Les sacs seront laissés devant le tableau. Conservez seulement de quoi écrire et une calculatrice : pas de téléphone !
Si vous ne comprenez pas une notation, une question, ou si vous pensez avoir découvert une erreur d'énoncé, signalez-le immédiatement.
Le référentiel terrestre sera considéré galiléen durant toute la durée des phénomènes étudiés.

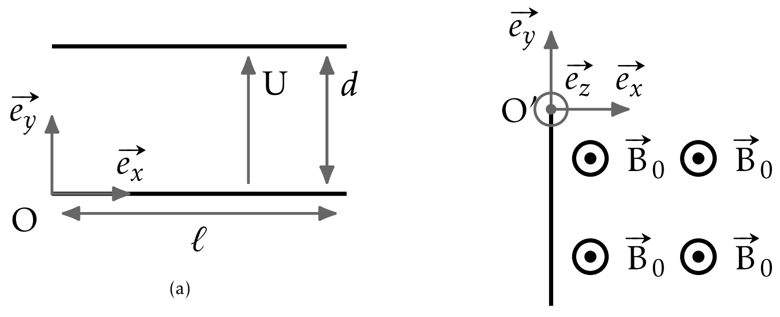
Problème 1 : Trajectoires de particules chargées

On considère le mouvement d'un proton dans des champs magnétique et électriques dans le vide. On néglige la pesanteur.

Données : masse du proton $m_p = 1{,}67\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$; charge du proton $e = 1{,}60\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$; vitesse de la lumière $c = 3{,}00\cdot 10^{8}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$; distance entre les plaques $d = 3{,}00\cdot 10^{1}\,\mathrm{cm}$.

I Généralités

I.1. On étudie son mouvement dans un champ électrique uniforme $\vec{E} = E_0\vec{e_y}$. Il se trouve initialement en O animé d'une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{e_x}$ (avec $v_0 \geqslant 0$; voir la figure 1a).



(a) (b)

Figure 1

(a) Déterminer les équations horaires du mouvement $x(t)$ et $y(t)$.

(b) Le champ est créé par une paire de plaques conductrices orthogonales à $\vec{e_y}$ distantes d'une distance notée d (placées en $y = 0$ et $y = d$) entre lesquelles est appliquée une tension U. Rappeler l'expression de la tension U en fonction de E_0 et d. On précisera le signe de U pour que les protons soient se dirigent vers les y croissants.

(c) Déterminer et calculer la longueur maximale des plaques selon x, notée ℓ pour laquelle les protons n'atteignent pas la plaque en $y = d$. On prendra $d = 3{,}00\cdot 10^{1}\,\mathrm{cm}$; $E = 1{,}00\cdot 10^{6}\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$ et $v_0 = 5{,}00\cdot 10^{6}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

I.2. On étudie désormais le mouvement du proton dans un champ magnétique uniforme $B = B_0\vec{e_z}$. Il est initialement en O′ animé de la vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{e_x}$ (avec $v_0 \geqslant 0$; voir la figure 1b).

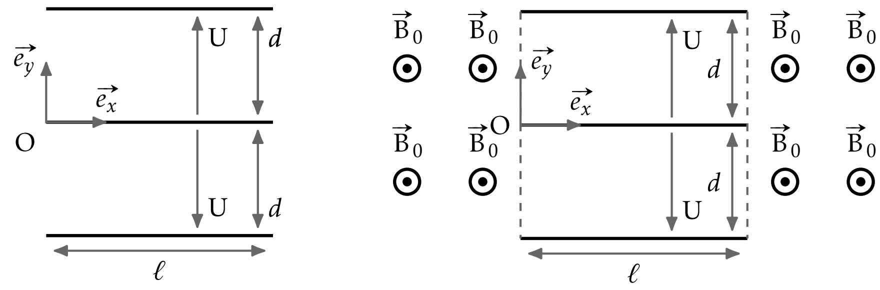
(a) Montrer que le mouvement est circulaire uniforme. On précisera l'expression de sa période et la position de son centre. Quel doit être le signe de B_0 pour que le déplacement s'effectue vers les décroissants ?

(b) Calculer la période et la position du centre pour $v_0 = 5{,}00\cdot 10^{6}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et $B_0 = 2{,}00\cdot 10^{-1}\,\mathrm{T}$.

(c) On considère désormais que la vitesse, toujours de norme v_0, forme désormais l'angle α avec la direction $\vec{e_x}$. Déterminer les expressions de la position et du vecteur vitesse du proton quand il repasse par la droite O′y.

