condensateur à cet instant est notée U_0 et l'intensité du courant traversant la bobine est notée I_0 . On étudie l'évolution du système pour $t \in [0; \alpha T]$ jusqu'au basculement de l'interrupteur en position 2.

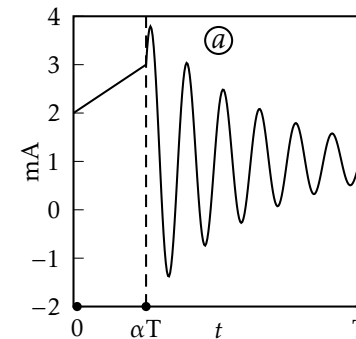


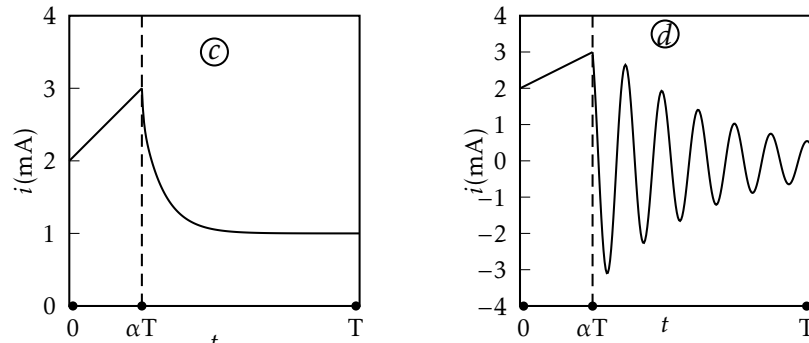
- Établir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité i dans le circuit A et en déduire l'expression de $i(t)$ en fonction de I_0, L, E et t . Déterminer en particulier l'expression de i à la fin de cette étape, quand $t = \alpha T$. On la note I_1 .
- Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u dans le circuit B et en déduire l'expression de $u(t)$ en fonction de U_0, R, C et t . Déterminer en particulier l'expression de u à la fin de cette étape, quand $t = \alpha T$. On la note U_1 .

2. À l'instant $t = \alpha T$, l'interrupteur bascule en position 2. Le système est alors celui représenté sur la figure ci-contre.



- Établir la nouvelle équation différentielle vérifiée par la tension u aux bornes du condensateur. On la mettra sous la forme : $\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 u_\infty$, avec ω_0, Q et u_∞ des constantes qu'on exprimera en fonction des constantes du problème.
 - Déterminer les valeurs de la tension u et de sa dérivée temporelle $\frac{du}{dt}$ immédiatement après la commutation, en $t = \alpha T^+$. On les exprimera entre autres à l'aide des valeurs U_1 et I_1 .
 - Déterminer de même les valeurs de l'intensité i et de sa dérivée temporelle $\frac{di}{dt}$ immédiatement après la commutation, en $t = \alpha T^+$. On les exprimera entre autres à l'aide des valeurs U_1 et I_1 .
 - À quelles conditions portant sur I_1, U_1 et les paramètres du circuit a-t-on $\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=\alpha T^+} < 0$ et $\left(\frac{du}{dt}\right)_{t=\alpha T^+} > 0$? On admet dans la suite que ces conditions sont vérifiées.
3. On admet que l'intensité i vérifie une équation différentielle de la même forme $\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \omega_0^2 i_\infty$ où ω_0 et Q ont la même valeur que précédemment.
- On propose plusieurs courbes représentant $i(t)$ sur la période $[0; T]$ pour un circuit tel que $Q = 10$. Déterminer laquelle correspond à la solution du problème en précisant pour chaque courbe incorrecte pourquoi elle ne convient pas.





(b) Représenter l'allure correspondante de la tension u aux bornes du condensateur pour le même circuit.

