Énergétique du point matériel

Puissance

Définition : Puissance
On définit la ***puissance d'une force*** $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\vec{F})$ exercée par une force $\vec{F}$ sur un point matériel situé en M animé d'une vitesse $\vec{v_{\mathcal{R}}}(M)$ dans un référentiel $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v_{\mathcal{R}}}(M).$$

Travail élémentaire

Définition : Travail élémentaire
On définit le travail ***élémentaire***, noté $\delta W_{\mathcal{R}}(\vec{F})$, fourni par une force $\vec{F}$ s'exerçant sur un point matériel pendant un intervalle de temps infinitésimal dt dans un référentiel $\mathcal{R}$ par :

$$\delta W_{\mathcal{R}}(\vec{F}) = \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\vec{F})\,dt.$$

Travail sur un déplacement fini

Définition : Travail d'une force au cours d'un déplacement fini
Pour un déplacement ***fini*** d'une position M_1 à une position M_2 le long d'une courbe $\mathcal{C}$, le travail total est :

$$\underset{M_1 \xrightarrow[\mathcal{C}]{} M_2}{W}(\vec{F}) = \int_{M_1 \xrightarrow[\mathcal{C}]{} M_2} \delta W(\vec{F}) = \int_{M_1 \xrightarrow[\mathcal{C}]{} M_2} \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM}.$$

Caractère moteur ou résistant de l'action d'une force

Définition : Caractère moteur ou résistant de l'action d'une force
L'action d'une force est dite ***motrice*** (resp. ***résistive***) quand la puissance de la force est ***positive*** (resp. ***négative***), c'est-à-dire quand l'angle entre la force et la vitesse est ***aigu*** (resp. ***obtus***). La puissance est nulle quand la force est ***orthogonale*** à la vitesse.

Expressions et cas particuliers

Travail élémentaire
Coordonnées cartésiennes $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{M} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$
Coordonnées cylindriques $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{M} = F_r dr + F_\theta r d\theta + F_z dz$
Coordonnées sphériques $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{M} = F_r dr + F_\theta r d\theta + F_\varphi r \sin\theta d\varphi$

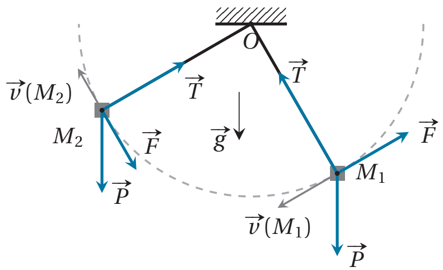
Champ de force $\vec{F}$ uniforme

$$W(\vec{F})_{\mathcal{R}} = \int_{M_1 \xrightarrow[\mathcal{C}]{} M_2} \vec{F} \cdot d\vec{M} = \vec{F} \cdot \int_{M_1 \xrightarrow[\mathcal{C}]{} M_2} d\vec{M} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2}$$

Forces de liaison et de frottement

Puissance et travail des forces de liaison et de frottement

- La puissance, et donc le travail, de la réaction normale $\vec{N}$ d'un support immobile est toujours nulle. C'est également le cas pour la force de tension d'un pendule.
- L'action de la force de frottement $\vec{F}$ exercée par un milieu ou un support immobile est toujours résistive.



Énergie cinétique

Définition : Énergie cinétique
On définit ***l'énergie cinétique*** $\mathcal{E}_{c\mathcal{R}}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ d'un point matériel M animé dans $\mathcal{R}$ de la vitesse $\overrightarrow{v_{\mathcal{R}}}(\mathrm{M})$ par :

$$\mathcal{E}_{c\mathcal{R}} = \frac{1}{2}m\|\overrightarrow{v_{\mathcal{R}}}(\mathrm{M})\|^2 = \frac{\|\overrightarrow{p_{\mathcal{R}}}(\mathrm{M})\|^2}{2m}$$

Théorème de la puissance cinétique

Théorème : de la puissance cinétique
La dérivée par rapport au temps dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$ de l'énergie cinétique d'un point matériel M est égale à la puissance $\mathcal{P}_{\mathcal{R}_g}(\overrightarrow{\mathrm{F}})$ dans $\mathcal{R}_g$ de la résultante $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ des forces qui lui sont appliquées :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}_g}(\overrightarrow{\mathrm{F}}) = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{c\mathcal{R}_g}}{\mathrm{d}t}.$$

