Les sacs seront laissés devant le tableau. Conservez seulement de quoi écrire et une calculatrice : pas de téléphone !
Si vous ne comprenez pas une notation, une question, ou si vous pensez avoir découvert une erreur d'énoncé, signalez-le immédiatement.

Problème 1 : Mission Rosetta

On étudie quelques aspects de la mission Rosetta, qui a conduit entre 2004 et 2014 une sonde spatiale jusqu'à la comète 67P/Tchourioumov-Guérassimenko (surnommée «Tchouri» dans toute la suite).

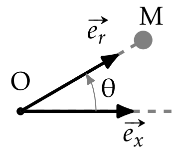
On établit ou rappelle dans une première partie des généralités utiles pour toute la suite. Selon les phases du mouvement, on travaillera dans différents référentiels : héliocentrique $\mathcal{R}_S$ ou géocentrique $\mathcal{R}_T$ qu'on considérera à chaque fois galiléen pour la durée du phénomène étudié.

Données :

- Période de révolution terrestre : $T_T = 370\,\text{jours}$; rayon de l'orbite terrestre considérée circulaire : $r_T = 1{,}5\cdot 10^{11}\,\text{m} = 1\,\text{ua}$; rayon de la Terre : $R_T = 6{,}4\cdot 10^3\,\text{km}$; masse de la Terre : $m_T = 6{,}0\cdot 10^{24}\,\text{kg}$.
- Périhélie de «Tchouri» $r_p = 1{,}2\,\text{ua}$, aphélie de Tchouri $r_a = 5{,}7\,\text{ua}$.
- Constante gravitationnelle $\mathcal{G} = 6{,}7\cdot 10^{-11}\,\text{S}\cdot\text{I}\cdot$.

I Généralités

On étudie le mouvement, dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_S$, d'un point matériel de masse m et de position M soumis uniquement à la force de gravitation exercée par une masse m_T fixe en O dans $\mathcal{R}_S$. Son mouvement sera caractérisé par ses coordonnées polaires : la distance $r = \text{OM}$ et l'angle θ entre un vecteur fixe $\vec{e_x}$ dans $\mathcal{R}_S$ et le vecteur unitaire $\vec{e_r}$ défini par $\overrightarrow{\text{OM}} = r\vec{e_r}$.



I.1. On désigne par $\vec{\sigma_O}$ le moment cinétique en O du point matériel. Montrer que $\vec{\sigma_O}$ est conservé au cours du mouvement, et déterminer sa norme, notée σ_c, en fonction de m, r et $\dot{\theta}$. On définit le vecteur unitaire $\vec{e_z}$ par $\vec{\sigma_O} = \sigma_c\vec{e_z}$. Quelle propriété géométrique de la trajectoire est assurée par la conservation de $\vec{\sigma_O}$?

I.2. On considère un mouvement circulaire de rayon R autour de O.

(a) Montrer qu'il est uniforme. Déterminer :
- la norme v de la vitesse,
- les énergies cinétique, potentielle et mécanique,

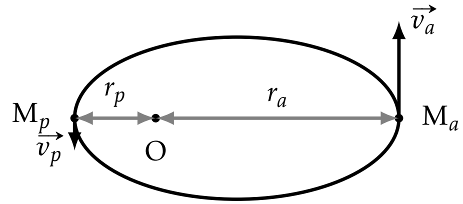
en fonction de la constante gravitationnelle $\mathcal{G}$, de m_T, m et R.

(b) Déterminer l'expression du quotient T^2/R^3 en fonction des constantes du problème. On admet que ce quotient conserve la même valeur pour les trajectoires elliptiques autour du même astre.

(c) Calculer v pour l'orbite de révolution de la Terre autour du soleil, de rayon noté r_T. On notera v_T sa valeur.

(d) On considère un point matériel situé sur l'orbite terrestre ($r = r_T$). Quelle vitesse doit-il posséder pour pouvoir s'éloigner à l'infini du soleil ultérieurement ? On l'exprimera en fonction de v_T.

I.3. On considère une trajectoire elliptique (on ne cherchera pas à montrer son existence) de périastre M_p et d'apoastre M_a. On note r_p la distance à l'astre O et $\vec{v_p}$ la vitesse (respectivement r_a et $\vec{v_a}$) au point M_p (resp. M_a).