II Oscillations

On considère la configuration de plaques conductrices représentée à la figure 2a, chaque paire étant soumise à la même tension U en valeur absolue.



(a) (b)

Figure 2

II.1. Définir une énergie potentielle pour le mouvement du proton. Quel doit être le signe de U pour que les protons soient rappelés vers le plan $y = 0$? On suppose cette situation réalisée dans toute la suite.

II.2. Le proton est initialement en $(x = 0; y = 0)$, animé d'une vitesse $v_0\vec{e_x}+v_1\vec{e_y}$. À quelle distance maximale pourra-t-il s'éloigner du plan $y = 0$?

II.3. (a) Déterminer l'expression de la distance $y(\ell)$ à laquelle il se trouve quand il a parcouru la distance ℓ selon $\vec{e_x}$.

(b) Tracer l'allure de la courbe de $y(\ell)$ en fonction de v_1. On en précisera en particulier un équivalent pour $v_1 \to \infty$.

III Allers et retours

On considère la structure de la figure 2b dans laquelle il règne un champ $\vec{B}_0 = B_0\vec{e_z}$ uniforme pour $x \geqslant \ell$ et pour $x \leqslant 0$. Le champ magnétique pour $0 \leqslant x \leqslant \ell$ pourra être nul ou non nul. On cherche à faire effectuer aux protons un grand nombre d'allers selon $\vec{e_x}$.

III.1. On considère dans cette question U = 0 et un champ magnétique nul pour $0 \leqslant x \leqslant \ell$.

(a) Déterminer la trajectoire d'un proton animé d'un vecteur vitesse selon $\vec{e_x}$ en $(x = 0; y = 0)$ dans le cas $B_0 \geqslant 0$.

(b) Même question quand le vecteur vitesse en $(x = 0; y = 0)$ forme un petit angle α avec la direction $\vec{e_x}$. Commenter.

(c) L'ajout d'une tension U non nulle peut-il efficacement régler ce problème ? On donnera une réponse qualitative basée sur des allures de trajectoires.

III.2. Dans cette question la tension U est non nulle et on suppose que le champ $\vec{B} = B_0\vec{e_z}$ est présent dans tout l'espace, y compris pour $0 \leqslant x \leqslant \ell$.

(a) On considère un proton situé initialement en $(x = 0, y = y_0)$ avec $y0 \geqslant 0$, et animé d'une vitesse $v_0 = v_0\vec{e_x}$ avec $v_0 \geqslant 0$. Montrer qu'il existe une valeur de B_0 pour laquelle son mouvement est rectiligne uniforme.

(b) Tracer l'allure de la trajectoire ultérieure pour différentes valeurs de y_0. On veut avoir $y_0 = 3{,}00 \cdot 10^1$ cm, et $v_0 = 5{,}00 \cdot 10^6\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ pour $d = 4{,}00 \cdot 10^1$ cm. Pour quelles valeurs de B_0 pourra-t-on effectuer des allers et retour selon $\vec{e_x}$.
Calculer les valeurs de U correspondantes.
On admettra qu'on peut avoir un champ électrique rigoureusement nul pour $x \leqslant 0$ et $x \geqslant \ell$, au besoin en l'éteignant quand les protons s'y trouvent.

Problème 2 : Mécanique du ski

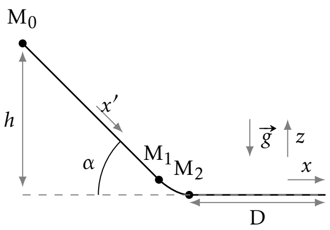
On étudie dans ce problème quelques mouvements particuliers à ski. Le skieur sera modélisé, sauf mention explicite du contraire, par un point matériel de masse m, en glissement dans le référentiel terrestre, considéré galiléen pour la durée des phénomènes observés. On notera $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur, considérée uniforme. Tous les mouvements s'effectueront selon la ligne de plus grande pente, qui sera contenue dans un plan vertical : les trajectoires seront donc toutes contenues dans ce plan vertical.

Les différentes parties sont indépendantes.

