On se placera en régime sinusoïdal établi dans l'ARQS. On s'efforcera d'utiliser au maximum les constructions de Fresnel, des impédances ou des admittances.

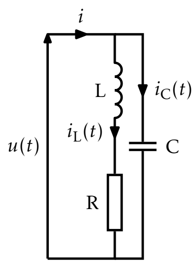
Exercices d'application : Valeurs efficaces, circuit bouchon, ponts.

Culture en sciences physiques : Circuit bouchon, ponts, méthode des trois ampèremètres, déphaseur.

Corrigés en TD : Valeurs efficaces, impédance itérative, ponts, trois ampèremètres.

Exercice 1 : Valeurs efficaces

La tension excitatrice $u(t)$ est sinusoïdale à la fréquence f.



1. Représenter dans le plan complexe, en représentation de Fresnel des intensités les courants i, i_L et i_c. Par convention, on choisira la phase de $u(t)$ nulle.

2. Calculer les valeurs efficaces et les déphasages de ces courants.

On donne : $U_{\text{eff}} = 220\,\text{V}$; $f = 500\,\text{Hz}$; $L = 0{,}3\,\text{H}$; $R = 600\,\Omega$ et $C = 0{,}2\,\mu\text{F}$.

Exercice 2 : Circuit bouchon

1. On considère l'association parallèle d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur C aux bornes de laquelle est branchée une source idéale de tension sinusoïdale de pulsation ω délivrant la tension efficace U_{eff}.

   (a) Déterminer l'intensité efficace I_{eff} délivrée par la source. Pour quelle valeur ω_0 de ω est-elle minimale ?

   (b) Retrouver ce résultat par une construction de Fresnel.

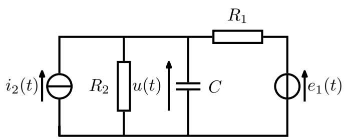
2. On considère maintenant l'association parallèle de la bobine, du condensateur et d'un résistor de résistance R, alimenté par la même source.

   (a) Pour quelle valeur de ω l'intensité I_{eff} délivrée par la source est-elle minimale ? Retrouver ce résultat par une construction de Fresnel.

   (b) Pour quelle bande de pulsation $\Delta\,\omega = [\omega_1\,;\omega_2]$ a-t-on $I_{\text{eff}} \leqslant \sqrt{2} I_{eff,min}$

Exercice 3 : Réponse d'un circuit soumis à deux excitations sinusoïdales

Déterminer la réponse $u(t)$ du circuit ci-contre lorsqu'il est soumis aux deux excitations sinusoïdales : $e_1(t) = E_0 \cos(\omega t)$ et $i_2(t) = I_0 \sin(2\,\omega t)$.



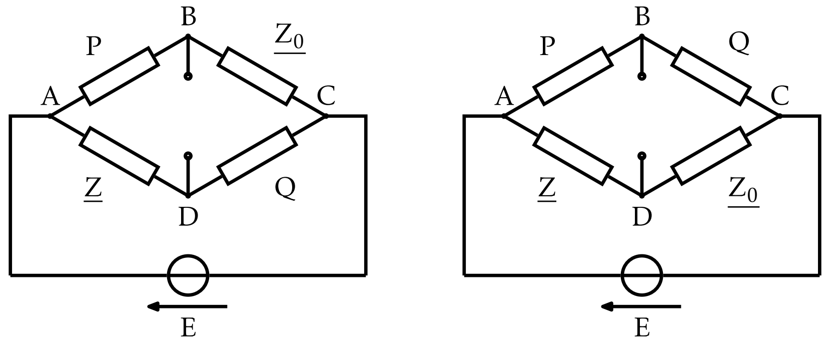
Exercice 4 : Ponts en régime sinusoïdal

On considère les deux types de pont représentés sur la figure ci-dessous. P et Q sont des résistances, $\underline{Z}_0$ une impédance complexe connue, constituée par exemple par une boité de capacités étalons et des résistances montées en parallèle ou en série, $\underline{Z}$ est une impédance inconnue.

1. Écrire pour chaque montage la condition d'équilibre du pont en régime sinusoïdal *ie* une condition sur les différentes impédances pour que les points B et D soient au même potentiel.

2. Montrer que le montage en « P/Q » permet de comparer des impédances de même nature (capacités ou inductances) et que le montage en « PQ » permet de comparer une capacité et une inductance.

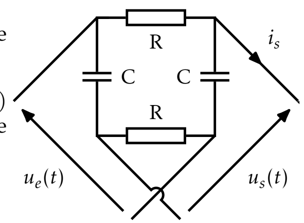
3. On a $P = 1\,\text{k}\Omega$ et $Q = 2\,\text{k}\Omega$ et la fréquence de la source est $f = 1\,\text{kHz}$. Déterminer le dipôle d'impédance $\underline{Z}$ si le pont en configuration $< PQ >$ est équilibré avec un condensateur de capacité $C_0 = 1\,\mu\text{F}$ pour $\underline{Z_0}$. Même question si c'est le montage en configuration $< P/Q >$ qui est équilibré avec le même condensateur.



(a) <PQ> (b) <P/Q>

Exercice 5 : Déphaseur RC

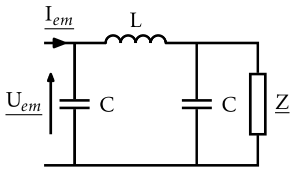
On réalise le circuit ci-contre dans lequel les résistances R sont couplées de manière à rester toujours égales.



