Les sacs seront laissés devant le tableau. Conservez seulement de quoi écrire et une calculatrice : pas de téléphone !
Si vous ne comprenez pas une notation, une question, ou si vous pensez avoir découvert une erreur d'énoncé, signalez-le immédiatement.
Les circuits électriques seront étudiés dans l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires.
En régime sinusoïdal établi à la pulsation ω, on associera à une tension $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ d'amplitude U_m et de phase φ, la tension exponentielle complexe :

$$\underline{u}(t) = \underline{U_m} e^{j\omega t} = U_m e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Problème 1 : Circuit à retard

On étudie des circuits permettant de retarder un signal électrique. Les trois sections suivantes sont relativement indépendantes.

I Étude fréquentielle

I.1. On considère dans un premier temps le circuit représenté sur la figure 1, utilisé en sortie ouverte. L'entrée du filtre est la tension $u_e(t)$, la sortie est $u_s(t)$.

(a) Déterminer la nature du filtre, en utilisant les modèles équivalents.

(b) Établir sa fonction de transfert, notée $\underline{H_1} = \underline{U_{sm}}/\underline{U_{em}}$.

(c) Tracer soigneusement son diagramme de Bode en gain : en dB en fonction du logarithme de la pulsation ω. On déterminera les équations des asymptotes et la pulsation de coupure à $-3\,\text{dB}$ notée ω_{c1}.

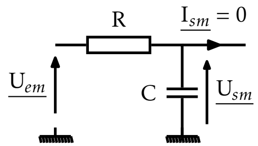

Figure 1

(d) Calculer la fréquence f_{c1} correspondant à ω_{c1} pour $R = 20\,\text{k}\Omega$ et $C = 10\,\text{nF}$.

I.2. On considère ensuite le circuit représenté sur la figure 2.

(a) Déterminer la nature du filtre, en utilisant les modèles équivalents.

(b) Établir sa fonction de transfert, notée $\underline{H_2} = \underline{U_{sm}}/\underline{U_{em}}$. On la mettra sous la forme :

$$\underline{H_2} = \frac{H_{20}}{1 + \frac{j\omega}{Q\omega_{02}} - \left(\frac{\omega}{\omega_{02}}\right)^2}, \qquad (1)$$

en identifiant une pulsation caractéristique ω_{02} et un facteur de qualité Q.

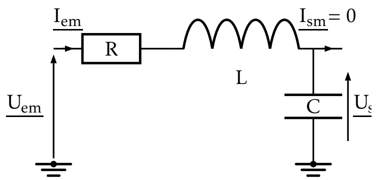

Figure 2

(c) Établir comme à la question **I.1c** son diagramme de Bode pour $Q = 0{,}200$ et $Q = 5$. On étudiera en particulier l'existence d'un éventuel maximum local.

(d) Calculer les valeurs de la fréquence f_{02} correspondant à ω_{02} et du facteur de qualité Q_2 pour $R = 100\,\Omega$, $L = 50\,\text{mH}$ et $C = 10\,\text{nF}$.

I.3. On étudie enfin le filtre représenté sur la figure 3

(a) Déterminer la nature du filtre, en utilisant les modèles équivalents.

(b) Établir sa fonction de transfert, notée $\underline{H_3} = \underline{U_{sm}}/\underline{U_{em}}$. On la mettra sous la forme :

$$\underline{H_3} = \frac{H_{30}}{1 + \alpha(j\omega) + \beta(j\omega)^2 + \gamma(j\omega)^3}. \qquad (2)$$

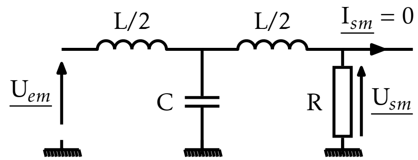

Figure 3

II Retard temporel en régime sinusoïdal établi

II.1. (a) Déterminer l'expression de la phase de la fonction de transfert $\underline{H_1}$ et préciser son signe. Commenter.

(b) Le signal u_e est sinusoïdal, d'amplitude $U_e = 1{,}00\,\text{V}$ et sa fréquence est $f_1 = 1\,\text{kHz}$. Représenter sur l'oscillogramme de la figure 7 l'allure de U_e et U_s pour les paramètres de la question **I.1d**. On précisera en particulier les calibres horizontal et verticaux choisis.

