

Les sacs seront laissés devant le tableau. Conservez seulement de quoi écrire et une calculatrice : pas de téléphone !

Si vous ne comprenez pas une notation, une question, ou si vous pensez avoir découvert une erreur d'énoncé, signalez-le immédiatement.

Le référentiel terrestre sera considéré galiléen durant toute la durée des phénomènes étudiés.

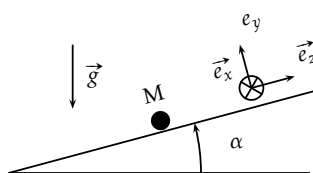
## Problème 1 : Lancer d'une boule de flipper

On modélise un flipper (jeu d'adresse de bar) comme un plan incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale. On y étudie le mouvement plan et sans frottement d'une bille de masse  $m$  assimilée à un point matériel de position M. On désignera par  $\vec{g}$  l'accélération de la pesanteur, considérée uniforme.

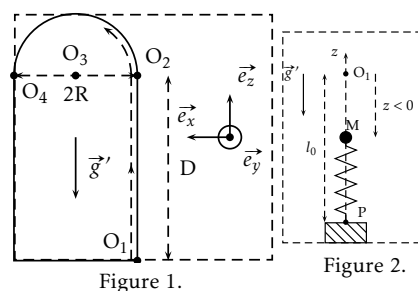
**Données :** masse de la bille  $m = 10,0\text{g}$ , accélération de la pesanteur  $g = 9,80\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ , inclinaison du plan  $\alpha = 15^\circ$ , raideur du ressort  $k = 20\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ , longueur de la trajectoire rectiligne  $D = 1,00\text{m}$ , rayon de la trajectoire hémicirculaire  $R = 20\text{cm}$ .

### I Poids apparent

- I.1. On oriente le plan du flipper par les vecteurs unitaires  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_z$  définis sur le schéma ci-contre. On y définit également le vecteur unitaire  $\vec{e}_y$  orthogonal au plan. Déterminer les forces auxquelles est soumise la bille de position M. En déduire que la résultante des forces dans le plan ( $\vec{e}_x, \vec{e}_z$ ) se met sous la forme  $m\vec{g}' = -mg'\vec{e}_z$ , avec  $g'$  une constante positive exprimée en fonction de  $g$  et  $\alpha$ . La bille est ainsi soumise, dans le plan du flipper, à un poids apparent  $m\vec{g}'$ .



On représente le plan du flipper sur la figure 1. La bille est lancée du point  $O_1$  et suit une trajectoire rectiligne de longueur  $D$  jusqu'en  $O_2$ , puis une trajectoire circulaire de centre  $O_3$  et de rayon  $R$  au contact d'un guide hémicirculaire.



### II Propulsion

- II.1. La bille est initialement posée à l'extrémité d'un ressort idéal de longueur à vide  $l_0$  et de raideur  $k$ , dont une extrémité est fixée au point P situé à  $l_0$  du point  $O_1$ , comme représenté sur la figure 2. On pose  $\overline{O_1M} = z$ , négatif quand le ressort est comprimé.

- (a) Déterminer l'expression de la compression  $\Delta\ell_{eq} = -z_{eq}$  du ressort quand l'ensemble est à l'équilibre. Calculer  $\Delta\ell_{eq}$ .

- (b) Établir l'équation différentielle vérifiée par la coordonnée  $z$  de la bille tant qu'elle est en contact avec le ressort.

- (c) On comprime le ressort d'une longueur  $\Delta\ell_i$  supplémentaire par rapport à la position d'équilibre précédente et l'ensemble est lâché sans vitesse initiale. Déterminer l'expression de  $z(t)$ .

- II.2. Montrer que le contact bille-ressort peut par la suite être rompu si la compression initiale  $\Delta\ell_i$  est supérieure à une valeur minimale  $\Delta\ell_p$  dont on donnera l'expression en fonction des données du problème. Que vaut à l'instant de la rupture du contact l'accélération  $\ddot{z}$  de la bille ?