II Régime d'utilisation

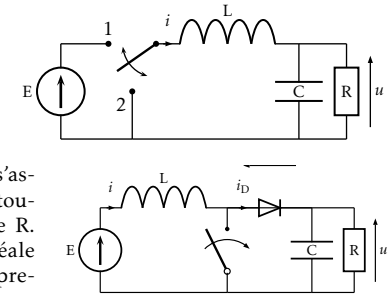
Afin que la tension u soit quasi-stationnaire, le hacheur est utilisé dans un régime où la période T de commutation est très petite devant les échelles de temps caractéristiques des circuits. On peut donc utiliser des approximations linéaires des variations de u et i durant chaque étape de la forme : $u(t) = u(t_0) + \left(\frac{du}{dt}\right)_{t=t_0} (t - t_0)$ et $i(t) = i(t_0) + \left(\frac{di}{dt}\right)_{t=t_0} (t - t_0)$.

- En utilisant les résultats du 2, mettre, pour $t \in [\alpha T; T]$ l'expression de l'intensité i sous la forme : $i(t) = I_1 + \alpha_{i2}(t - \alpha T)$, avec α_{i2} une constante qu'on exprimera entre autres en fonction de U_1 .
 - En utilisant les résultats du 2, mettre, pour $t \in [\alpha T; T]$ l'expression de la tension u sous la forme : $u(t) = U_1 + \alpha_{u2}(t - \alpha T)$, avec α_{u2} une constante qu'on exprimera entre autres, en fonction de I_1 et U_1 .
 - Mettre, pour $t \in [0; \alpha T]$ la tension u sous la forme : $u(t) = U_0 + \alpha_{u1}t$, avec α_{u1} une constante qu'on exprimera entre autres en fonction de U_0 . On pourra utiliser le développement limité à l'ordre 1 en $x = t/RC \ll 1$: $e^x = 1 + x + o(x)$.
- On suppose dans toute la suite qu'un régime périodique de période T est établi.
 - Que doivent valoir $u(T)$ et $i(T)$? En déduire les expressions de U_0 et U_1 en fonction de E, α et du quotient T/RC .
 - Calculer le taux d'ondulation défini par $\frac{U_0 - U_1}{U_0}$. Justifier qu'on peut réaliser ainsi une source de tension quasi-stationnaire qui élève la tension de la source idéale E . On ne cherchera pas à calculer I_0 et I_1 pour l'instant.
- Exprimer l'énergie électrique W_{L1} reçue par la bobine sur l'intervalle $[0; \alpha T]$ et l'énergie W_{L2} qu'elle reçoit pendant l'intervalle $[\alpha T; T]$ en fonction entre autres de I_1 et I_0 . Que vaut la somme $W_{L1} + W_{L2}$ quand le régime périodique est établi? Que vaut la somme $W_{C1} + W_{C2}$ des énergies électriques reçues par le condensateur dans les mêmes conditions.
 - En déduire une relation entre l'énergie électrique $\mathcal{E}_g$ fournie par le générateur et l'énergie électrique reçue par le résistor pendant une période.

- Exprimer l'énergie $\mathcal{E}_g$ en fonction de E, T , et de la valeur moyenne de l'intensité i , qu'on note I_{moy} . On rappelle que la valeur moyenne d'une grandeur $X(t)$ sur une période T est $X_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt$.
- On considère T/RC suffisamment petit pour considérer u stationnaire. En déduire I_{moy} en fonction de E, α et R puis I_0 et I_1 (on justifiera brièvement que $I_{\text{moy}} = \frac{I_0 + I_1}{2}$). À quelle condition portant sur R l'intensité i est-elle toujours positive?

III Réalisation expérimentale

- On admet que le montage ci-contre permet également de réaliser une source quasi-stationnaire de tension $U > 0$. Montrer que cette fois-ci $U < E$. On commencera par justifier que la décroissance du courant se produit quand l'interrupteur est dans la position 2.
- On revient au premier montage pour lequel on souhaite s'assurer que l'intensité i du courant traversant la bobine est toujours positive, quelle que soit la valeur de la résistance R . Montrer que le montage ci-dessous utilisant une diode idéale et un interrupteur simple réalise cette condition pour le premier montage « convertisseur Boost ».