Montrer que l'énergie mécanique se met sous la forme :

$$\mathcal{E}_m = -\frac{\mathcal{G}m_T m}{r_p + r_a}. \tag{1}$$

II Trajectoires

II.1. On étudie d'abord le lancement de la sonde dans le référentiel géocentrique. On ne considère que l'attraction gravitationnelle de la Terre.

(a) La sonde est lancée de la Terre le 2 mars 2004 avec une vitesse à la surface terrestre dans le référentiel géocentrique de norme v_ℓ. Déterminer et calculer sa valeur minimale, nommée v_1 pour qu'elle puisse s'éloigner à l'infini de la Terre, dans l'hypothèse où l'on néglige les frottements.

(b) Calculer la vitesse de la sonde quand elle est loin de la Terre, en négligeant l'attraction des autres astres, pour $v_\ell = 2v_1$.

(c) On suppose que la sonde a été lancée dans le sens du mouvement de la Terre sur son orbite, avec $v_\ell = v_1$ et on considère qu'après son lancement on peut négliger l'attraction gravitationnelle de la Terre pour ne plus considérer que celle du soleil. Justifier qu'on considère que la sonde décrit ensuite une orbite circulaire autour du soleil dont on précisera la période et le rayon.

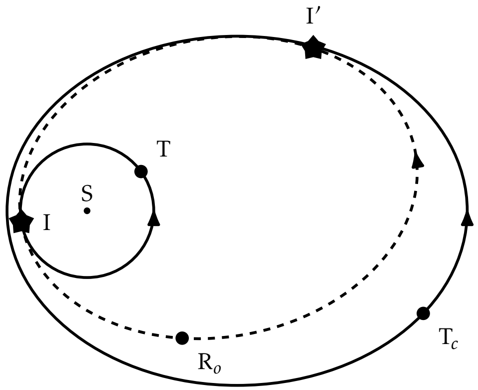
(d) On suppose maintenant qu'on a toujours $v_\ell = v_1$ mais qu'à l'issue d'une manœuvre ultérieure le vecteur vitesse de Rosetta a changé de direction sans changer de norme et forme un angle α avec celui de la Terre dans $\mathcal{R}_S$. Représenter sur un schéma l'orbite de la Terre et l'allure de celle de Rosetta. On choisira α de l'ordre de 20° avec un vecteur vitesse de Rosetta la rapprochant initialement du soleil. On justifiera la valeur du grand axe de la trajectoire de Rosetta.

II.2. On étudie maintenant une version simplifiée des trajectoires de la comète Tchouri et de la sonde Rosetta autour du soleil. On étudie ces mouvements dans le référentiel héliocentrique et on ne considère que l'attraction gravitationnelle du soleil.

On représente ci-contre l'allure des orbites de la Terre T, de Tchouri T_c et de la dernière orbite de Rosetta R_o autour du soleil S.

(a) Déterminer et calculer la période de révolution de Tchouri, notée T_{Tc}, ainsi que sa vitesse à son périhélie et à son aphélie, notées respectivement r_{Tcp} et r_{Tca}.

(b) La sonde étant initialement sur une orbite quasi-circulaire de rayon qu'on considérera égal à R_T, on modifie (par une méthode qu'on étudiera plus loin) la vitesse de Rosetta quand elle passe au point I. On note v_I sa norme à l'issue de cette manœuvre et v_{pTc} la vitesse de Tchouri à son périhélie. Sur la figure ci-contre v_I est-elle supérieure ou inférieure à v_{pTc} ? On justifiera soigneusement l'affirmation.



(c) Comparer, pour la situation ci-dessus, la période de Rosetta à T_{Tc}. Que peut-on en conclure concernant la position de Tchouri au moment de la manœuvre si on veut que Rosetta et Tchouri se rencontrent au point I′ ?

(d) Déterminer et calculer $v_I^2 - v_T^2$ si la période de l'orbite de Rosetta à l'issue de la manoeuvre avait été égale à T_{Tc}.