Données : Hauteur de descente : $h = 5{,}00 \cdot 10^1$ m ; coefficient de frottement solide $\mu = 8{,}00 \cdot 10^{-2}$; coefficient de frottement fluide $\beta = 1{,}60 \cdot 10^{-1}\,\mathrm{kg \cdot m^{-1}}$; masse du skieur $m = 8{,}00 \cdot 10^1$ kg ; accélération de la pesanteur $g = 9{,}80\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

I Distance d'arrêt

Le skieur, partant de l'arrêt du point M_0, descend une pente rectiligne, de hauteur h et d'inclinaison α (voir schéma ci-contre). Il poursuit sa trajectoire sur un plan horizontal. Le raccordement entre ces deux portions rectilignes s'effectue selon une courbe M_1M_2 dont on ne précisera pas la nature et suffisamment courte pour qu'on puisse confondre les altitudes de M_1 et M_2 : $z(M_1) \simeq z(M_2) = 0$.



On étudie l'effet de diverses sources de frottements sur la distance parcourue avant l'arrêt.

I.1. On néglige dans cette question toutes les sources de frottement.

(a) Déterminer la vitesse du skieur quand il atteint le point M_1.

(b) Quelle est la nature du mouvement ultérieur ?

I.2. On considère désormais qu'il existe un frottement solide caractérisé par le coefficient μ.

(a) Déterminer la valeur minimale de l'angle α pour laquelle le glissement peut commencer en M_0. On considère dans toute la suite que α est supérieur à cette valeur.

(b) Déterminer la vitesse, notée v_0, quand le skieur parvient en M_1 en fonction de g, h, μ et α. Calculer sa valeur et commenter pour $\alpha = \pi/4$

(c) On néglige l'effet des frottements entre M_1 et M_2. Déterminer l'expression de la distance D parcourue à partir du point M_2 sur le plan horizontal avant l'arrêt du skieur. Pour quelle valeur de l'angle α est-elle maximale ? Calculer D pour $\alpha = \pi/4$ et commenter.

I.3. On prend maintenant en compte, en plus du frottement solide, le frottement fluide du à l'air. Il crée une force d'intensité $F_f = \beta v^2$, avec v la vitesse du point matériel et β une constante positive.

(a) On note x' l'abscisse le long de la pente lors de la phase de descente. Établir l'équation différentielle d'évolution de sa dérivée, notée $\dot{x}'$.

(b) En déduire que la vitesse $\dot{x}'$ vérifie :

$$\dot{x}'(t) = v'_\infty \tanh\left(t/\tau'\right), \tag{1}$$

avec v'_∞ et τ' des constantes positives qu'on exprimera en fonction de m, g, β, α et μ. On pourra résoudre directement l'équation différentielle ou vérifier que la solution proposée convient.

(c) En déduire l'expression de $\dot{x}'$ en fonction de x'. On rappelle qu'une primitive de tanh est ln cosh et on indique qu'on a, pour tout u : $\tanh(\operatorname{argcosh}(e^u)) = \sqrt{1 - e^{-2u}}$. Calculer la vitesse en M_1, notée v_M pour $\alpha = \pi/4$ et commenter.

(d) Établir l'équation différentielle d'évolution de la vitesse $\dot{x}$ sur la portion horizontale de la trajectoire.

(e) En déduire l'expression de $\dot{x}$ en fonction du temps. On introduira une vitesse v_0 et un temps τ caractéristiques.

(f) En déduire l'expression de la distance D parcourue à l'horizontale avant l'arrêt. On rappelle qu'une primitive de $\tan u$ est $-\ln|\cos u|$. Calculer D et commenter.

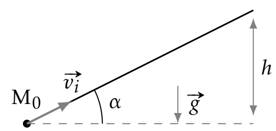
II Franchissement d'obstacles

Le skieur aborde maintenant divers obstacles. Sa vitesse initiale au point M_0 sera notée v_i.

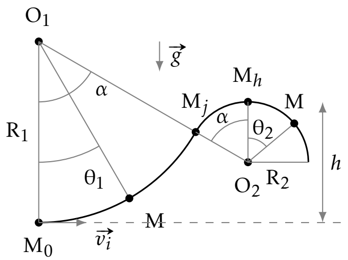
II.1. L'obstacle est une rampe plane, de hauteur h et d'inclinaison $\alpha \leqslant \pi/2$.
Déterminer la vitesse minimale v_i lui permettant de parvenir au sommet de la rampe :

- quand on néglige tout frottement,
- quand on prend en compte un frottement solide de coefficient μ.

Calculer les valeurs de v_i correspondantes pour $\alpha = \pi/4$.