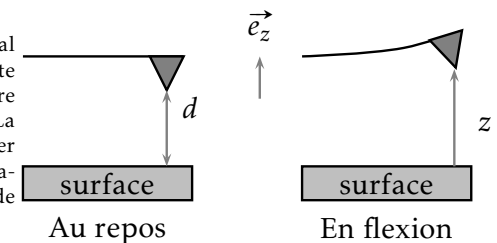
La diode est caractérisée par :

- $i_D = 0$ quand $u_D \leq 0$: diode bloquante,
- $u_D = 0$ quand $i_D \geq 0$: diode passante.

On vérifiera en particulier que la diode est bloquante quand l'interrupteur est fermé.

Problème 2 : Hystérésis dans un microscope à force atomique

Le microscope à force atomique est un capteur local et ultra-sensible de force. Il est formé d'une pointe fine fixée à l'extrémité d'un levier souple, dont l'autre extrémité est fixe, modélisable comme un ressort. La pointe mobile est approchée de la surface à étudier qui exerce sur elle une force provoquant la déformation du levier. On étudie cette déformation à partir de la réflexion d'un faisceau laser.



On s'intéresse dans ce problème au mode de fonctionnement dit résonant, dans lequel la pointe est excitée par une force périodique de fréquence proche de la fréquence de résonance du système levier-pointe seul. L'interaction de la pointe avec la surface modifie l'amplitude de vibration. La mesure de cette amplitude en différents points de la surface donne accès à sa topographie.

Le levier est suffisamment long pour que le mouvement de la pointe puisse être considéré purement vertical. Sa position est repérée par son altitude $z > 0$ à partir de la surface. On note d la distance séparant la pointe de la surface lorsque la pointe est à l'équilibre, en l'absence de forces externes.

I Mouvement de la pointe loin de la surface

Loin de la surface la pointe est modélisée par un oscillateur mécanique constitué d'une masse ponctuelle m , soumise :

- à une force de rappel élastique $-k(z-d)\vec{e}_z$, avec $k > 0$,
- à un amortissement modélisé par une force de frottement fluide linéaire : $-\lambda\dot{z}\vec{e}_z$, avec $\lambda > 0$,
- à une force d'excitation selon Oz, sinusoïdale : $\vec{f} = f_0 \cos(\omega t)\vec{e}_z$.

On négligera le poids dans tout le problème.

- (a) Écrire l'équation différentielle d'évolution de z . On posera $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $Q = \frac{m\omega_0}{\lambda}$, $a_m = \frac{Qf_0}{m\omega_0^2}$ et $u = \frac{\omega}{\omega_0}$. On donnera les dimensions de Q , a_m , ω_0 et u .
(b) Calculer la fréquence propre $\nu_0 = \omega_0/(2\pi)$ pour $m = 5,0 \cdot 10^{-11}$ kg et $k = 20$ N · m⁻¹.
- (a) On note, en régime sinusoïdal permanent, la solution sous la forme $z(t) = d + a \cos(\omega t + \varphi)$, avec a un réel positif. Déterminer l'expression de $a(u)$ en fonction de u , Q et a_m . On utilisera la fonction complexe $t \mapsto d + ae^{j(\omega t + \varphi)}$.
(b) Étudier la courbe $a(u)$ et tracer son allure pour différentes valeurs remarquables de Q .

Les valeurs typiques de Q sont de quelques centaines. On prendra $Q = 400$ dans toute la suite. De plus, toute l'étude s'effectuant au voisinage de la résonance, on utilisera l'approximation :

$$a(u) \simeq \frac{a_m}{\sqrt{1 + Q^2(1 - u^2)^2}}.$$

II Réponse près de la surface

Lorsque la pointe est rapprochée de la surface, elle est soumise à une force¹ additionnelle verticale attractive et donnée par $\vec{F}(z) = F_z(z)\vec{e}_z$, avec $F_z(z) = -\frac{K}{z^2}$ où K est une constante positive qui dépend de la nature et de la géométrie des matériaux. En effectuant l'hypothèse d'oscillations de faible amplitude, ie pour $z - d \ll d$, on adopte pour $F(z)$ la forme approchée suivante :

$$F_z(z) \simeq A + B(z-d) + C(z-d)^2 + D(z-d)^3. \quad (1)$$

- On posera $z = Z + d$, avec $Z \ll d$. Expliciter, au moyen d'un développement limité en $Z \ll d$, les quatre coefficients A, B, C et D du développement en fonction de K et d . **On pourra poursuivre les interprétations de cette partie même si les coefficients n'ont pas été déterminés numériquement.**

i. Cette force est due aux interactions dites de Van der Waals.