III Assistance gravitationnelle

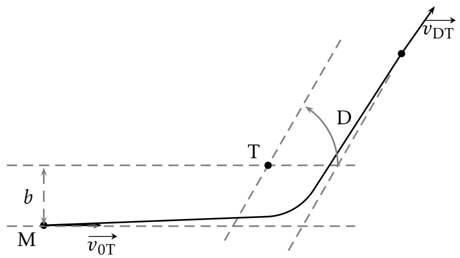
Cette technique consiste à utiliser le passage de Rosetta à proximité de la Terre pour augmenter ou diminuer sa vitesse dans le référentiel héliocentrique $\mathcal{R}_S$. Le mouvement de Rosetta est affecté par la Terre pendant un temps suffisamment court, et la Terre est suffisamment massive, pour qu'on puisse considérer que le mouvement dans $\mathcal{R}_S$ de la Terre (de position T et de masse m_T) est, pendant cette manoeuvre, rectiligne uniforme à une vitesse qu'on notera $\vec{v}_T$.

III.1. On étudie le mouvement de Rosetta dans le référentiel géocentrique, noté $\mathcal{R}_T$, en translation à $\vec{V}$ par rapport à $\mathcal{R}_S$. On note $\overrightarrow{v_{0T}}$ le vecteur vitesse de Rosetta quand elle est loin de la Terre et se dirige vers celle-ci et b son paramètre d'impact.

(a) Quelle est la nature de son mouvement quand elle est loin de la Terre et qu'elle s'en approche. Même question quand elle en est loin et s'en éloigne.

(b) On note $\overrightarrow{v_{DT}}$ son vecteur vitesse quand elle en est loin et s'en éloigne. Que vaut v_{DT} ?

(c) On nomme «déviation», notée D, l'angle entre $\overrightarrow{v_{0T}}$ et $\overrightarrow{v_{DT}}$. Préciser sans calculs pour quelles conditions initiales on aura D = 0 et pour quelles conditions initiales on aura D = π.



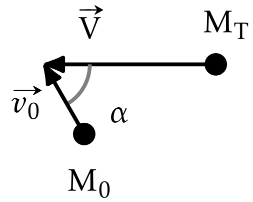
(d) On admet que D ne dépend que des paramètres $b, v_{0T}, \mathcal{G}$ et m_T. Former un nombre son dimension β à partir de ces grandeurs et proposer une fraction rationnelle F(β) de degré 1 en β telle que :

$$\cos(D) = F(\beta).$$

III.2. On désigne par $\overrightarrow{v_0}$ le vecteur vitesse initial de la sonde dans le référentiel héliocentrique et $\overrightarrow{v_{0T}}$ celui dans le référentiel $\mathcal{R}_T$.

(a) Reproduire la figure ci-contre et y représenter la construction de $\overrightarrow{v_{0T}}$ à partir du point M_0.

(b) On note D la déviation subie par la sonde dans $\mathcal{R}_T$ et $\overrightarrow{v_{1T}}$ sa vitesse dans $\mathcal{R}_T$ à l'issue de la déviation. Représenter $\overrightarrow{v_{1T}}$ sur la figure. On le fera pointer vers le point M_T et on choisira D de l'ordre de 120° (sens trigonométrique). En déduire la construction de la vitesse dans $\mathcal{R}_S$ à l'issue de la déviation, notée $\overrightarrow{v_1}$, et vérifier qu'on accélère ainsi la sonde dans $\mathcal{R}_g$.



(c) Représenter sur le schéma la configuration rendant la norme v_1 maximale quand l'angle $\alpha = \left(\widehat{\overrightarrow{v_0};\vec{V}}\right)$ reste fixé. On note $v_{1\max}$ la norme correspondante. Établir l'expression de $v_{1\max}$ en fonction de V, v_0 et de α quand v_1 est maximale.

III.3. (a) On considère le cas particulier $v_0 = 0$. Déterminer $v_{1\max}$. On pourra s'aider d'un schéma si l'expression générale n'a pas été établie.

(b) On considère le cas particulier $v_0 = V$. Déterminer l'expression de $\frac{v_{1\max} - V}{V}$ pour $\alpha \ll 1$. On effectuera un développement limité en α au terme non nul d'ordre le plus bas.