- II.3. On suppose dans toute la suite que  $\Delta\ell_i > \Delta\ell_p$  et on étudie le mouvement rectiligne de  $O_1$  à  $O_2$ . On désigne par  $v_1$  l'expression de la vitesse de la bille en  $O_1$ .

- (a) Déterminer l'expression de  $v_1$  en fonction entre autres des compressions  $\Delta\ell_{eq}$  et  $\Delta\ell_i$ .

- (b) En déduire l'expression de la vitesse  $v$  de la bille en un point M de coordonnée  $z = \overline{O_1M} > 0$ . Quelle doit être la valeur minimale  $\Delta\ell_D$  de la compression  $\Delta\ell_i$  pour qu'elle atteigne le point  $O_2$  distant de  $O_1$  de D ? Calculer  $\Delta\ell_D$ .

- II.4. Pour cette question seulement, on prend en compte l'existence d'un frottement solide entre la bille et le plan de coefficient  $\mu$ , notable uniquement dans la phase  $\overline{O_1M} > 0$ . On constate que pour la valeur  $\Delta\ell_i$  déterminée précédemment, la bille n'atteint pas  $O_2$  : sa vitesse s'annule pour  $\overline{O_1M} = z_{max} < D$ .

- (a) Exprimer  $\mu$  en fonction de  $z_{max}$ , D et de l'angle  $\alpha$ .

- (b) Pour quelle valeur minimale de  $\mu$  la bille reste-t-elle immobile en  $z_{max}$  ? Quelle est la valeur correspondante du quotient  $z_{max}/D$  ?

### III Trajectoire circulaire

On néglige de nouveau les frottements et considère  $\Delta\ell_i > \Delta\ell_D$ . La bille atteint le point  $O_2$  avec une vitesse qu'on note  $v_2$ , positive selon  $\vec{e}_z$ .

- III.1. On étudie tout d'abord le mouvement quand la bille poursuit son mouvement en restant au contact du guide hémicirculaire. On la repère par l'angle  $\theta = (\overline{O_3O_2}, \overline{O_3M})$ , orienté par le vecteur unitaire  $\vec{e}_y$ .

- (a) Établir les équations différentielles du mouvement en coordonnées polaires.

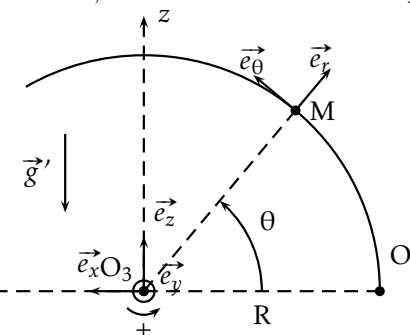
- (b) Vérifier que l'expression suivante de la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  est solution :

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{v_2^2}{R^2} - \frac{2g'}{R} \sin(\theta)}. \quad (1)$$

En déduire l'expression de la force de réaction normale  $\vec{N}$  exercée par le guide circulaire sur la bille.

- (c) Quelle condition la vitesse  $v_2$  doit-elle vérifier pour que la bille puisse atteindre le point  $O_4$  diamétralement opposé à  $O_2$  (voir figure 1). Calculer la valeur limite notée  $v_{2\ell}$  de  $v_2$  puis la valeur correspondante de la compression initiale  $\Delta\ell_i$ .

- III.2. On considère maintenant que la condition précédente sur  $v_2$  n'est pas remplie.