On étudie tout d'abord l'effet des deux premiers termes de l'expression 1.

- (a) Établir l'équation différentielle d'évolution de Z .
(b) Décrire l'effet du terme B sur les oscillations forcées de la pointe. Exprimer la valeur de cet effet en fonction de K , m et d puis calculer sa valeur pour $d = 15$ nm et $K = 5,0 \cdot 10^{-28}$ N · m⁻².
(c) Décrire de même l'effet du terme A. Calculer numériquement cet effet pour les données précédentes.
- Pour des amplitudes d'oscillation plus importantes, les termes non linéaires CZ^2 et DZ^3 de l'expression 1 ne sont plus négligeables. Cependant la valeur élevée de Q assure que, au voisinage de la résonance, l'oscillation forcée reste pratiquement sinusoïdale à la pulsation excitatrice ω : on peut écrire $Z = a \cos(\omega t + \varphi)$. Justifier brièvement que ces termes non linéaires entraînent l'apparition d'harmoniques à des pulsations différentes de ω dont on donnera les expressions en fonction de ω .

III Réponse non linéaire aux fortes amplitudes

On effectue maintenant une expérience d'approche-retrait : la pointe en vibration est rapprochée puis éloignée de la surface. Les déplacements sont toujours supposés être verticaux. On observe ainsi l'influence croissante puis décroissante de la force exercée par la surface sur la pointe. Dans ces expériences, l'amplitude d'oscillation est importante et la pointe s'approche très près de la surface : la forme approchée 1 n'est plus utilisable et il est nécessaire de reprendre la forme « exacte » : $F_z(z) = -\frac{K}{z^2}$.

- Écrire l'équation différentielle d'évolution de Z avec cette expression.

À d fixé, on observe que le mouvement de l'oscillateur demeure pratiquement harmonique : $Z(t) = a \cos(\omega t + \varphi)$. La force F_z est donc périodique en $\omega t + \varphi$ et décomposable en série de Fourier. On admettra que le terme fondamental en ω joue un rôle prédominant. On donne son expression :

$$F_z(z) \simeq \frac{2Ka}{(d^2 - a^2)^{3/2}} \cos(\omega t + \varphi).$$

- (a) Montrer que l'amplitude a et la distance d sont reliées, pour u fixé, par :

$$a^2 \left(Q^2 \left[1 - u^2 - \frac{\alpha}{(d^2 - a^2)^{3/2}} \right]^2 + u^2 \right) = a_m^2,$$

avec α une constante positive qu'on exprimera en fonction des données du problème.

- On introduit les variables adimensionnées $\tilde{a} = a/a_m$, avec $\tilde{a} \leq 1$ et $\tilde{d} = d/a_m$. Montrer que ces variables sont liées par :

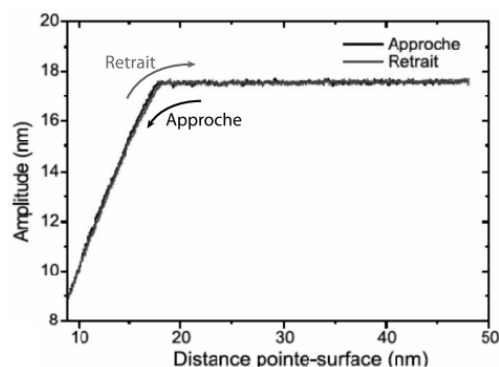
$$\tilde{d}^2 = \tilde{a}^2 + \left(\frac{\beta Q}{Q(1 - u^2) \pm \sqrt{1 - \tilde{a}^2 - u^2}} \right)^{2/3}, \quad (2)$$

avec β une constante qu'on exprimera en fonction de K , k et a_m et dont on donnera la valeur pour $K = 5,0 \cdot 10^{-28}$ N · m⁻², $k = 20$ N · m⁻¹ et en prenant $a_m = 14$ nm.