II.2. (a) Déterminer l'expression de la phase de la fonction de transfert $\underline{H_2}$ et préciser son signe. Commenter.

(b) L'amplitude du signal est $U_e = 1{,}00\,\text{V}$ et sa fréquence est désormais $f_1 = 7\,\text{kHz}$. Représenter sur l'oscillogramme de la figure 8 l'allure de U_e et U_s **I.2d**. On précisera en particulier les calibres horizontal et verticaux choisis.

II.3. Le filtre recherché doit retarder le signal d'entrée d'une durée fixée, notée τ. Pour un signal d'entrée $u_e(t)$, le signal de sortie doit donc être :

$$u_s(t) = u_e(t - \tau). \qquad (3)$$

(a) Déterminer pour un signal sinusoïdal de pulsation ω, en notation complexe, la fonction de transfert correspondant à la relation (3) *ie* le quotient $\underline{U_{sm}}/\underline{U_{em}}$. On la note $\underline{H_r}(j\omega)$.

(b) Établir les développements limités à l'ordre 1 en ω pour $\omega \to 0$ de $\underline{H_r}$ et $\underline{H_1}$. En déduire comment choisir les paramètres du circuit de la figure 1 pour réaliser le retard τ. Pour quel domaine de pulsations cette fonction est-elle réalisée ?

II.4. On cherche à améliorer le dispositif précédent en utilisant le filtre de la figure 2.

(a) Établir les développements limités à l'ordre 2 en ω pour $\omega \to 0$ de $\underline{H_r}$ et $\underline{H_2}$.

(b) En déduire comment choisir les paramètres du circuit de la figure 2 pour réaliser le retard τ. Quelle est alors la valeur du facteur de qualité Q ?

On rappelle les développements limités pour $|x| \ll 1$, dont on admet qu'ils sont également valables pour $x \in \mathbb{C}$.

$$e^x \simeq 1 + x + \frac{x^2}{2} \qquad \frac{1}{1-x} \simeq 1 + x + x^2. \qquad (4)$$

III Utilisation du filtre de la figure 3 en cascade

On envisage enfin d'utiliser le filtre de la figure 3.

III.1. (a) Établir le développement limité à l'ordre 2 en ω pour $\omega \to 0$ de $\underline{H_3}$.

(b) En déduire comment choisir les paramètres du circuit de la figure 3 pour réaliser le retard τ.

(c) Pour $R = 500\,\Omega$, calculer les valeurs de L et C pour réaliser un retard de $10\,\mu s$.

(d) Déterminer l'expression de l'impédance d'entrée du filtre de la figure 3 et en donner une approximation dans le régime de fréquence où ce filtre réalise la fonction de l'équation (3).

III.2. On considère enfin le circuit de la figure 4 utilisant une cascade de n cellules identiques au montage de la figure 3. Les paramètres L C et R vérifient les conditions déterminées à la question **III.1b**.

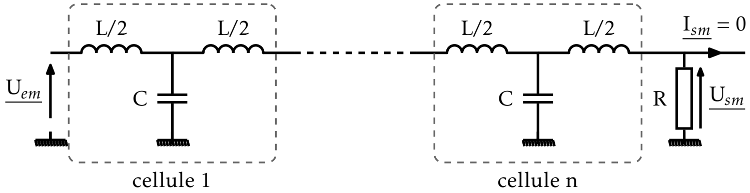

Figure 4

(a) Justifier soigneusement mais sans calcul, que ce montage réalise la fonction de l'expression (3), avec un nouveau retard τ' qu'on exprimera en fonction de τ.

(b) Calculer, pour $R = 500\,\Omega$, les valeurs de L et C pour réaliser un retard de $100\,\mu s$ pour un montage à $n = 10$ cellules. Conclure quant à l'intérêt de ce montage par rapport à un montage à 1 cellule.

Problème 2 : Transport optimal

On cherche à déplacer un point matériel lié à un ressort entre deux points sans y exciter d'oscillations. On note M sa position et m sa masse. On y attache un ressort idéal de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, comme représenté sur la figure 5. L'autre extrémité du ressort est notée A.