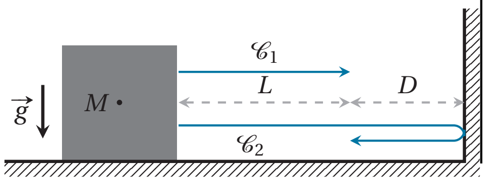
Théorème de l'énergie cinétique

Théorème : de l'énergie cinétique
La variation de l'énergie cinétique dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$ d'un point matériel M situé en M_1 à l'instant t_1 et en M_2 à l'instant t_2 est égale au travail de la résultante $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ des forces qui lui sont appliquées le long du trajet $\mathcal{C}$ entre M_1 et M_2 :

$$\underset{t_1 \to t_2}{\Delta} \mathcal{E}_{c\mathcal{R}_g} = \mathcal{E}_{c\mathcal{R}_g}(t_2) - \mathcal{E}_{c\mathcal{R}_g}(t_1) = \int_{\mathrm{M}_1 \underset{\mathcal{C}}{\to} \mathrm{M}_2} \overrightarrow{\mathrm{F}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}.$$

Exercice : Force de frottement solide

On considère un point matériel de masse m glissant sur un plan horizontal, dans le champ de pesanteur uniforme (d'accélération $\vec{g}$), soumis à des forces de frottement solide.



1. Déterminer les intensités des forces $\overrightarrow{\mathrm{R}}_\perp$ et $\overrightarrow{\mathrm{R}}_\parallel$ quand le point matériel glisse.
2. On envisage deux trajets pour le point matériel. Dans le premier, il parcourt la distance L avant de s'immobiliser. Dans le deuxième, il parcourt une distance L+D, rebondit sur un mur et repart en sens inverse pour s'immobiliser au même point que dans le premier trajet. Déterminer, pour les deux trajets, les expressions :
   - des travaux du poids et de la réaction normale $\overrightarrow{\mathrm{R}}_\perp$,
   - du travail de la réaction tangentielle $\overrightarrow{\mathrm{R}}_\parallel$.

Définition : Force conservative
Une force $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ est dite ***conservative*** si son travail $\mathrm{W}_{\mathrm{M}_1 \to \mathrm{M}_2}(\overrightarrow{\mathrm{F}})$ sur un point matériel se déplaçant d'un point M_1 à un point M_2 ne dépend pas de la trajectoire suivie de M_1 à M_2 mais uniquement des points extrêmaux M_1 et M_2.

De manière équivalente : $\mathrm{W}(\overrightarrow{\mathrm{F}}) = 0$ sur toute trajectoire fermée.

Énergie potentielle

Définition : Énergie potentielle
On peut associer à la force $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ conservative une énergie potentielle $\mathcal{E}_{\mathrm{pot}}(\mathrm{M})$, fonction uniquement de la position M d'un point matériel soumis à $\overrightarrow{\mathrm{F}}$, définie par :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{pot}}(\mathrm{M}) = -\mathrm{W}_{\mathrm{M}_0 \to \mathrm{M}}(\overrightarrow{\mathrm{F}}) = -\int_{\mathrm{M}_0}^{\mathrm{M}} \overrightarrow{\mathrm{F}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}},$$

où M_0 est un point quelconque. On dit que $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ ***«moins» dérive de l'énergie potentielle*** $\mathcal{E}_{\mathrm{pot}}$.