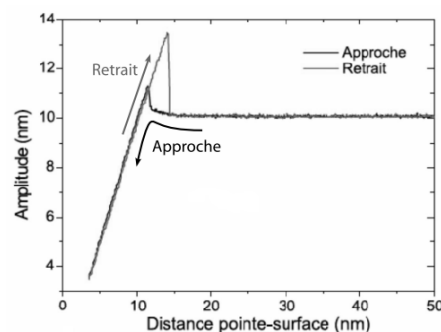
Dans toute la suite, on prendra $(\beta Q)^{2/3} = 4,0 \cdot 10^{-2}$ et on remplacera $\sqrt{1 - \tilde{a}^2 - u^2}$ par $\sqrt{1 - \tilde{a}^2 - 1}$.

3. La figure ci-contre montre une courbe d'approche-retrait, la pointe étant excitée à sa pulsation de résonance libre $\omega = \omega_0$.

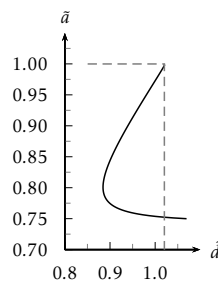
- Simplifier l'expression (2) pour $\omega = \omega_0$ et en déduire que $\tilde{d}$ est une fonction croissante de $\tilde{a}$. Préciser les valeurs limites de $\tilde{a}$ pour $\tilde{d} \rightarrow 0$ et $\tilde{d} \rightarrow \infty$.
- Le calcul numérique montre que $(\tilde{d} - \tilde{a})$ reste inférieur à 0,04 pour $0,2 < \tilde{d} < 0,99$. En déduire qu'on peut ainsi modéliser le graphe de $\tilde{a}(\tilde{d})$ par deux portions de droites, comme on l'observe sur la courbe du 3



Pour une excitation à une pulsation inférieure à celle de résonance libre, soit $\omega < \omega_0$, la courbe d'approche retrait présente un phénomène d'hystérésis : des sauts brusques de l'amplitude d'oscillation se produisent pour des distances d différentes lors de l'approche et lors du retrait, comme illustré sur la figure ci-contre.



- Calculer u pour avoir $Q(1 - u^2) = 0,9$.
 - Le graphe de $\tilde{a}(\tilde{d})$, comme celui de $\tilde{d}(\tilde{a})$, comporte deux branches, désignées Γ_+ et Γ_- , correspondant respectivement aux signes + et - du signe du dénominateur de la parenthèse de (2). Pour quelle valeur de $\tilde{a}$ ces deux branches se rejoignent-elles? Quelle est la valeur de $\tilde{d}$ correspondante?
 - Justifier brièvement que la branche Γ_+ peut être modélisée par un segment de droite que l'on précisera.
 - Calculer, pour la branche Γ_- , la valeur de $\tilde{a}$ correspondant aux grandes valeurs de $\tilde{d}$. Calculer la valeur $\tilde{d}_1$ correspondant à $\tilde{a} = 0,75$. En déduire l'allure de cette branche pour $\tilde{d} > \tilde{d}_1$.
 - Pour $\tilde{a} > 0,75$, le graphe de la branche Γ_- est donné ci-dessous. Rassembler sur un dessin les graphes des deux branches et en déduire une interprétation des courbes expérimentales et de l'hystérésis qui s'y manifeste.



Exercice 1 : Structures électroniques

- Écrire la structure électronique la plus stable des atomes suivants (le nombre en indice est le nombre de charge).



- Donner les quatre nombres quantiques qui désignent l'état de l'électron célibataire des atomes suivants dans l'état fondamental :

