

## Nature

**Modèle**

L'espace physique est décrit comme un ensemble de points  $M_i$ . On définit *expérimentalement* la **distance** entre deux points  $M_i M_j$  et on pose en principe que l'ensemble des  $M_i$  forme un espace euclidien de dimension 3 :

- à tout couple de points  $(M_i ; M_j)$ , on associe un vecteur noté  $\overrightarrow{M_i M_j}$  : l'ensemble de ces vecteurs forme un espace vectoriel de dimension 3,

- il existe un produit scalaire dont dérive la **distance** définie précédemment :

$$M_i M_j = \sqrt{\underbrace{\overrightarrow{M_i M_j} \cdot \overrightarrow{M_i M_j}}_{\text{produit scalaire}}}$$

On nomme **longueur**, notée  $L$ , la dimension d'une distance dans l'espace.

## Repère et base

**Définition : Solide**

Un **solide** est un ensemble de points  $M_i$  dont les distances deux à deux sont stationnaires :  $M_i M_j = \text{cste}$  en fonction du temps.

**Définition : Repère**

Un **repère** de l'espace est constitué d'un point  $O$ , nommé **origine** du repère et d'une base  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  de l'espace vectoriel **liés** à un solide  $S$  dit de référence.

La position d'un point  $M$  dans le repère  $(O, \mathcal{B})$  est donnée par ses **coordonnées**  $x_1, x_2, x_3$  telles que :

$$\overrightarrow{OM} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3.$$

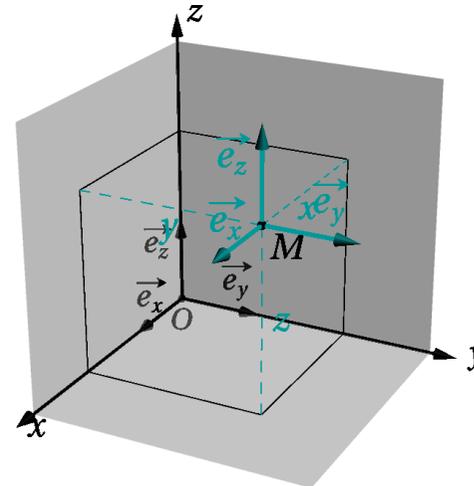
On utilisera des bases **orthonormées directes** dont les vecteurs :

**sont normés**  $|\vec{e}_i| = 1$  sans dimension,

**sont 2 à 2 orthogonaux**  $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0 \forall i \neq j$ ,

**forment un trièdre direct**  $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2$

## Base cartésienne



## Nature et mesure

**Définition : Durée**

On définit expérimentalement la *durée* entre deux instants au moyen d'une *horloge* dans laquelle se reproduit périodiquement le même phénomène.

Pour repérer l'instant d'un phénomène physique, on utilise une échelle de temps définie par une origine des temps et orientée dans le sens des temps croissants.

- fondé sur le postulat d'un écoulement uniforme : un phénomène prendra toujours le même temps pour se répéter.
- cadrans solaires, pendule, oscillations électroniques...

**Unité légale****Définition : Seconde**

L'unité légale de durée est la *seconde*, de symbole  $s$ , définie comme la durée de 9192631770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium  $^{133}\text{Cs}$ .

- entre deux niveaux d'énergie  $E_1$  et  $E_2$  de Cs, émission et absorption de photons de fréquence  $\nu = |E_2 - E_1|/h$  (constante de Planck  $h = 6,626\,069\,3(11) \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ).
- précision relative :  $\simeq 1 \cdot 10^{-15}$ , ie une seconde tous les 30 millions d'années.

**Référentiel et temps absolu****Définition : Référentiel**

Un référentiel  $\mathcal{R}$  est constitué d'un solide de référence et d'une horloge. Un repère lié au solide de référence est nommé *repère cartésien* attaché à  $\mathcal{R}$ . On choisit trois vecteurs  $\vec{e}_x, \vec{e}_y$  et  $\vec{e}_z$  formant une base orthonormée directe et  $O$  un point fixe du repère, qu'on notera alors  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

- $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  fixes dans  $\mathcal{R}$  *par définition*

- 🧑 il existe des repères *mobiles* dans  $\mathcal{R}$

**Principe du temps absolu**

Le temps est *absolu* : il s'écoule de la même manière dans tous les référentiels en mécanique newtonienne.