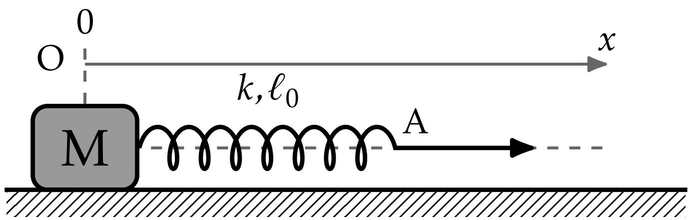

Figure 5

Le point matériel est en mouvement unidimensionnel sur un support. On note $x(t)$ son abscisse et $x_A(t)$ celle de l'extrémité A du ressort. À l'instant initial la masse M est immobile en $x = 0$ et la position du point A, d'abscisse notée x_{Ai} est telle que la longueur du ressort est ℓ_0.

On modélise les frottements par une force $\overrightarrow{F}_f = -\lambda \dot{x}\overrightarrow{e_x}$ avec λ une constante positive.

On souhaite déplacer la masse d'une distance D de telle sorte qu'elle demeure immobile en $x = D$ *ie* qu'elle n'oscille pas autour de la position $x = D$ à l'issue du transport. On dit alors que le transport de la masse M est «optimal».

I Déplacement brusque

I.1. Montrer qu'au cours du mouvement de A l'abscisse x de la masse obéit à une équation différentielle de la forme :

$$\ddot{x}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \alpha x_A(t) + \beta, \tag{5}$$

avec ω_0, Q, α et β des constantes qu'on exprimera en fonction des données du problème.

I.2. On considère que le point A est instantanément déplacé de la distance D à l'instant $t = 0$ puis y demeure immobile. Déterminer la nature du mouvement de x pour $Q < 1/2$. Tracer sans calculs l'allure de $x(t)$ correspondante. On soulignera en les justifiant les propriétés de continuité et dérivabilité éventuelles de $x(t)$. Le transport est-il alors optimal ?

I.3. (a) Déterminer la nature du mouvement de x pour $Q > 1/2$ puis l'expression de $x(t)$ pour $t > 0$, toujours pour un déplacement instantané de A.

(b) Tracer l'allure de $x(t)$. Préciser sans calcul l'ordre de grandeur de l'amplitude des oscillations dans le cas $Q \gg 1$.

On se place dans toute la suite dans le cas $\lambda = 0$.

II Déplacement à vitesse constante

Le déplacement s'effectue désormais à vitesse constante v_0 : l'extrémité A se déplace pendant une durée T à la vitesse v_0 puis s'immobilise.

II.1. (a) Préciser la valeur de v_0 en fonction de D et T et donner l'expression de $x_A(t)$ à l'aide de v_0.

(b) Déterminer l'expression de $x(t)$ pour $t \in [0, T]$.

(c) En déduire la (les) valeurs de la vitesse v_0 pour réaliser un transfert optimal sur une distance D.

III Déplacement quelconque

On considère un déplacement quelconque du point A, caractérisé par son accélération $\ddot{x}_A(t)$.

III.1. Vérifier que l'expression suivante de $x(t)$ est solution des équations du mouvement :

$$x(t) = x_A(t) - \ell_0 + \frac{1}{\omega_0}\int_{t'=0}^{t} \sin\left(\omega_0(t'-t)\right)\ddot{x}_A(t')\,\mathrm{d}t' \tag{6}$$

III.2. On considère un mouvement du point A de durée T tel que :

- $\ddot{x}_A(t) = a$ pour $t \in [0; T/2]$,
- $\ddot{x}_A(t) = -a$ pour $t \in [T/2, T]$,
- A immobile pour $t \geqslant T$,

avec a une constante positive.

(a) Déterminer l'expression de a en fonction de D et T.

(b) Déterminer l'expression de $x(t)$ pour $t > T$. En déduire la condition vérifiée par T pour que M demeure immobile en $x = D$ pour $t \geqslant T$.

Exercice 1 : Pédale Wah-Wah

On étudie une pédale d'effet pour guitare électrique nommée «pédale wah-wah». Elle réalise un filtrage accordable du signal électrique produit par la guitare. Les courbes de la figure 6 présentent le spectre du signal électrique produit en grattant toujours la même corde.