II.2. L'obstacle est maintenant une bosse formée de deux portions circulaires de rayons R_1 et R_2, se raccordant tangentiellement au point d'inclinaison $\alpha \in [0;\pi/2]$ du premier arc de cercle. On néglige tout frottement dans cette question. Le point matériel sera repéré par l'angle non orienté $\theta_1 = \left(-\vec{e}_z, \overrightarrow{O_1M}\right)$ (resp. $\theta_2 = \left(\vec{e}_z, \overrightarrow{O_2M}\right)$, orienté) quand il est sur le premier (resp. le deuxième) arc de cercle.



(a) Exprimer la hauteur de la bosse, notée h, en fonction de R_1, R_2 et α.

(b) On étudie tout d'abord le mouvement sur le premier arc de cercle, pour M compris entre M_0 et M_j. Déterminer l'expression de la vitesse v au point M en fonction de θ_1.

(c) En déduire l'expression de la norme, notée N_1, de la réaction exercée par le support sur le skieur en fonction de θ_1.

(d) Le skieur peut-il décoller de la piste entre les points M_0 et M_j ? Déterminer l'expression de la valeur minimale, notée v_j, de la vitesse v_i pour laquelle il peut atteindre le point M_j. On l'exprimera en fonction de g, R_1 et α.

II.3. On suppose dans toute la suite qu'on a $v_i > v_j$ et on étudie désormais le mouvement au-delà de M_j.

(a) Déterminer l'expression de la norme de la réaction, notée N_2 exercée par le support sur la deuxième partie de la trajectoire, *ie* pour M au-delà de M_j. En déduire l'expression de la valeur maximale de v_i, notée v_{sd}, de la vitesse pour laquelle le skieur ne décolle pas entre M_j et M_h.

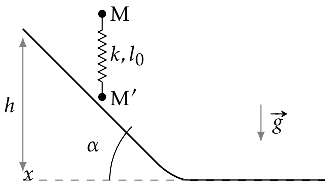
(b) On suppose que le skieur ne décolle pas entre M_j et M_h, déterminer l'expression de la valeur minimale, notée v_h, de la vitesse v_i pour laquelle il parvient au sommet. En déduire les valeurs de l'angle α pour lesquelles il peut parvenir au sommet sans décoller.

(c) On suppose qu'il est parvenu au sommet sans décoller et on note v_s sa vitesse au point M_h. Déterminer l'expression de l'angle θ_2, noté θ_{2d} pour lequel il décolle au delà du point M_h. Comparer à α et commenter.

III Décollement d'une luge à ressort

On s'intéresse maintenant à une luge à ressort, utilisée pour le ski assis. On la modélise comme deux points matériels : le patin (point M') de masse m' au contact du sol, l'ensemble du skieur et du châssis (point M) de masse m, reliés par une ressort idéal de constante de raideur k et de longueur à vide l_0.

La luge descend une pente rectiligne de hauteur h et d'inclinaison α et poursuit son mouvement sur une portion horizontale. On considère pour simplifier que l'ensemble du mouvement s'effectue sans frottement et que le ressort reste vertical durant tout le mouvement.



III.1. Le skieur freine lors de la phase de descente de manière à maintenir sa vitesse constante à la valeur v. Déterminer la compression, notée $|\Delta l|$ du ressort lors de la descente.

III.2. Le skieur cesse de freiner sur la partie horizontale. La jonction est suffisamment douce pour que la norme de la vitesse de M' ne varie pas lors du passage sur la partie horizontale. Déterminer le mouvement ultérieur de M', et l'évolution de la longueur l du ressort si le skieur ne freine plus sur cette partie.

III.3. En déduire l'existence d'une valeur minimale, notée $v_{\min}$, de la vitesse v pour laquelle le point M' peut décoller. Déterminer la distance D parcourue sur la portion horizontale quand ce décollement survient.

Problème 3 : Dosage de l'acide borique

On s'intéresse au dosage d'une solution d'acide borique $B(OH)_3$ de base conjuguée $B(OH)_4^-$. On introduit un volume V_A de $B(OH)_3$ de concentration c_A inconnue dans un bécher. On verse dans ce bécher une solution de soude NaOH de concentration c_B précisément connue.

Données :

$B(OH)_3$: $V_A = 50,0 \pm 0,1\,\text{mL}$, $pK_a = 9,23$.

soude : $c_B = (5,00 \pm 0,05).10^{-1}\,\text{mol.L}^{-1}$

G : $c_G = 1,3\,\text{mol.L}^{-1}$

C^- : $\log K_f = 2,0$.

H_2O : $pK_e = 14,0$.