III.4. Après son lancement le 2 mars 2004, Rosetta recroise pour la première fois la Terre un an plus tard. À l'issue de la phase d'assistance gravitationnelle, la NASA [i] annonce que sa vitesse s'est accrue de $3{,}8\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$. En supposant qu'on était dans la configuration réalisant $v_{1\max}$, déterminer et calculer la valeur de l'angle entre les trajectoires de Rosetta et de la Terre avant la manœuvre.

Problème 2 : Étude d'un congélateur

L'énoncé comporte un graphique (figure 1) à rendre avec la copie. On n'hésitera pas à l'annoter et à s'y référer dans la copie.

On étudie un congélateur dans lequel le tétrafluoroéthane (CF_3CH_2F) subit des transformations cycliques en écoulement permanent.

On utilise le diagramme P, h de la figure 1 représentant les isothermes, les isochores les isentropiques de l'air et les isotitres (courbes de titre massique en vapeur constant) dans le plan des coordonnées pression (P) et enthalpie massique (h).

I Généralités

I.1. Comment varie l'enthalpie d'un fluide lors de sa vaporisation monobare ? En déduire les domaines du liquide, de la vapeur sèche et du mélange diphasé.

I.2. Lire sur le diagramme l'enthalpie massique de vaporisation du fluide à 0 °C ainsi que son entropie massique de changement d'état à la même température. Calculer leur quotient et commenter.

I.3. Justifier la forme des isothermes dans le domaine du fluide diphasé.

i. National Aeronautics and Space Administration

I.4. Quelle est la forme des isothermes pour les valeurs de h élevées et de P faibles dans le domaine du gaz. Commenter.

II Cycle du congélateur en fonctionnement

Le fluide parcourt le cycle suivant.

$1 \to 2$ Le fluide est initialement un liquide saturant à la pression $P_1 = 10\,\text{bar}$. Il subit une détente qu'on considère adiabatique dans le détendeur qui ne lui fournit aucun travail. Sa pression est alors $P_2 = 1\,\text{bar}$.

$2 \to 3$ Le fluide est entièrement vaporisé de manière isobare au voisinage de la source froide jusqu'à obtenir une vapeur saturante.

$3 \to 4$ Le fluide est comprimé de manière adiabatique et réversible jusqu'à la pression P_1 dans le compresseur.

$4 \to 1$ Le fluide est entièrement liquéfié de manière isobare au voisinage de la source chaude jusqu'à l'état initial.

II.1. (a) Représenter le cycle sur le diagramme. Relever les températures de chacun des points ainsi que la composition du fluide dans l'état 2.

(b) Déterminer les transferts thermiques massiques reçus de la source chaude (nommé q_c) et la source froide (nommé q_f), ainsi que le travail utile massique fourni par le compresseur.

II.2. (a) Proposer une définition de l'efficacité du cycle et calculer sa valeur en fonction des grandeurs déterminées précédemment.

(b) Établir l'expression de l'efficacité de Carnot d'une machine frigorifique pour un cycle réversible entre une source chaude à une température T_c et une source froide à une température T_f en fonction de T_c et T_f.

(c) L'évaporateur est en contact avec l'intérieur du congélateur de température $\theta_g = -18\,°\text{C}$, et le condenseur avec l'atmosphère à $\theta_e = 20\,°\text{C}$. En déduire la valeur de l'efficacité de Carnot et comparer au résultat de **II.2a**. Commenter.

(d) Les valeurs de θ_g et θ_e permettent-elles le fonctionnement du congélateur ?

II.3. On mesure une consommation électrique du compresseur de $\mathcal{P} = 200\,\text{W}$ et le circuit utilise une masse de fluide $m = 120\,\text{g}$. En déduire la durée, notée D, d'un cycle.

II.4. En raison de l'isolation thermique imparfaite de l'intérieur du congélateur, il existe un transfert thermique de réchauffement de l'extérieur vers la source froide dont on note Q_r la valeur sur la durée D d'un cycle du fluide.

(a) Déterminer la valeur de Q_r.