**Trajectoire****Définition : Trajectoire**

Soit  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  un repère. La *trajectoire* dans ce repère d'un point  $M$  est la courbe de l'ensemble des positions  $(x_1, x_2, x_3)$  de  $M$  au cours du temps.

On peut la caractériser au moyen de deux équation  $f(x_1, x_2, x_3) = 0$  et  $g(x_1, x_2, x_3) = 0$  vérifiées simultanément par les coordonnées  $x_1, x_2, x_3$ .

**Équations du mouvement****Définition : Équations du mouvement**

Soit  $\mathcal{R}$  un référentiel muni d'un repère  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  quelconque et  $M$  un point en mouvement dans  $\mathcal{R}$ .

- L'équation  $\overline{OM} = \vec{H}(t)$  est l'*équation paramétrique* du mouvement.
- Les équations  $x_1 = h_1(t), x_2 = h_2(t), x_3 = h_3(t)$  sont les *équations paramétriques* du mouvement.

**Vecteurs position et vitesse**

**Définition : Vecteurs position et vitesse**

Soit  $M$  un point et  $\mathcal{R}$  un référentiel dont  $O$  est un point *fixe* quelconque.

On nomme *vecteur position de  $M$  dans  $\mathcal{R}$*  le vecteur  $\overrightarrow{OM}$ .

Le *vecteur vitesse*, ou *vitesse de  $M$  dans  $\mathcal{R}$*  à l'instant  $t$ , noté  $\vec{v}_{\mathcal{R}}$ , est la dérivée temporelle, par rapport à  $\mathcal{R}$ , du vecteur position à l'instant  $t$  :

$$\begin{aligned}\vec{v}_{\mathcal{R}} &= \left( \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t + \Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{M(t)M(t + \Delta t)}}{\Delta t} \quad \text{aussi noté: } \left( \frac{dM}{dt} \right)_{\mathcal{R}}.\end{aligned}$$

Il est *tangent* à la trajectoire au point  $M(t)$ .

**Vecteur accélération****Définition : Vecteur accélération**

Le *vecteur accélération*, ou *accélération de  $M$  dans  $\mathcal{R}$*  à l'instant  $t$ , noté  $\vec{a}_{\mathcal{R}}$ , est la dérivée temporelle, par rapport à  $\mathcal{R}$ , du vecteur vitesse à l'instant  $t$  :

$$\begin{aligned}\vec{a}_{\mathcal{R}} &= \left( \frac{d\vec{v}_{\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left( \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}_{\mathcal{R}}(t + \Delta t) - \vec{v}_{\mathcal{R}}(t)}{\Delta t} \quad \text{aussi noté: } \left( \frac{d^2M}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}}.\end{aligned}$$

**Vitesse relative****Définition : Vitesse relative**

Les vitesses dans un référentiel  $\mathcal{R}$  de deux points  $A$  et  $B$  vérifient :

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(B) - \vec{v}_{\mathcal{R}}(A) = \left( \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}.$$

**Définition : Trajectoire dans l'espace des phases**

Pour un mouvement *unidimensionnel* selon l'axe cartésien  $Ox$  d'un référentiel  $\mathcal{R}$ , la *trajectoire dans l'espace des phases* d'un point  $M$  de position  $x(t)$  et de vitesse  $v_x = \frac{dx}{dt}$  est l'ensemble des points de coordonnées  $(x(t), v_x(t))$ .

**Caractéristiques**

- la trajectoire dans l'espace des phases est parcourue dans le sens horaire.
- elle intersecte l'axe  $v_x = 0$  orthogonalement (si l'accélération  $a_x$  est alors non nulle).
- pour un mouvement à  $n$  dimensions, elle peut être définie dans un espace à  $2n$  dimensions mais est difficile à représenter

**Relativité restreinte****Invariance de  $c$  (Einstein 1905)**

La vitesse de la lumière dans le vide est la même dans toute une classe de référentiels dits *galiléens*. Elle vaut par définition  $c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**Temps et longueurs non absolus**

Le temps et les longueurs ne sont plus absolus en relativité restreinte : ils dépendent du référentiel dans lequel ils sont mesurés.

