

Poids dans \mathcal{R}_t

Définition : Poids dans \mathcal{R}_t

On définit le **poids**, noté \vec{P} d'un point matériel comme l'opposé de la force qu'un opérateur doit lui appliquer pour le maintenir immobile dans le référentiel terrestre \mathcal{R}_t .

On définit le **champ de pesanteur**, d'accélération notée \vec{g} tel que, pour tout point matériel :

$$\vec{P} = m\vec{g}.$$

La direction locale de \vec{g} définit la **verticale descendante**, un plan est dit **horizontal** s'il est orthogonal à \vec{g} .

L'accélération \vec{g} est localement uniforme avec $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

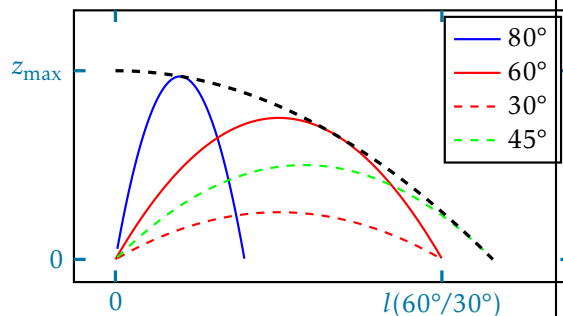
Chute libre dans le vide

Le mouvement d'un point matériel dans le vide dans le champ de pesanteur d'accélération \vec{g} est plan et la trajectoire est une parabole dirigée par la verticale descendante.

Il est **indépendant de la masse** du point matériel.

Portée

Trajectoires ballistiques en l'absence de frottement. Les courbes en trait continu représentent différentes trajectoires de vitesse initiale de même norme v_0 mais de hausse (angle avec la verticale de la vitesse initiale) différente. La courbe en traits interrompus représente la **parabole de sûreté**, qui délimite l'ensemble des points pouvant être atteints par un projectile lancé à v_0 .



Frottement fluide

Définition : Force de frottement fluide

Une force de frottement est dite **fluide** si son intensité varie avec le module $|\vec{v}|$ de la vitesse, noté v . On peut alors l'écrire sous la forme :

$$\vec{f} = -K(v)\frac{\vec{v}}{v},$$

avec $K(v)$ une fonction positive de v , la plupart du temps croissante quand v est croissant, nulle pour $v = 0$.

Vitesse limite

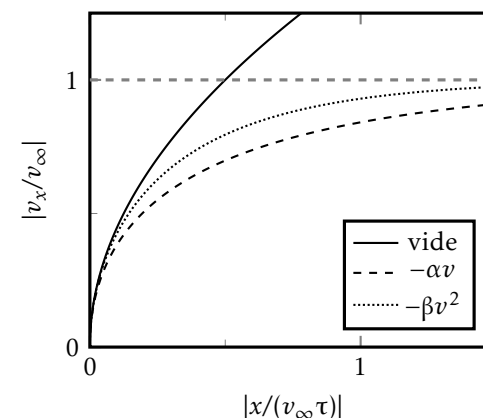
Un point matériel placé dans un champ de forces \vec{P} uniforme et soumis à une force de frottement fluide acquiert asymptotiquement une vitesse dite **limite** de même direction et sens que \vec{P} .

Trajectoires dans l'espace des phases

Trajectoires dans l'espace des phases pour différentes chutes libres unidimensionnelles avec vitesse initiale nulle :

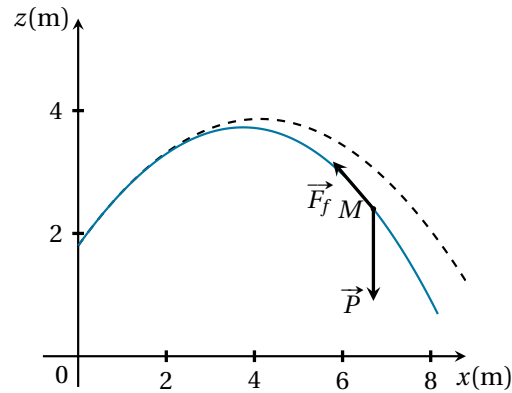
- dans le vide (trait continu),
- force de frottement en $-\alpha v$ (traits interrompus),
- force de frottement en $-\beta v^2$ (traits pointillés).

Pour les chutes avec frottement, la vitesse est adimensionnée par la vitesse limite v_∞ et l'altitude par $v_\infty \tau = v_\infty^2/g$. Pour la chute dans le vide, on a $z = v_z^2/(2g)$, soit artificiellement : $z/(v_\infty \tau) = v_z^2/(2v_\infty^2)$ quel que soit v_∞ .