La courbe (a) correspond au signal sans filtrage, les courbes (b) et (c) correspondent à deux configurations différentes du filtre.

1. Déterminer la fréquence fondamentale de vibration de la corde.
2. Mesurer le gain du filtre pour les harmoniques de la vibration fondamentale de la corde pour chacune des deux configurations du filtre et reporter ces valeurs sur le gabarit de la figure 9. En déduire l'allure des diagrammes de Bode correspondant.
3. Proposer un filtre correspondant (éventuellement partiellement) à ces observations. On précisera sa nature et ses éléments caractéristiques (fréquence caractéristique, bande passante à $-3\,$dB...).

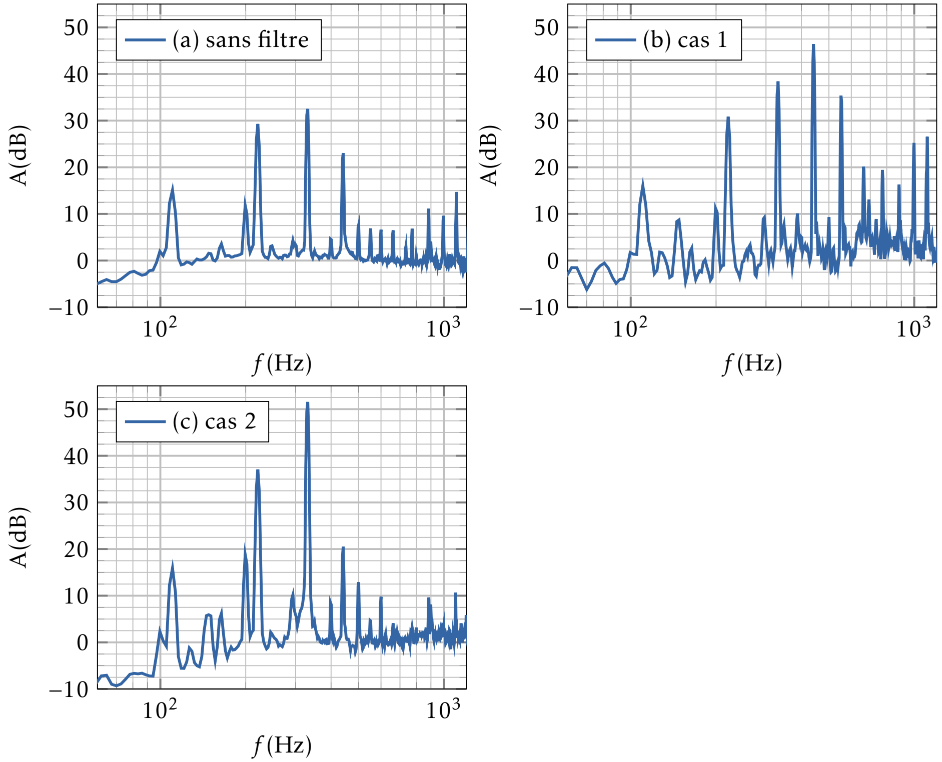

FIGURE 6 – Spectres obtenus par transformation de Fourier rapide. Pour un signal d'amplitude U, l'amplitude A en dB est $A = 20\log(U/U_{ref})$, avec U_{ref} une tension de référence.

À rendre avec la copie. Nom :