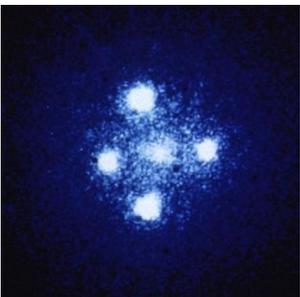
**Dilatation des durées** La *durée* entre deux évènements est *supérieure* dans un référentiel galiléen où ces évènements se produisent *en des lieux différents* à ce qu'elle est dans un référentiel galiléen où ils se produisent *au même lieu*.

**Contraction des longueurs** La *distance* entre les lieux où se produisent deux évènements est *inférieure* dans un référentiel galiléen où ces évènements *ne sont pas simultanés* à ce qu'elle est dans un référentiel galiléen où ils sont *simultanés*.

**Relativité générale (Einstein 1915)****Espace-temps non euclidien**

En *relativité générale*, l'interaction gravitationnelle est décrite en faisant intervenir un espace-temps *non euclidien*, déformé par les masses.

En particulier, la lumière ne se propage *pas en ligne droite* dans le vide en *présence d'objets massifs*.

**Dualité onde-corpuscule****Dualité onde-corpuscule**

Tout objet physique présente à la fois des caractéristiques corpusculaires et ondulatoires.

**Délocalisation****Longueur d'onde de de Broglie (1924)**

La description en termes de trajectoire n'est plus pertinente en mécanique quantique. À chaque instant, une particule ne peut pas être localisée en un point ni sa vitesse être parfaitement définie ; elle est délocalisée sur une taille de l'ordre de sa longueur de de Broglie  $\lambda_{dB} = h/p$ , avec  $p$  sa quantité de mouvement.

**Coordonnées cartésiennes****Définition : Coordonnées cartésiennes**

Les composantes cartésiennes (*ie* dans un repère cartésien), des vecteurs vitesses  $\vec{v}_{\mathcal{R}}$  et accélération  $\vec{a}_{\mathcal{R}}$  d'un point s'expriment par simples dérivations de ses coordonnées cartésiennes :

$$\vec{v}_{\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z \quad \vec{a}_{\mathcal{R}} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z.$$

**Construction****Orientation des angles**

Dans un plan  $\mathcal{P}$  défini par un vecteur normal  $\vec{e}_z$ , on oriente les angles  $\theta$  selon la règle de la main droite (ou gauche) / du tournevis.

**Coordonnées cylindriques**

La position d'un point  $M$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$  est repérée en coordonnées *cylindriques d'axe*  $\Delta = (O, \vec{e}_z)$ , fixe dans  $\mathcal{R}$  de repère cartésien  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  :

- par sa *distance*  $r = M_z M \geq 0$  à l'axe, avec  $M_z$  son projeté orthogonal sur  $\Delta$ ,
- par l'*angle*  $\theta = (\vec{e}_x, \overrightarrow{M_z M})$ , orienté par  $\Delta$  exprimé en radians.
- par la *mesure algébrique*  $z \geq 0$  telle que  $\overrightarrow{OM_z} = z\vec{e}_z$ .