- (a) On désigne par  $\theta_{\max}$  l'angle pour lequel le contact est rompu. Établir la relation vérifiée par  $\theta_{\max}$ ,  $v_2$ ,  $R$  et  $g'$ . Déterminer également le module et les composantes sur  $\vec{e}_x'$  et  $\vec{e}_z'$  de la vitesse en  $\theta = \theta_{\max}$ . On exprimera le module en fonction de  $v_2$  uniquement et les composantes en fonction de  $v_2$  et de  $A = \frac{v_2^2}{3g'R}$ .
- (b) Quelle est la nature de la trajectoire ultérieure? Déterminer la valeur de  $A$  pour laquelle la bille passe par  $O_3$ . En déduire la valeur de  $\Delta\ell_i$  correspondante et justifier que le flipper est un jeu de précision.

## Problème 2 : Ralentissement d'atomes froids

On étudie les principes des techniques utilisées depuis les années 1980<sup>1</sup> pour refroidir et piéger des gaz atomiques au moyen de champ magnétiques et de faisceaux laser. Aucune connaissance sur le champ magnétique, les lasers ni la structure atomique n'est nécessaire pour l'introduction présentée ici.

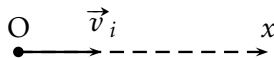
On considère un atome de rubidium  $^{87}\text{Rb}$  de masse  $m$ .

**Données :** masse d'un atome de Rubidium  $m = 1,46 \cdot 10^{-25}$  kg, constante de Planck  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  J · s, accélération de la pesanteur  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , intensité de la force  $F_0 = 1,50 \cdot 10^{-20}$  N, coefficient  $\beta = 3,00 \cdot 10^{-1} \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-2}$ , vitesse caractéristique  $v_0 = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , vitesse initiale  $v_i = 500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

### I Ralentisseur à effet Zeeman

On étudie le ralentissement d'un jet d'atomes émis à grande vitesse par une enceinte à haute température nommée «four». On considère le mouvement d'un de ces atomes. On néglige dans un premier temps le poids de l'atome ; on peut alors considérer que son mouvement est unidimensionnel, selon un axe noté  $Ox$ .

On note  $v_i$  la vitesse de l'atome en  $x = 0$ , dirigée selon  $+\vec{e}_x$ , et  $v_x$  sa vitesse à un instant ultérieur.



- I.1. (a) On considère tout d'abord que l'atome est soumis à une force constante  $\vec{F} = -F_0\vec{e}_x$ , avec  $F_0 > 0$ . Déterminer l'expression de  $v_x(t)$ .
- (b) En déduire  $x(t)$  puis l'équation de la trajectoire dans l'espace des phases  $v_x(x)$ . Représenter son allure.
- (c) Déterminer l'expression de la distance  $\ell$  nécessaire pour arrêter l'atome en fonction de sa vitesse initiale  $v_i$ . Calculer  $\ell$  pour  $v_i = 500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  (vitesse caractéristique d'un atome issu d'un four à une température de 400 K) et  $F_0 = 1,50 \cdot 10^{-20}$  N. Commenter quant à la réalisation de ce ralentissement en laboratoire.
- (d) Calculer la durée nécessaire pour que l'atome parcoure la distance  $\ell$  et comparer à ce qu'elle aurait été en l'absence de la force  $\vec{F}$ .

i. et couronnées entre autres par l'attribution du Prix Nobel 2007 à S. Chu, C. Cohen-Tannoudji et W.D. Phillips.

- (e) Déterminer les expressions et les valeurs de la distance d'arrêt  $\ell$  et de la durée d'arrêt pour une vitesse initiale égale à  $v_i/2$ . Superposer à la courbe de la question I.1b la trajectoire dans l'espace des phases correspondante. Par la suite, on considère de nouveau un atome de vitesse initiale  $v_i$ , sauf mention explicite du contraire.
- I.2. La force  $\vec{F}$  est exercée par un faisceau laser et dépend en fait de la vitesse de l'atome (par ce qu'on nomme l'effet Doppler) et de la présence d'un éventuel champ magnétique  $B(x)$  variable selon  $x$ . On peut la mettre sous la forme :

$$\vec{F} = \frac{-F_0}{1 + \beta(v_x(x) - \alpha B(x))^2} \vec{e}_x,$$

avec  $\alpha$  et  $\beta$  des constantes positives.