I Dosage de $B(OH)_3$ seul

La figure Fig. 3a représente le pH de la solution contenue dans le bécher en fonction du volume V_B de la solution de soude versé. Les trois courbes représentent : le pH et les pourcentages de $B(OH)_3$ et $B(OH)_4^-$.

I.1. (a) Écrire l'équation bilan de la réaction d'une mole de $B(OH)_3$ avec l'eau donnant $B(OH)_4^-$.

(b) Écrire l'équation bilan de la réaction de dosage de $B(OH)_3$ par la soude, pour une mole de $B(OH)_3$. Exprimer sa constante K_1 en fonction des données du problème et donner sa valeur numérique.

I.2. (a) Identifier les trois courbes de la figure 3a. On justifiera précisément les réponses.

(b) Déterminer, par lecture graphique, le volume V_{Beq} correspondant à l'équivalence du dosage.

(c) En déduire l'expression puis la valeur de la concentration c_A de l'acide borique en fonction des données du problème.

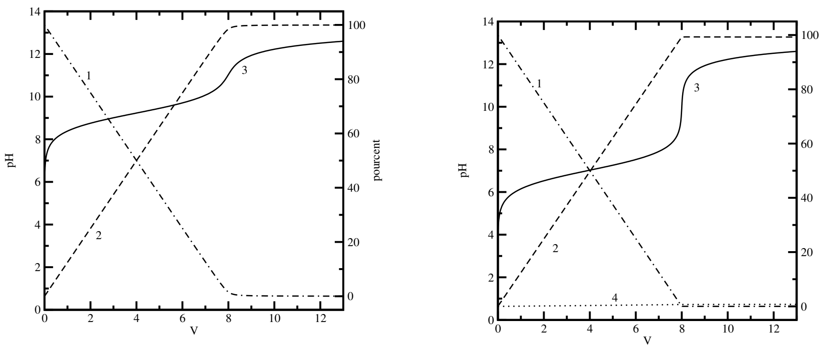
I.3. On s'intéresse maintenant à quelques points particuliers de cette courbe. Pour ces questions, on sera amené à formuler des hypothèses dont on vérifiera rapidement la cohérence à la fin du calcul.

(a) Déterminer l'expression, en fonction des données du problème, du pH à l'équivalence $V_B = V_{Beq}$. Commenter l'accord avec les données expérimentales.

(b) Déterminer l'expression, en fonction des données du problème, du pH à la demi-équivalence $V_B = V_{Beq}/2$. Commenter l'accord avec les données expérimentales.

(c) Quel sera le pH pour $V_B \gg V_{Beq}$?

(d) Que pensez-vous du dosage colorimétrique de l'acide borique dans ces conditions ?



(a) Dosage d'une solution de $B(OH)_3$ par une solution de soude

(b) Dosage de $B(OH)_3$ en présence de glycérol G.

FIGURE 3

II Dosage de $B(OH)_3$ en présence de glycérol

Pour pallier la difficulté du dosage précédent, on ajoute dans le bécher, sans variation de volume, une solution de glycérol $CH_2OH–CHOH–CH_2OH$, noté G par la suite. En présence de glycérol, la base $B(OH)_4{}^-$ forme en effet le composé $BO_4(C_3H_5OH)_2{}^-$, noté C^- par la suite, selon la réaction :

$$B(OH)_4{}^- + 2G \rightleftharpoons C^- + 4H_2O \qquad K_f, \tag{2}$$

de constante K_f.

II.1. La figure FIG. 3B représente le dosage de la même solution de $B(OH)_3$ en présence d'un grand excès de glycérol à la concentration c_G. Les quatre courbes représentent le pH et les pourcentages de B dans $B(OH)_3$, $B(OH)_4{}^-$ et C^-.

(a) Écrire l'équation de la réaction entre une mole de $B(OH)_3$, la soude et G formant C^-. Déterminer l'expression de sa constante K_2 en fonction des données du problème et calculer sa valeur numérique.

(b) En considérant les points communs et les différences entre les figures FIG. 3A et FIG. 3B, justifier que la courbe 2 de la figure FIG. 3B ne peut pas représenter le même composé que pour la figure FIG. 3A. En déduire l'identification des courbes de la figure FIG. 3B.

II.2. (a) Exprimer, à l'équilibre chimique, la différence $pH - pK_a$ en fonction des concentrations $[B(OH)_3]$, $[C-]$ et $[G]$.

(b) En déduire l'expression, en fonction des données du problème, du pH au volume $V_{Beq}/2$. Commenter l'accord avec les données expérimentales.