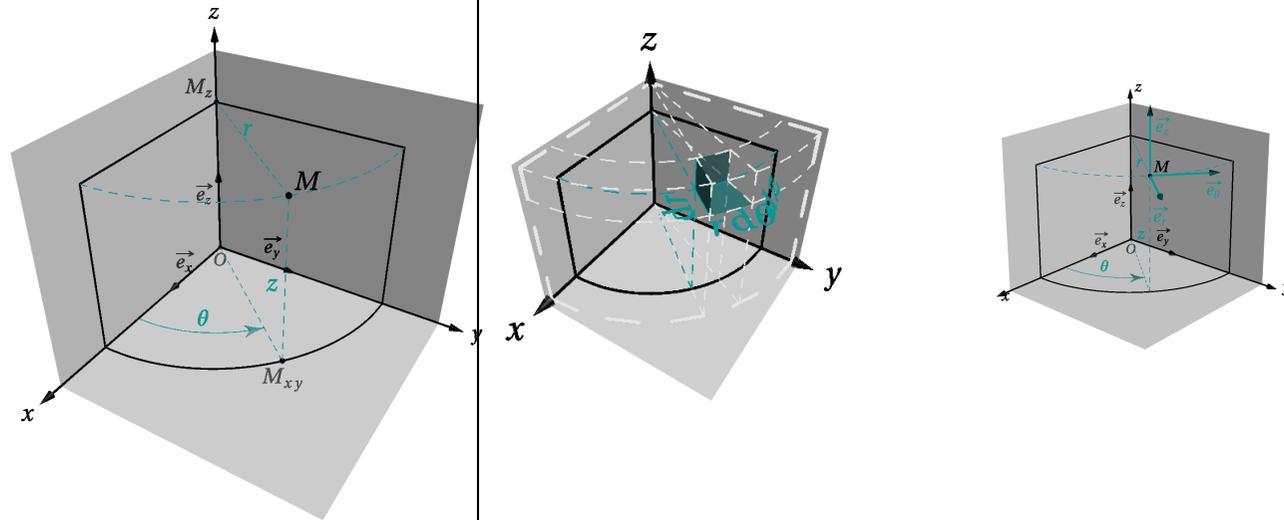
**Déplacements élémentaires**

- $\vec{e}_r$  dirige les déplacements quand *seul*  $r$  *varie*, ie le long du *rayon* passant par  $M$  (défini par  $\overrightarrow{M_z M}$ )
- $\vec{e}_\theta$  dirige les déplacements quand *seul*  $\theta$  *varie*, ie le long du *cercle d'axe*  $Oz$  *et passant par*  $M$  ( $\vec{e}_\theta = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r$ )
- $\vec{e}_z$  dirige les déplacements quand *seul*  $z$  *varie*, ie le long de la *verticale passant par*  $M$ .

**Illustration****Lien avec les cartésiennes**

Les coordonnées cylindriques et cartésiennes sont reliées par :

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta & y &= r \sin \theta & z &= z \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} & \tan \theta &= y/x. \end{aligned}$$

**Repère mobile****Définition : Base cylindrique**

On définit la *base cylindrique*  $(O, \vec{e}_r(\theta), \vec{e}_\theta(\theta), \vec{e}_z)$  orthonormée directe liée au point  $M(r, \theta, z)$ . On a  $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$ .

**Vecteurs cinématiques**

**Vecteurs cinématiques**

Les vecteurs  $\vec{e}_r(\theta)$ ,  $\vec{e}_\theta(\theta)$  sont *mobiles* dans  $\mathcal{R}$  : leur direction dépend de l'angle  $\theta$  repérant le point  $M$ . Ils vérifient :

- $\frac{d\vec{e}_r(\theta)}{d\theta} = \vec{e}_r(\theta + \pi/2) = \vec{e}_\theta(\theta)$ , et donc  $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$
- $\frac{d\vec{e}_\theta(\theta)}{d\theta} = \vec{e}_\theta(\theta + \pi/2) = -\vec{e}_r(\theta)$ , et donc  $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r$

Les vecteurs cinématiques du point  $M$  s'y expriment selon :

- $\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$
- $\vec{v}_R = \underbrace{\dot{r}\vec{e}_r}_{\text{radiale}} + \underbrace{r\dot{\theta}\vec{e}_\theta}_{\text{orthoradiale}} + \underbrace{\dot{z}\vec{e}_z}_{\text{verticale}}$
- $\vec{a}_R = \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)}_{\text{radiale}}\vec{e}_r + \underbrace{(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})}_{\text{orthoradiale}}\vec{e}_\theta + \underbrace{\ddot{z}\vec{e}_z}_{\text{verticale}}$