(b) On admet que le transfert de réchauffement δQ_r pendant un temps dt s'exprime, en fonction de la température extérieure θ_e stationnaire et de la température θ_g de l'intérieur du congélateur selon :

$$\delta Q_r = h_r(\theta_e - \theta_g)\,dt.$$

Déterminer la valeur de la constante h_r et en déduire la puissance consommée en régime stationnaire par le congélateur quand on veut maintenir $\theta_g = -18\,°\text{C}$ avec une température extérieure $\theta_e = 30\,°\text{C}$.

III Énergie consommée

On souhaite congeler une masse $m_c = 3\,\text{kg}$ initialement à $\theta = \theta_e = 20\,°\text{C}$.

III.1. Déterminer le travail électrique nécessaire en utilisant le congélateur ainsi que la durée de congélation.

III.2. Mêmes questions en utilisant une machine de Carnot dont la source chaude serait l'atmosphère à θ_e = cste et dont la source froide serait la masse m_c d'eau, dont la température décroît au cours du fonctionnement. Commenter

Données : capacité thermique massique de l'eau liquide : $c_{H2O} = 4{,}2\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$; capacité thermique massique de la glace : $c_{H2O} = 2{,}1\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ enthalpie massique de fusion de l'eau liquide à 0 °C : $\ell_f = 330\,\text{J}\cdot\text{g}^{-1}$.

Problème 3 : Minerai d'Uranium

L'énoncé comporte un graphique (figure 2) à rendre avec la copie. On n'hésitera pas à l'annoter et à s'y référer dans la copie.

On étudie l'oxydation du minerai d'uranium naturel, nommé pechblende, principalement constitué d'U_3O_8. Une des étapes du traitement est l'attaque par une solution d'acide sulfurique (H_2SO_4) en présence de chlorate de sodium ($Na^+ + ClO_3^-$).

1. (a) Quels sont les degrés d'oxydation de l'uranium dans les oxydes UO_2 et UO_3 ?

   (b) Déterminer les proportions de chacun de ces oxydes dans la penchblende U_3O_8.

2. En présence d'eau, on considérera les espèces $U_{(s)}$, U^{3+}, U^{4+}, UO_2^{2+}, $U(OH)_{4\,(s)}$ et $UO_2(OH)_{2\,(s)}$. La figure 2 présente le diagramme de Pourbaix de ces différentes espèces. La concentration totale en espèces dissoutes est $c = 1\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ et les frontières correspondent à l'équirépartition de l'élément U en phase aqueuse.

   (a) Donner les nombres d'oxydation de l'élément U dans les espèces précédentes.

   (b) Attribuer à chaque espèce son domaine, et préciser s'il s'agit d'un domaine d'existence ou de prédominance.

   (c) Déterminer les potentiels standard d'oxydoréduction des couples :

   $$UO_2^{2+}/U^{4+} \quad U^{4+}/U^{3+} \quad U^{3+}/U_{(s)}.$$

   (d) Déterminer le produit de solubilité de $U(OH)_{4\,(s)}$.

   (e) Déterminer les pentes des segments séparant les domaines 2 et 6 d'une part et 1 et 6 d'autre part.

   (f) Que représente le point A. Écrire la réaction que subit U^{3+} au delà de ce point.

3. (a) Déterminer l'expression du potentiel de Nersnt du couple ClO_3^-/Cl^- en fonction du pH et superposer le graphe correspondant au diagramme de l'uranium.

   (b) Sachant qu'on se place en excès de chlorate de sodium et d'acide sulfurique, sous quelle forme trouve-t-on l'uranium à l'issue de cette étape. Qu'aurait-on obtenu si on n'avait pas utilisé de chlorate de sodium ?

(c) Écrire les équations des réactions de UO_3 d'une part et de UO_2 d'autre part avec la solution d'acide sulfurique et de chlorate de sodium.

(d) Quel doit être le pH pour que les produits avec le chlorate de sodium soient en phase aqueuse. En déduire les quantités minimales d'acide sulfurique et de chlorate de sodium nécessaire par mole de U_3O_8.

Données :

- Potentiel standard du couple $E°(ClO_3{}^-/Cl^-) = 1{,}5\,V$.
- La première acidité de l'acide sulfurique H_2SO_4 est forte, $pK_a(HSO_4{}^-/SO_4{}^{2-}) = 1{,}9$.