(c) Déterminer l'expression, en fonction des données du problème, du pH au volume V_{Beq}. Commenter l'accord avec les données expérimentales.

(d) Conclure quant à la précision de ce deuxième dosage.

Exercice 1 : Sur quelques facteurs de la solubilité des sels

1. On s'intéresse dans cette question à la solubilité du chlorure d'argent $AgCl_{(s)}$ dans différentes solutions aqueuses.

   (a) Déterminer l'expression puis calculer, la solubilité du chlorure d'argent AgCl dans l'eau pure.

   (b) Déterminer l'expression puis calculer, la solubilité du chlorure d'argent AgCl dans une solution de chlorure de sodium de concentration $c_{NaCl} = 1 \cdot 10^{-1}\,mol \cdot L^{-1}$.

2. On cherche maintenant à dissoudre AgCl dans une solution d'iodure de potassium KI de concentration $c_{KI} = 1 \cdot 10^{-1}\,mol \cdot L^{-1}$.

   (a) Calculer la constante de la réaction $AgCl_{(s)} + I^- = AgI_{(s)} + Cl^-$.

   (b) Calculer $[Cl^-]/[I-]$ quand la solution est saturée en $AgCl_{(s)}$ et en $AgI_{(s)}$. En déduire alors la concentration en ions chlorure en fonction de c_{KI} puis la solubilité de AgCl dans cette solution.

   (c) Quelle hypothèse doit-on vérifier pour pouvoir considérer uniquement la réaction de la question **2a**. Vérifier sa validité.

3. L'acide éthanoïque CH_3CO_2H est un acide faible. On s'intéresse à la solubilité de l'éthanoate d'argent $CH_3CO_2Ag_{(s)}$, peu soluble dans l'eau pure. On considère une solution juste saturée en CH_3CO_2Ag.

   (a) En supposant que la base $CH_3CO_2{}^-$ a peu réagi avec l'eau, déterminer $[CH_3CO_2-]$ et en déduire la solubilité de $CH_3CO_2Ag_{(s)}$.

   (b) En déduire la valeur du pH et vérifier l'hypothèse.

4. On considère une solution contenant au total $c_{CH_3CO_2Ag} = 1 \cdot 10^{-1}\,mol \cdot L^{-1}$ de CH_3CO_2Ag : une partie est dissoute et l'autre précipitée.

   (a) Dans un premier temps, on ne tiendra pas compte des propriétés acidobasiques de l'ammoniac NH_3 et de l'ion éthanoate $CH_3CO_2{}^-$, hypothèse que l'on justifiera *a posteriori*.
   Calculer le nombre minimal de moles d'ammoniac à ajouter à un litre de solution pour dissoudre totalement l'éthanoate d'argent en formant le complexe $[Ag(NH_3)_2]^+$.

   (b) L'éthanoate d'argent étant tout juste redissous, on ajoute progressivement de l'acide nitrique (acide fort HNO_3) à la solution, jusqu'à l'excès.

i. Décrire qualitativement les phénomènes observés au fur et à mesure que la solution est acidifiée. On aura intérêt à s'aider des domaines de prédominance des couples $CH_3CO_2H/CH_3CO_2^-$ et NH_4^+/NH_3.

ii. Calculer le nombre de moles d'acide nitrique ajouté à un litre de la solution lorsque cette dernière redevient limpide (en milieu acide).

Données :

Produits de solubilité $K_{s1}(AgCl) = 1{,}80 \cdot 10^{-10}$, $K_{s2}(AgI) = 1{,}00 \cdot 10^{-16}$, $K_{s3}(CH_3CO_2Ag) = 2{,}00 \cdot 10^{-3}$. On précise que le nitrate d'argent $AgNO_3$ est infiniment soluble.

Constantes d'acidité $K_{a1}(CH_3CO_2H/CH_3CO_2^-) = 2{,}00 \cdot 10^{-5}$, $K_{a2}(NH_4^+/NH_3) = 6{,}30 \cdot 10^{-10}$.

Formation de $Ag(NH_3)_2^+$ Le complexe $[Ag(NH_3)_2^+]$ est formé par la réaction :

$$Ag^+ + 2NH_3 \rightleftharpoons Ag(NH_3)_2^+ \qquad K_f = 1{,}59 \cdot 10^7 \equiv \frac{1}{K_d}.$$

caractérisée par sa constante de formation K_f ou sa constante de dissociation $K_d = 1/K_f$. On ne considérera pas le complexe $[Ag(NH_3)^+]$.