**Construction****Définition : Coordonnées sphériques**

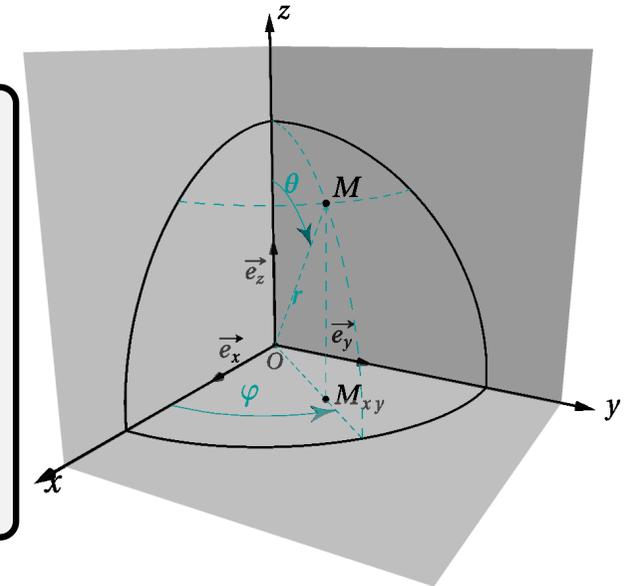
La position d'un point  $M$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$  est repérée en *coordonnées sphériques d'origine*  $O$  fixe dans  $\mathcal{R}$  de repère cartésien  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  :

- par sa *distance*  $r = OM \geq 0$  à l'origine,
- par l'*angle*  $\theta$ , nommé colatitude ou angle zénithal, défini par  $\theta = (\vec{e}_z, \vec{e}_r)$ . L'angle  $\theta$  est compris dans l'intervalle  $[0, \pi]$ .
- l'*angle*  $\varphi$ , nommé longitude ou angle azimutal, défini à l'aide du projeté orthogonal de  $M$  dans le plan  $Oxy$  par  $\varphi = (\vec{e}_x, \vec{OM}_{xy})$  et  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . L'angle  $\varphi$  est orienté, dans le plan  $Oxy$ , par  $\vec{e}_z$ .

**Illustration****Lien avec les cartésiennes**

Les coordonnées sphériques et cartésiennes sont reliées par :

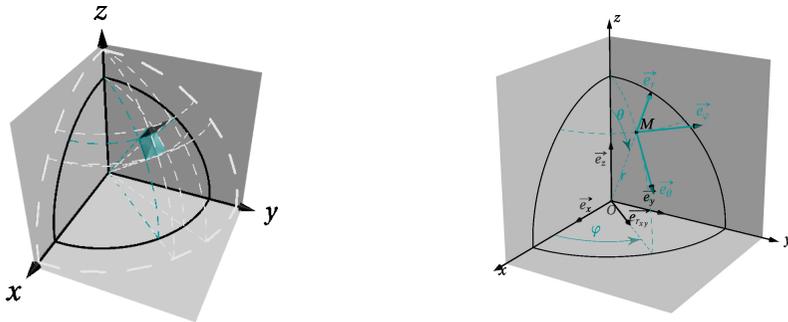
$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \varphi \\y &= r \sin \theta \sin \varphi \\z &= r \cos \theta \\r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \tan \varphi &= \frac{y}{x} \\ \theta &= \arccos\left(\frac{z}{r}\right)\end{aligned}$$

**Repère mobile****Définition : Base sphérique**

On définit la *base sphérique*  $(O, \vec{e}_r(\theta, \varphi), \vec{e}_\theta(\theta, \varphi), \vec{e}_\varphi(\theta, \varphi))$  orthonormée directe liée au point  $M(r, \theta, \varphi)$ . On a  $\vec{OM} = r\vec{e}_r$ .