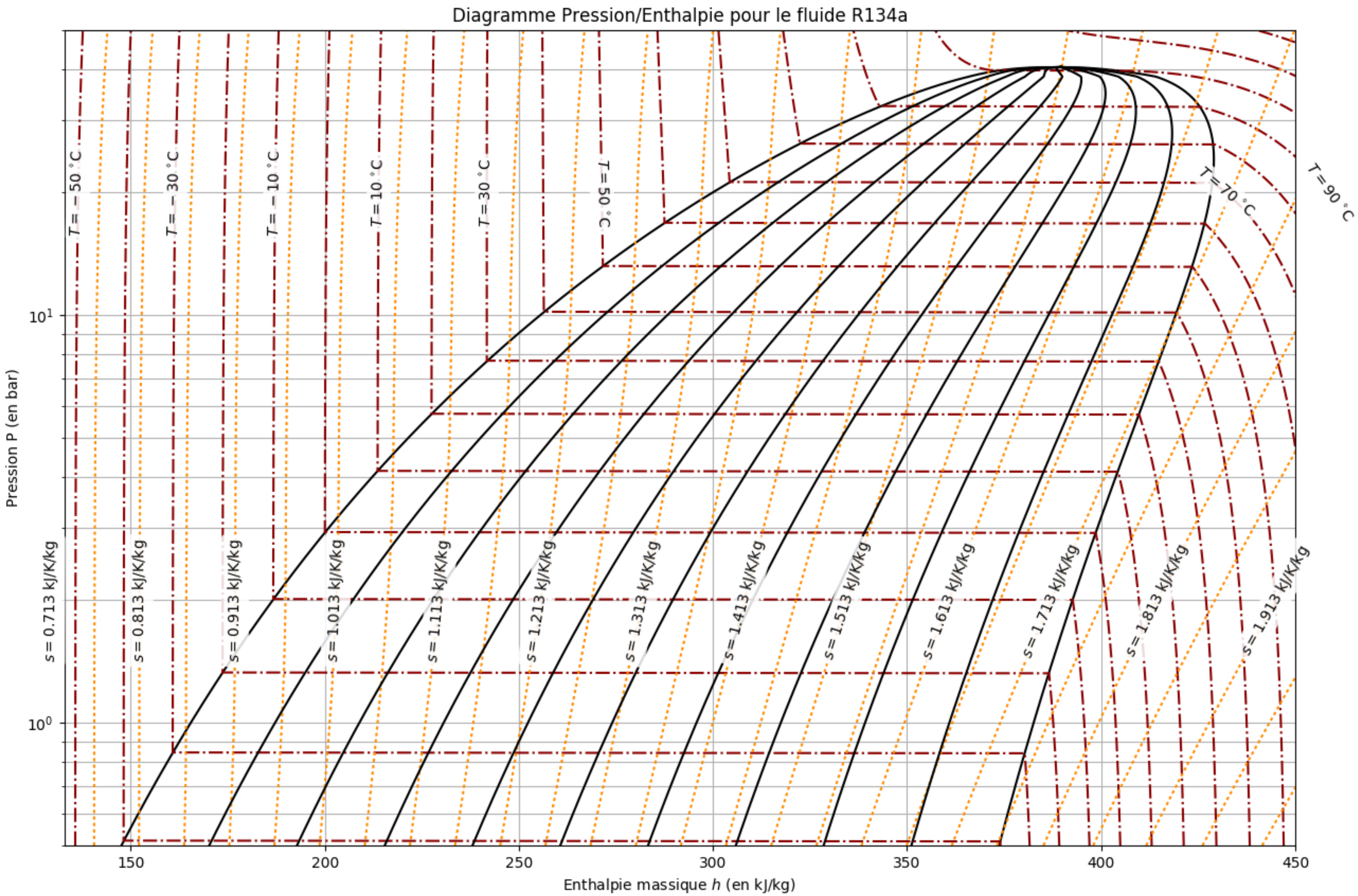


Figure 1 – Diagramme pression (P)-enthalpie massique (h) du fluide R134a. On y a représenté les courbes d'entropie massique constante (légendées $s = \ldots$ en $kJ \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}$), les courbes de température constante (légendées T = … en °C).