Travail d'une force conservative

Travail d'une force conservative
Le travail d'une force $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ conservative sur un point matériel se déplaçant de la position M_1 à la position M_2 est alors égal à la **diminution** d'énergie potentielle entre M_1 et M_2 :

$$\underset{\mathrm{M}_1\to\mathrm{M}_2}{\mathrm{W}}(\overrightarrow{\mathrm{F}}) = \mathcal{E}_{\mathrm{pot},\overrightarrow{\mathrm{F}}}(\mathrm{M}_1) - \mathcal{E}_{\mathrm{pot},\overrightarrow{\mathrm{F}}}(\mathrm{M}_2).$$

Cas d'un système à un degré de liberté

Énergie potentielle pour un mouvement à un degré de liberté
On associe à $\overrightarrow{\mathrm{F}} = \mathrm{F}_x\overrightarrow{e_x}$ une énergie potentielle $\mathcal{E}_{\mathrm{pot}}(x)$ telle que :

$$\mathrm{F}_x = -\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\mathrm{pot}}}{\mathrm{d}x}.$$

Le travail de $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ de la position x_1 à la position x_2 est :

$$\underset{x_1\to x_2}{\mathrm{W}}(\overrightarrow{\mathrm{F}}) = \mathcal{E}_{\mathrm{pot}}(x_1) - \mathcal{E}_{\mathrm{pot}}(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{F}_x\,\mathrm{d}x.$$

x peut être une cordonnée cartésienne mais aussi un angle en coordonnées polaires

Construction

Définition : Énergie mécanique
On définit l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{\mathrm{m}\mathcal{R}}$ d'un point matériel situé en M dans un référentiel $\mathcal{R}$, soumis à des forces conservatives auxquelles est associée une énergie potentielle $\mathcal{E}_{\mathrm{pot}}(\mathrm{M})$ par :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{m}\mathcal{R}} = \mathcal{E}_{\mathrm{pot}}(\mathrm{M}) + \mathcal{E}_{\mathrm{cin}\mathcal{R}}.$$

Théorème

Théorème : de l'énergie mécanique (forme locale)
Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$, la variation de l'énergie mécanique d'un point matériel est égale au seul travail des forces non conservatives.

En notant $\mathcal{P}_{\mathrm{nc}}$ leur puissance, on a à chaque instant :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\mathrm{m}\mathcal{R}_g}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_g} = \mathcal{P}_{\mathrm{nc}}.$$

Théorème : de l'énergie mécanique (forme globale)
En notant $\underset{\mathrm{M}_1 \underset{\mathcal{C}}{\to} \mathrm{M}_2}{\mathrm{W}_{\mathrm{nc}}}$ le travail total de ces forces non conservatives entre un instant où le point matériel est en M_1, animé dans $\mathcal{R}_g$ d'une vitesse de norme v_1, et un autre instant où il est en M_2 animé d'une vitesse de norme v_2, on a :

$$\Delta\mathcal{E}_{\mathrm{m}\mathcal{R}_g} = \left(\frac{1}{2}mv_2^2 + \mathcal{E}_{\mathrm{pot}}(\mathrm{M}_2)\right) - \left(\frac{1}{2}mv_1^2 + \mathcal{E}_{\mathrm{pot}}(\mathrm{M}_1)\right) = \underset{\mathrm{M}_1 \underset{\mathcal{C}}{\to} \mathrm{M}_2}{\mathrm{W}_{\mathrm{nc}}}.$$

Système conservatif

Définition : Système conservatif
Un système dont l'énergie mécanique se conserve est dit ***conservatif***. Pour un tel système l'équation :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{m}} = cste = \mathcal{E}_{\mathrm{m}0}$$

est nommée ***intégrale première du mouvement***.

Pour un système conservatif, la vitesse du point matériel s'exprime en fonction de sa position selon :

$$v^2 = \frac{2}{m}\left(\mathcal{E}_{\mathrm{m}0} - \mathcal{E}_{\mathrm{pot}}(\mathrm{M})\right)$$

Interprétation de l'énergie potentielle

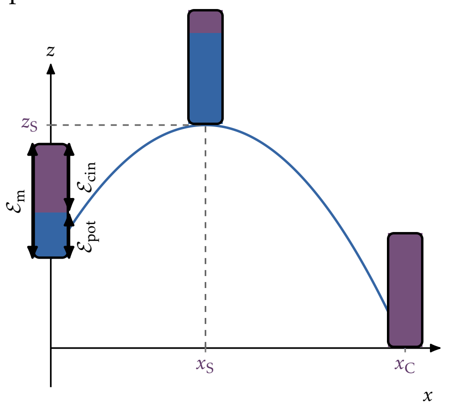
Interprétation de l'énergie potentielle

- Pour un système conservatif :