- (a) Rappeler l'expression de  $v_x(x)$  lors d'une décélération constante due à une force de norme  $F_0$ .
- (b) En déduire quelle doit être l'expression de  $B(x)$  pour que le mouvement de l'atome soit uniformément décéléré? On réalise ainsi un *ralentisseur Zeeman*.
- I.3. On considère dans cette question que  $B(x)$  est uniforme à la valeur  $B(x) = v_i/\alpha$ . On considère le mouvement jusqu'à l'annulation de la vitesse.
- (a) Le ralentissement sera-t-il plus ou moins efficace que dans les conditions de la question I.2b? Déterminer un encadrement de la norme de la force  $F$  au cours du mouvement.
- (b) En déduire un encadrement de la distance et de la durée d'arrêt (on donnera leur expression et leur valeur). Donner également l'allure de la trajectoire dans l'espace des phases, qu'on superposera à celle de la question I.1b.
- I.4. On considère maintenant un atome de vitesse initiale  $v_i' < v_i$ . Le champ  $B(x)$  a la forme établie à la question I.2b permettant d'assurer  $F = F_0$  pour un atome de vitesse  $v_i$ .
- (a) Justifier sans calcul que la norme de la force  $F$  sera supérieure à :

$$\frac{F_0}{1 + \beta(v_i - v_i')^2}. \quad (2)$$

En déduire un encadrement de la force  $F$  puis de la distance d'arrêt  $\ell$ . Calculer numériquement les distances de l'encadrement pour  $v_i' = 0,8 \times v_i$ .

- (b) En déduire l'allure de la trajectoire dans l'espace des phases. On superposera :
- l'allure de la trajectoire de vitesse initiale  $v_i'$  dans le champ  $B(x)$  correspondant à  $v_i$  et celles correspondant à l'encadrement établi à la question précédente,
  - la trajectoire de vitesse initiale  $v_i$  dans le champ  $B(x)$  correspondant à  $v_i$ .
- I.5. On considère désormais le cas  $v_i' > v_i$ . Proposer une borne de la norme  $F$  dépendant de  $v_i' - v_i$ . Établir la distance d'arrêt correspondante et superposer :
- l'allure de la trajectoire dans l'espace des phases de vitesse initiale  $v_i'$  dans le champ  $B(x)$  correspondant à  $v_i$  et celle correspondant à la borne déterminée à la question précédente,
  - la trajectoire de vitesse initiale  $v_i$  dans le champ  $B(x)$  correspondant à  $v_i$ .
- I.6. On considère de nouveau un atome de vitesse initiale  $v_i$ , dans le champ  $B(x)$  adapté à  $v_i$  défini à la question I.2b. Le dispositif est tronqué au bout d'une distance  $x_{\max} < \ell$  et la structure pour  $x \geq x_{\max}$  est telle qu'on peut considérer  $\vec{F} = 0$  pour  $x \geq x_{\max}$ . Déterminer l'expression et la valeur de  $x_{\max}$  pour qu'on ait  $v_x = 0,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  pour  $x \geq x_{\max}$ . Commenter.

## II Interprétation quantique

La force  $\vec{F}$  est la conséquence de l'absorption par l'atome d'une partie des photons émis par le laser. On considère un laser de longueur d'onde  $\lambda = 7,80 \cdot 10^2 \text{ nm}$ .

- II.1. Déterminer par analyse dimensionnelle la force moyenne (à une constante multiplicative près) subie par l'atome s'il absorbe un nombre  $\gamma$  de photons par seconde.
- II.2. En déduire l'ordre de grandeur de  $\gamma$  pour produire la force  $F_0$  étudiée puis l'ordre de grandeur du nombre de photons absorbés durant le freinage.