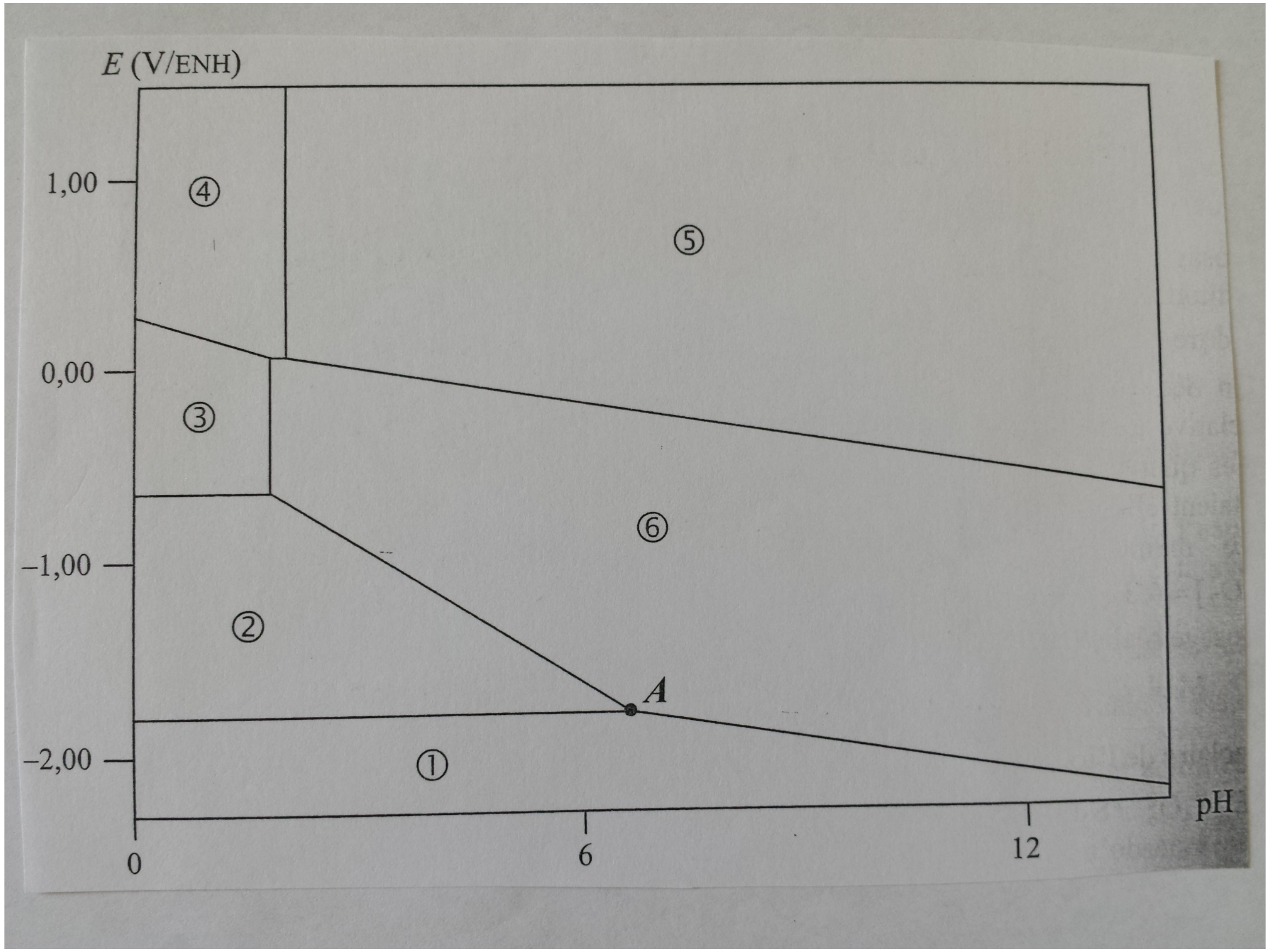


FIGURE 2 – Diagramme de Pourbaix de l'élément uranium. La concentration totale en espèces dissoutes est $c = 1\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$ et les frontières correspondent à l'équirépartition de l'élément U en phase aqueuse.