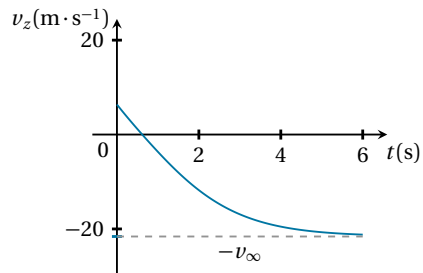


Lancer d'un ballon

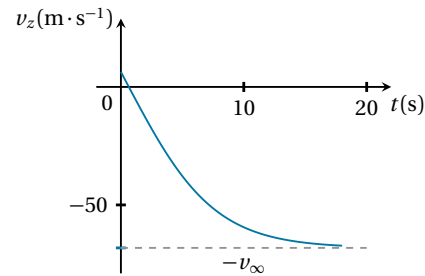
Comparaison de la chute libre d'un ballon de basket-ball dans le vide (traits interrompus) et dans l'air (trait continu) pour une vitesse initiale de $9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.



Variation des paramètres



ballon de basket



ballon de basket rempli d'eau : m multipliée par 10

Pendule simple

Équation différentielle d'un pendule simple

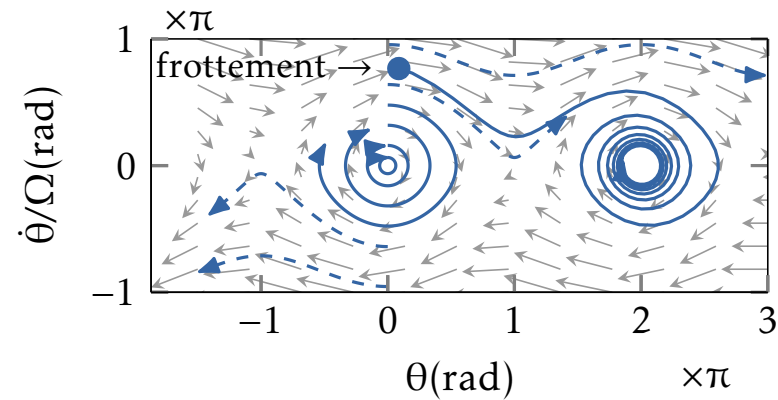
L'angle θ par rapport à la verticale d'un pendule simple vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad \text{avec : } \omega_0^2 = \frac{g}{l}.$$

Oscillations de faible amplitude d'un pendule simple

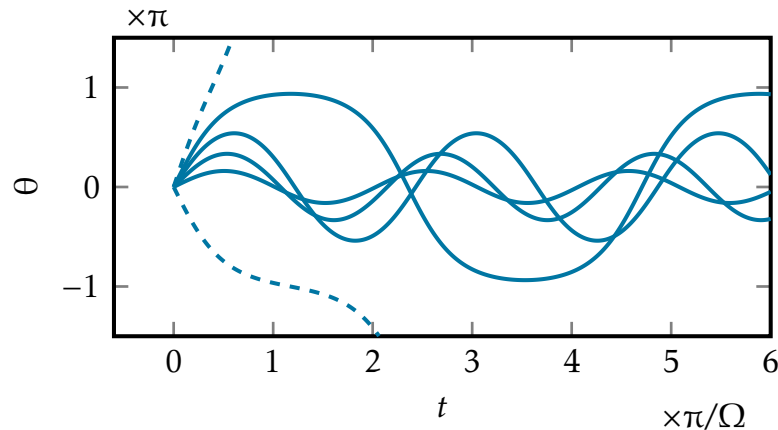
Le mouvement de faible amplitude d'un pendule simple est harmonique de période $T_0 = 2\pi/\omega_0$, *indépendante de l'amplitude*. Ces oscillations sont dites *isochrones*.

Portrait de phase



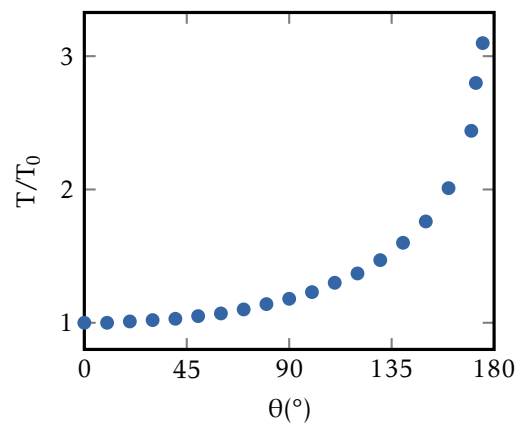
Portrait de phase d'un pendule simple (cas d'une tige) sans frottement. On a représenté les trajectoires dans l'espace des phases correspondant à un point matériel lancé de $\theta = 0$ avec des vitesses initiales différentes, pour une durée égale à la période propre des petites oscillations. Dans le système de coordonnées choisi $(\theta, \dot{\theta}/\omega_0)$ les trajectoires dans l'espace des phases d'un oscillateur harmonique sont des cercles. La courbe marquée « frottement » correspond à un mouvement en présence de frottement (en v^2), la durée totale d'intégration a été multipliée par 8

Portrait de phase



Mouvements d'un pendule simple sans frottement. On a tracé les évolutions de l'angle θ correspondant à un point matériel lancé de $\theta = 0$ avec des vitesses initiales différentes. Les courbes en traits pleins correspondent aux mouvements oscillants, celles en traits interrompus aux mouvements révolutifs. Pour les oscillations on constate un allongement de la période avec l'amplitude. De même ces oscillations diffèrent notablement de sinusoides quand l'amplitude n'est plus faible devant 1 rad.