**Déplacements élémentaires**

- $\vec{e}_r$  dirige les déplacements quand *seul*  $r$  varie, ie le long du *rayon passant par*  $M$  (défini par  $\vec{e}_r = \vec{OM} \cdot \frac{1}{r}$ )
- $\vec{e}_\theta$  dirige les déplacements quand *seul*  $\theta$  varie, ie le long du *méridien passant par*  $M$  (défini par  $\vec{e}_\theta = \vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_r$ )
- $\vec{e}_\varphi$  dirige les déplacements quand *seul*  $\varphi$  varie, ie le long du *cercle de latitude constante passant par*  $M$  (défini par  $\vec{e}_\varphi = \vec{e}_z \wedge \vec{OM}_z \cdot \frac{1}{OM_z}$ )



Vecteurs cinématiques

**Vecteurs cinématiques**

Les vecteurs cinématiques du point  $M$  s'y expriment selon :

- $\vec{OM} = r\vec{e}_r$
- $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin(\theta)\dot{\phi}\vec{e}_\phi$

Variations élémentaires en cartésiennes

**Variations élémentaires en cartésiennes**  
On a :

$$d\vec{M} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$$

$$dS_x = dy dz \quad dS_y = dx dz$$

$$dS_z = dx dy$$

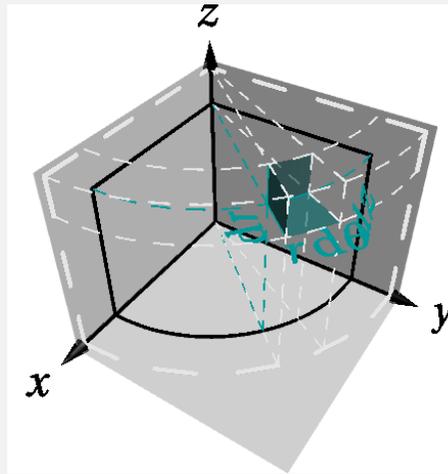
$$dV = dx dy dz$$

Variations élémentaires en cylindriques

## Variations élémentaires en cylindriques

On a :

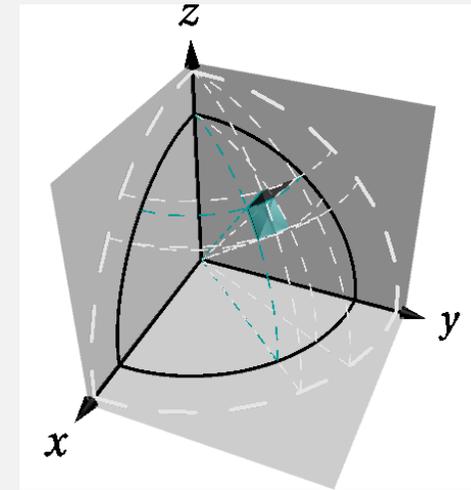
$$\begin{aligned}d\vec{M} &= dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z \\dS_r &= r d\theta dz \quad dS_\theta = dr dz \\dS_z &= r dr d\theta \\dV &= r dr d\theta dz\end{aligned}$$



## Variations élémentaires en sphériques

On a :

$$\begin{aligned}d\vec{M} &= dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi \\dS_\varphi &= r dr d\theta \\dS_\theta &= r \sin\theta dr d\varphi \\dS_r &= r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \\dV &= r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi\end{aligned}$$

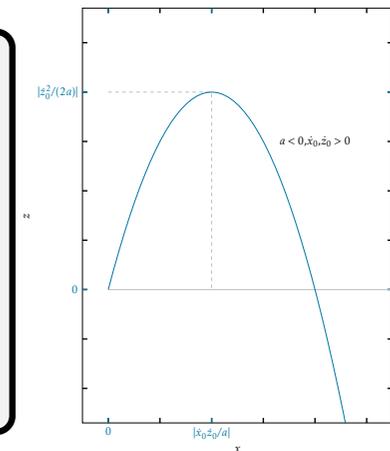


## Variations élémentaires en sphériques

## Mouvement uniformément accéléré

## Mouvement uniformément accéléré

- Un mouvement d'**accélération uniforme**  $\vec{a}_{\mathcal{R}} = a\vec{e}_z$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , est **inscrit dans le plan**  $(M(0), \vec{v}(0), \vec{a}_{\mathcal{R}})$ .
- La trajectoire est une **parabole** d'axe  $\propto \vec{e}_z$ , de concavité tournée dans le sens opposé à  $\vec{a}_{\mathcal{R}}$ .
- Pour  $\vec{a}_{\mathcal{R}} = \vec{0}$  le mouvement est **rectiligne uniforme**.