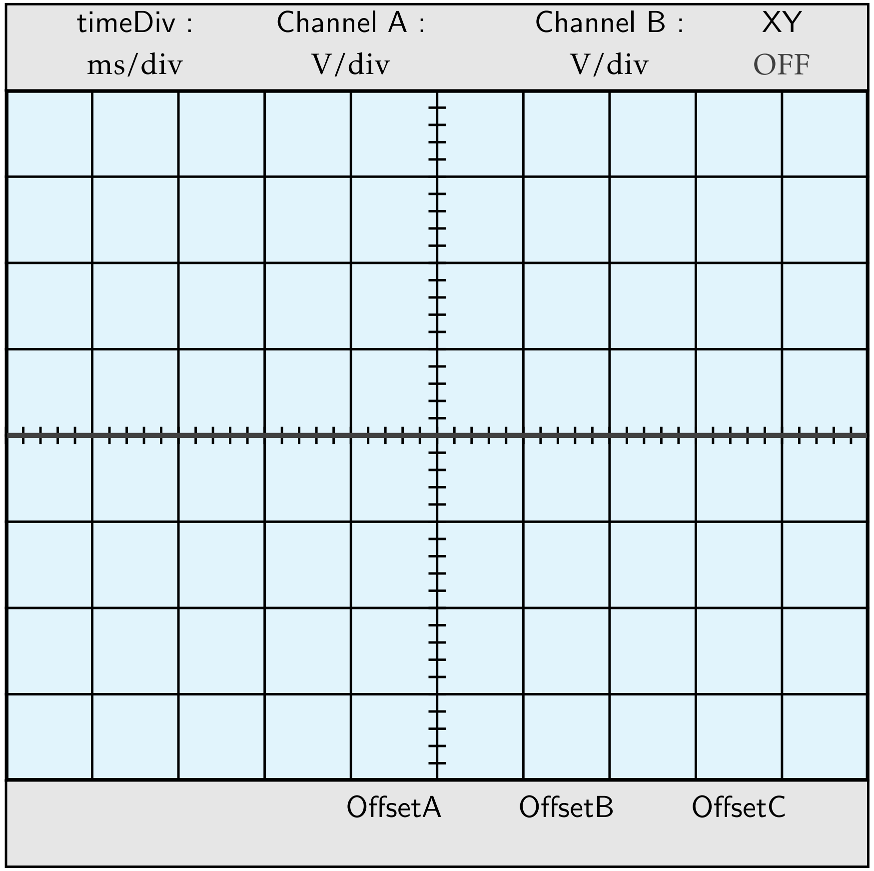

Figure 7 – Pour la question **II.1b** du problème 1.

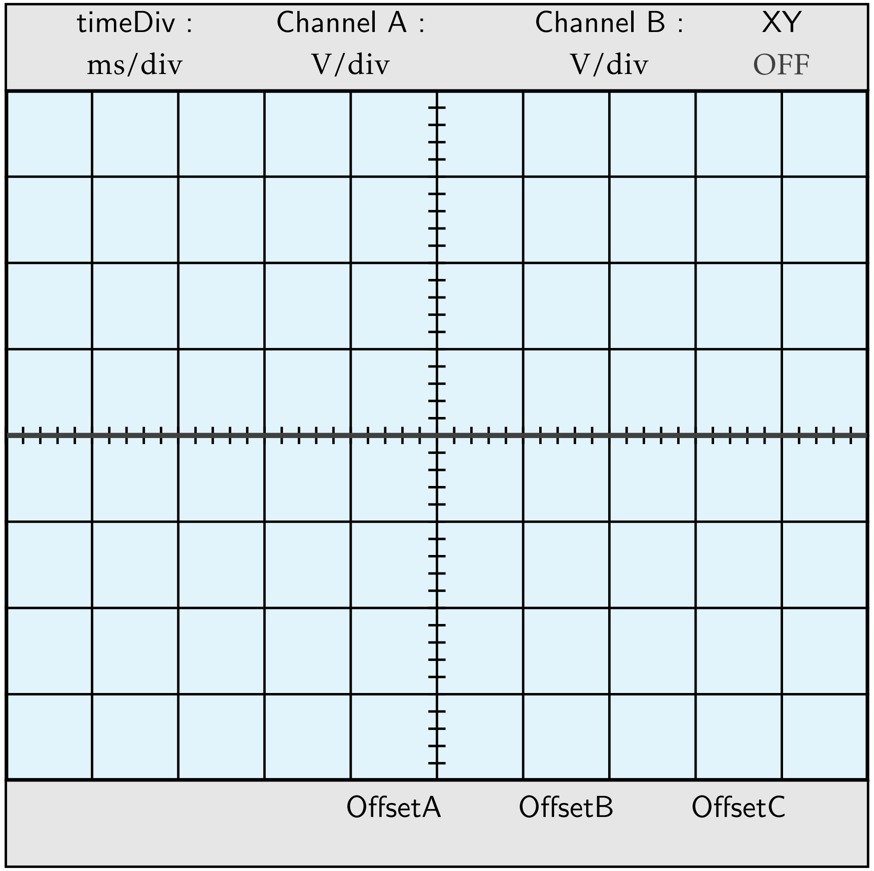

Figure 8 – Pour la question **II.2b** du problème 1.