Période pour des amplitudes quelconques



Période T des oscillations du pendule pour tous les angles. Elle reste proche de $T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$ jusqu'à environ 45° puis croît de plus en plus rapidement jusqu'à diverger pour $\theta \rightarrow 180^\circ$.

Frottement solide

Lois d'Amontons et de Coulomb

Les lois phénoménologiques d'Amontons et de Coulomb décrivent les forces de contact entre deux solides. Soit M un point matériel en contact avec un support solide et notons \vec{v}_g la vitesse de glissement de M par rapport au solide.

Il existe un *coefficient de frottement* μ , sans dimension tel que :

Frottement statique Il ne peut y avoir équilibre relatif ($\vec{v}_g = \vec{0}$) que si la norme $R_{||}$ de la force de frottement nécessaire pour l'assurer vérifie :

$$\frac{R_{||}}{R_{\perp}} \leq \mu.$$

Frottement cinétique S'il y a glissement, l'intensité de la force de frottement est $R_{||} = \mu R_{\perp}$.

Intégration des équations du mouvement

```

import numpy as np
import scipy as sp
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
def eqdiff(w, t):
    x,z,vx,vz,t = w
    # dx/z/dt = vx/vz
    # dvx/dt = -alpha*vz*sqrt(vx^2+vz^2)/masse
    # dvz/dt = -alpha*vz*sqrt(vx^2+vz^2)/masse-g
    return [vx,vz,-alpha*vz*np.sqrt(vx**2+vz**2)/masse,
            -alpha*vz*np.sqrt(vx**2+vz**2)/masse-g,1]

masse = 0.6 #kg
rayon = 0.12 #m
rho = 1.19e0 #kg/m^3
eta = 1.86e-5 #Po
nu = eta/rho#m^2/s (viscosite cinematique)
C = 0.47
g = 9.81

alpha = 0.5*rho*C*(np.pi*rayon**2)

# vitesse initiale: module
v0 = 9.
# vitesse initiale: angle en degres
gamma = 45*np.pi/180.
# Conditions initiales (x,z en m)
x0,z0 = 0.,1.8
#Conditions initiales (vx/vz en m/s)
vx0 = v0 * np.cos(gamma)
vz0 = v0 * np.sin(gamma)
# Date de fin et nombre de pas d'integration
datefin, numpoints = 2, 250
t = np.linspace(0, datefin, numpoints)
# Conditions initiales
w0 = [x0,z0,vx0,vz0,0]
# Resolution numerique de l'equation differentielle
wsol = odeint(eqdiff, w0, t)

x = wsol[:,0]; z = wsol[:,1]; vx = wsol[:,2]; vz = wsol[:,3]

# Trajectoire
plt.plot(x, z, 'b-')
plt.legend()
plt.ylabel('z')
plt.xlabel('x')
plt.show()

```

Trajectoire dans l'espace des phases

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(Z, t):
    theta,v = Z
    return [v, -np.sin(theta)]

thetamin, thetamax = -1.5*np.pi,3.5*np.pi
NpointsTheta = 20
thetaNoeuds = np.linspace(thetamin, thetamax, NpointsTheta)
vmin, vmax = -1.5*np.pi,1.5*np.pi
NpointsV = 20
vNoeuds = np.linspace(vmin, vmax, NpointsV)
thetaGrille,vGrille = np.meshgrid(thetaNoeuds, vNoeuds)

t = 0

#initialisation
xFleche, yFleche = np.zeros(thetaGrille.shape), np.zeros(vGrille.shape)

Ntheta, Nv = thetaGrille.shape

for i in range(Ntheta):
    for j in range(Nv):
        theta = thetaGrille[i, j]
        v = vGrille[i, j]
        Deriv = f([theta, v], t)
        xFleche[i,j] = Deriv[0]
        yFleche[i,j] = Deriv[1]

Q = plt.quiver(thetaGrille, vGrille, xFleche, yFleche, color='r')

plt.xlabel('\theta$')
plt.ylabel('\dot{\theta}/\omega_0$')
plt.xlim([thetamin, thetamax])
plt.ylim([vmin, vmax])

# Trace des trajectoires
from scipy.integrate import odeint
tmin = 0
tmax = 2*np.pi
tPoints = 200
hmin = 0
for v0 in [-3,-2.01, .5, 1, 1.5, 2.01,3]:
    tIntervalle = np.linspace(tmin, tmax,tPoints)
    Origine = [hmin, v0]
    Solution = odeint(f, Origine, tIntervalle)
    plt.plot(Solution[:,0], Solution[:,1], 'b-') # courbe
    plt.plot([Solution[0,0]], [Solution[0,1]], 'o') # debut
    plt.plot([Solution[-1,0]], [Solution[-1,1]], 's') # fin
plt.xlim([thetamin, thetamax])
plt.show()

```