## Mouvement plan circulaire

## Mouvement plan circulaire

- La vitesse d'un point  $M$  animé d'un *mouvement plan circulaire* de rayon  $R = cste$  dans  $\mathcal{R}$  est *orthoradiale*  $\vec{v}_{\mathcal{R}} = v_{\theta} \vec{e}_{\theta} = R \dot{\theta} \vec{e}_{\theta}$ .

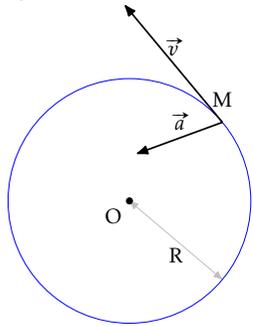
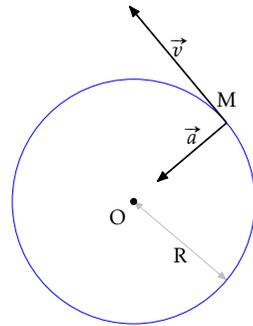
- L'accélération est *centripète* (dirigée vers le centre) et donnée par :

$$\vec{a}_{\mathcal{R}} = -R \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + R \ddot{\theta} \vec{e}_{\theta} = -\frac{v_{\theta}^2}{R} \vec{e}_r + \frac{dv_{\theta}}{dt} \vec{e}_{\theta}.$$

- Pour un mouvement circulaire *uniforme* de vitesse angulaire  $\dot{\theta} = \omega$  *stationnaire*,

- la *norme* de la vitesse  $\vec{v}_{\mathcal{R}} = R \omega \vec{e}_{\theta} = v_{\theta} \vec{e}_{\theta}$  est *stationnaire*,
- l'accélération  $\vec{a}_{\mathcal{R}} = -R \omega^2 \vec{e}_r = -\frac{v_{\theta}^2}{R} \vec{e}_r$  est *radiale*, de norme *elle aussi stationnaire*.

## Trajectoire

Cas  $v_{\theta} \neq cste$ Cas  $v_{\theta} = cste$ 

## Solide en translation

## Définition : Solide en translation

Un solide est dit *en translation* dans un référentiel  $\mathcal{R}$  si à chaque instant tous les points qui le constituent ont le *même vecteur vitesse*.

## Solide en rotation autour d'un axe fixe

## Définition : Solide en rotation autour d'un axe fixe

Un solide  $S$  est dit *en rotation autour d'un axe  $\Delta$  fixe* dans un référentiel  $\mathcal{R}$  si le solide reste *lié* à l'axe  $\Delta$  au cours de son mouvement.

## Vitesse angulaire

## Définition : Vitesse angulaire

Le mouvement de tout point  $M$  d'un *solide  $S$  en rotation autour d'un axe fixe  $\Delta$*  est *circulaire* autour de l'axe  $\Delta$ . Il existe de plus une pulsation  $\omega(t)$  commune à tous les points  $M$ , nommée *vitesse angulaire de rotation autour de l'axe  $\Delta$*  et telle que le vecteur vitesse est donné, à chaque instant  $t$ , par :

$$\vec{v}(M)(t) = r_M \omega(t) \vec{e}_{\theta M},$$

avec :

- $\vec{e}_{\theta M}$  le vecteur orthoradial des coordonnées cylindriques d'axe  $\Delta$ ,
- $r_M$  la distance de  $M$  à l'axe  $\Delta$ , constante,
- et  $\omega(t)$  la *vitesse angulaire*, indépendante de  $M$ .

## Indispensable

### Indispensable

- Les définitions du mètre et la seconde
- Les notions de repère et de référentiel
- Notions sur le cadre de validité de la mécanique newtonienne
- ♥Les expressions de l'accélération et de la vitesse dans les trois systèmes de coordonnées (sauf l'accélération en sphérique...) ainsi que les démonstrations.
- ♥Exemples de mouvements particuliers.
- Vecteurs vitesse dans un solide en translation, ou en rotation autour d'un axe fixe
- les animations sont consultables à l'adresse suivante: [http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve\\_tulloue/Meca/Cinematique/index.php](http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Cinematique/index.php)