## III Mélasse optique

On change dans toute la suite l'origine des axes :  $x = 0$  correspond désormais à la sortie du ralentisseur. Pour finir le freinage, et «figer» les atomes, on utilise deux faisceaux laser se propageant en sens opposés. Ils produisent la force totale :

$$\vec{F} = \left( \frac{F_0}{1 + \beta(v_0 + v_x)^2} - \frac{F_0}{1 + \beta(v_x - v_0)^2} \right) \vec{e}_x, \quad (3)$$

avec  $v_0$  une constante positive et  $v_x$  la composante sur  $x$  de la vitesse

- III.1. (a) Montrer, au moyen d'un développement limité, pour  $v_x \ll v_0$  et  $v_x \ll 1/(\beta v_0)$ , que la force se met sous la forme :

$$\vec{F} \simeq -\gamma v_x \vec{e}_x,$$

avec  $\gamma$  une constante positive dont on donnera l'expression. On utilisera cette expression dans toute la suite.

- (b) L'atome est initialement en  $x = 0$  et animé de  $v_x = v_1$ . Déterminer  $v_x(t)$  puis  $x(t)$  en fonction de  $v_1, \gamma, m$  et  $t$ . Identifier une constante de temps  $\tau$  dont on calculera la valeur pour  $\beta = 3,00 \cdot 10^{-1} \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-2}$  et  $v_0 = 4,00 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
- (c) Déterminer également l'équation de la trajectoire dans l'espace des phases. Tracer l'allure des trajectoires correspondant à des vitesses  $v_1$  de module et de signe différents.
- (d) Calculer la distance totale parcourue avant l'arrêt pour  $v_1 = 0,50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
- III.2. On utilise désormais 3 paires de faisceaux lasers identiques à celle de l'équation (3) se propageant respectivement selon  $Ox, Oy$  et  $Oz$ . On tient désormais compte pour cette question de la pesanteur en notant  $\vec{g} = -g\vec{e}_z$  son accélération. On considère l'atome initialement placé au point O de coordonnées  $x = 0, y = 0, z = 0$  et animé de la vitesse  $v_1 \vec{e}_x$ . On note M sa position à un instant ultérieur.
- (a) Établir l'équation différentielle vérifiée par le vecteur  $\vec{OM}(t)$ .
- (b) Résoudre cette équation différentielle et tracer l'allure de la trajectoire. On identifiera une vitesse caractéristique  $v_\infty$  qu'on exprimera en fonction de  $g$  et  $\tau$  et dont on calculera la valeur.
- (c) Déterminer pendant combien de temps on peut conserver l'atome dans une boule de rayon  $R \simeq 5 \text{ mm}$  autour du point O. On pourra effectuer des approximations dont on justifiera la pertinence.
- (d) Quelle serait cette durée en l'absence des faisceaux lasers, dans le cas  $v_1 = 0$  ?

## Exercice 1 : Le Soufre

L'élément soufre a pour numéro atomique  $Z = 16$ .

- Donner sa configuration électronique à l'état fondamental ainsi que son nombre d'électrons de valence.
- Proposer une structure de Lewis des espèces chimiques suivantes :
  - $\text{H}_2\text{S}$
  - $\text{SO}_2$
  - $\text{SO}_3$
  - $\text{H}_2\text{SO}_4$
  - $\text{CH}_3\text{SOCH}_3$
  - $\text{SF}_6$
- Proposer une géométrie autour de l'atome de soufre pour les molécules  $\text{H}_2\text{S}, \text{SO}_2, \text{SO}_3$ , et  $\text{CH}_3\text{SOCH}_3$ . Préciser, en le justifiant, lesquelles de ces molécules sont planes.
- Comparer les énergies et les longueurs des différentes liaisons S-O dans  $\text{H}_2\text{SO}_4$ .
- Comparer, en le justifiant, les électronégativités de S et O ( $Z = 8$ ). En déduire quelles molécules parmi  $\text{H}_2\text{S}, \text{SO}_2$ , et  $\text{SO}_3$  possèdent un moment dipolaire. On précisera sa direction et son sens.