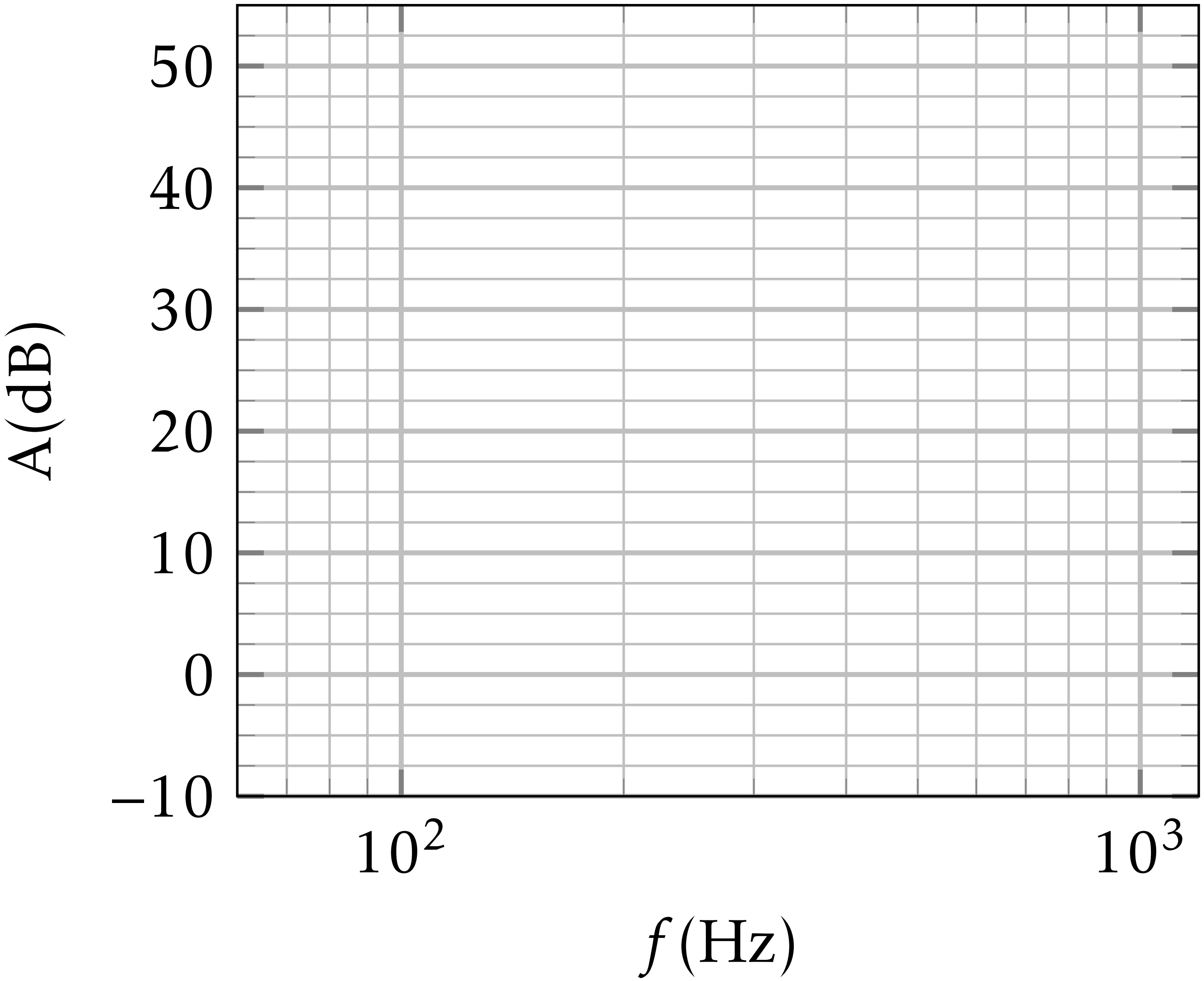

Figure 9 – Pour la question2 de l'exercice.