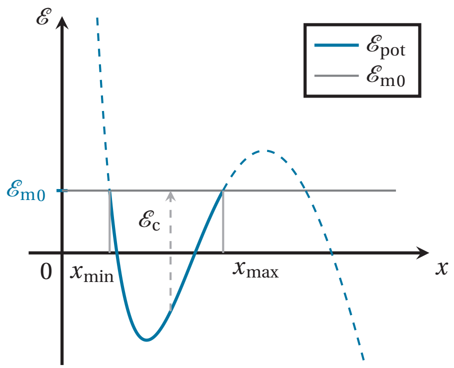
$$\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{cin}} = -\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{pot}}.$$

- Une diminution de $\mathcal{E}_{\text{cin}}$ permet d'emmagasiner de l'énergie potentielle qui pourra être restituée sous forme cinétique.

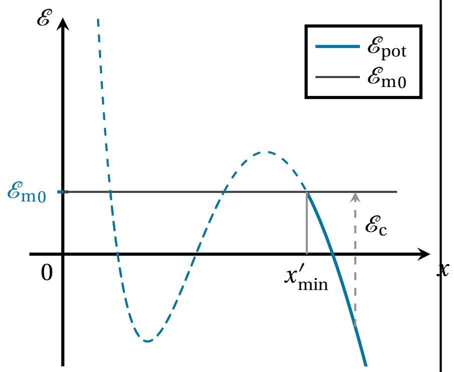
Exemples :



- m lancée vers le haut : v^2 diminue et $\mathcal{E}_{\text{pot}} = mgz$ augmente.
- à la redescente, $\mathcal{E}_{\text{pot}}$ diminue et v^2 augmente.



mouvement entre x_{min} et x_{max}



mouvement au delà de x'_{min}

États liés et de diffusion

Définition : États liés et de diffusion

Un système conservatif est dit :

- dans un état ***lié*** si le mouvement est contraint dans une région finie de l'espace,
- dans un état ***de diffusion*** si le mouvement peut s'étendre jusqu'à l'infini.

Positions d'équilibre

Caractérisation

Les positions dites ***d'équilibre*** où un point matériel soumis à la force conservative $\vec{F}$ dans $\mathcal{R}_g$ galiléen peut être en équilibre sont les points M_{eq} tels que $\vec{F} = \vec{0}$.

Une position M_{eq} d'équilibre est dite :

stable si la force qui s'exerce sur un P.M. proche de M_{eq} tend à le ramener vers M_{eq},

instable sinon.

Mouvement à un degré de liberté

L'énergie potentielle présente une tangente horizontale en un point d'équilibre :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{pot}}(x)}{\mathrm{d}x}\right)_{M_{eq}} = 0$$

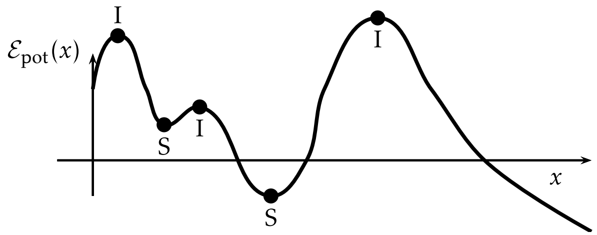
Le point M_{eq} d'abscisse x_{eq} est une position d'équilibre stable si et seulement si :

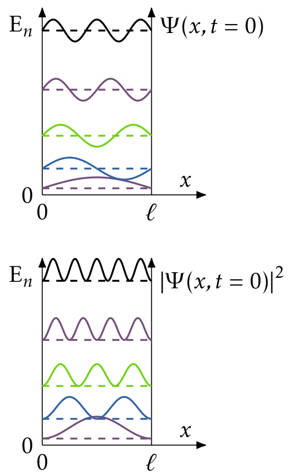
$$\mathcal{E}_{\text{pot}}(x) \text{ localement } \boldsymbol{\mathit{minimale}} \text{ en} x_{eq}$$

Si $\dfrac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_{\text{pot}}(x_{eq})}{\mathrm{d}x^2} \neq 0$, cette condition correspond à :

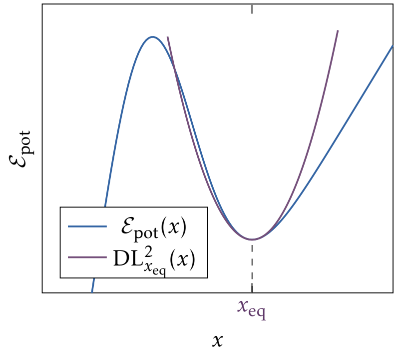
$$\left.\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_{\text{pot}}(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_{eq}} > 0.$$

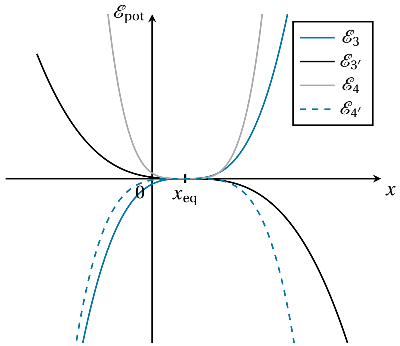
Profondeur des puits/Puits «carré» infini

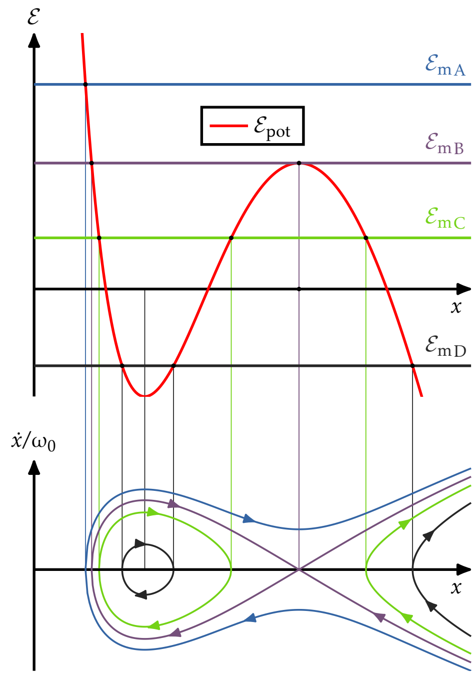




Modèle fondamental/Oscillations anharmoniques

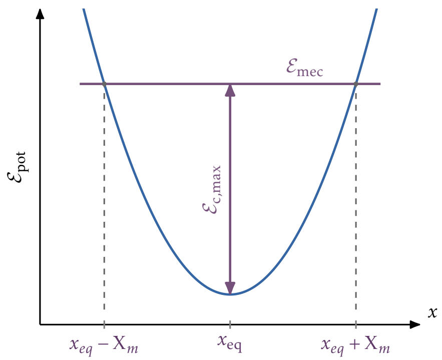






Approximation harmonique

Voisinage d'une position d'équilibre stable
Le mouvement d'un point matériel de masse m au voisinage d'une position d'équilibre stable en $x = x_{eq}$ est ***harmonique*** de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{d^2\mathcal{E}_{pot}}{dx^2}\right)_{x_{eq}} /m}$.
L'***amplitude*** des oscillations, notée X_m, et le ***maximum du module*** de la vitesse atteinte, noté v_m vérifient : $\omega_0 X_m = v_m$.
La trajectoire dans l'espace des phases est une ellipse parcourue dans le sens horaire.



Réversibilité

Définition : Système réversible
Un système mécanique est dit ***réversible*** si pour tout mouvement $(t, \overrightarrow{OM}(t), \vec{v}(t))$ vérifiant les équations du mouvement, le mouvement dit ***renversé***,

- paramétré par t' tel que $\frac{dt'}{dt} = -1$,
- avec $(\overrightarrow{OM}_{renv}(t') = \overrightarrow{OM}(t), \vec{v}_{renv}(t') = -\vec{v}(t))$

vérifie également les équations du mouvement.

Théorème
Un système conservatif est réversible.

Indispensable

Indispensable

- travail et puissance : définition, théorèmes
- poids et ressort : énergies potentielles
- exemples fondamentaux d'énergie mécanique
- espace des phases : points de rebroussement, barrières et puits de potentiel.