1. Déterminer, en régime sinusoïdal permanent, la tension de sortie $u_s(t)$ si la tension d'entrée est $u_e(t) = U_0 \cos \omega t$ lorsque la sortie est ouverte $(i_s = 0)$.

2. Quelle peut-être l'utilité d'un tel montage ?

Exercice 6 : Impédance itérative

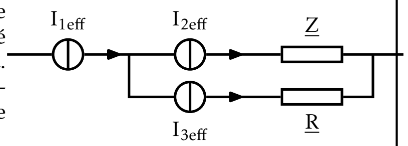


1. Quelle valeur $\underline{Z}_c$ faut-il donner à $\underline{Z}$ pour que l'impédance complexe de ce réseau $\underline{U}_m/\underline{I}_m$ soit égale à $\underline{Z}$?

2. Discuter la valeur de $\underline{Z}_c$ en fonction de ω, pulsation du signal appliqué en entrée.

Exercice 7 : Méthode des trois ampèremètres

On cherche à caractériser un dipôle d'impédance $\underline{Z}$ quelconque alimenté en régime sinusoïdal au moyen du montage présenté ci-contre utilisant trois ampèremètres et une résistance étalon R. Les ampèremètres utilisés en mode « alternatif » indiquent les valeurs efficaces des intensités des courants les traversant. On note $I_{1\text{eff}}$, $I_{2\text{eff}}$ et $I_{3\text{eff}}$ leurs valeurs.



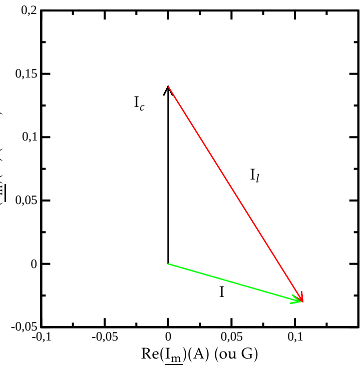
1. Tracer la construction de Fresnel des admittances du montage. En déduire géométriquement la valeur de $\cos\varphi$, avec φ l'argument de $\underline{Z}$.

2. Que faudrait-il mesurer en plus pour déterminer le module de $\underline{Z}$?

3. Proposer un montage permettant de déterminer l'impédance $\underline{Z}$ utilisant des voltmètres.

Correction de l'exercice 1

On a $\underline{U_{\rm m}} = \frac{\underline{I_{c\rm m}}}{jC\omega}$, soit $I_{c\rm eff} = 0{,}14\,\rm A$ et $\varphi_{iC} = 90°$. De même $\underline{I_{L\rm m}} = \frac{\underline{U_{\rm m}}}{R+jL\omega}$, soit $I_{L\rm eff} = \frac{U_{\rm eff}}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}} = 0{,}2\,\rm A$ et $\tan\varphi_{iL} = -L\omega/R$ avec $\cos\varphi_{iL} > 0$, soit $\varphi_{iL} = -58°$. Enfin, $\underline{I_{\rm m}} = \underline{I_{C\rm m}} + \underline{I_{L\rm m}} = \left(1 - LC\omega^2 + jRC\omega\right)\underline{I_{L\rm m}}$, soit, après calculs $I_{\rm eff} = 0{,}11\,\rm A$ et $\varphi_i = -15°$.
La figure ci-contre représente ces intensités dans le plan complexe, elle peut également être lue comme la construction de l'admittance du circuit, somme des admittances complexes du dipôle de chaque branche.



Correction de l'exercice 2

1. (a) En utilisant un pont diviseur de courant, on obtient :

$$\underline{I_{\rm m}} = \left(\frac{1}{jL\omega} + jC\omega\right)\underline{U_{\rm m}} \quad \text{soit } I_{\rm eff} = C\omega\left|\left(1 - \frac{1}{LC\omega^2}\right)U_{\rm eff}\right|,$$

nulle pour $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. On est en effet à la pulsation propre du circuit LC pour laquelle un courant et une tension peuvent osciller « dans la maille » du LC, sans qu'aucun courant ne « sorte » de la maille.

(b) En formant la somme d'une admittance inductive d'argument $-\pi/2$ et d'une capacitive d'argument $+\pi/2$, on peut obtient une admittance nulle si les modules sont les mêmes, ce qui correspond à $LC\omega^2 = 1$.

2. (a) Toujours en utilisant un diviseur de courant, on obtient maintenant :

$$\underline{I_{\rm m}} = \left(\frac{1}{jL\omega} + jC\omega + \frac{1}{R}\right)\underline{U_{\rm m}}$$

$$\text{soit } I_{\rm eff} = \frac{U_{\rm eff}}{R}\sqrt{1 + \left(RC\omega - \frac{R}{L\omega}\right)^2} = \frac{U_{\rm eff}}{R}\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2},$$

avec, comme d'habitude $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, mais $Q = R/(L\omega_0) = RC\omega_0$: le facteur de qualité est ici croissant avec R. On minimise à nouveau la conductance en annulant la susceptance, pour $\omega = \omega_0$.

(b) La valeur minimale du courant est alors :

$$I_{\rm eff\,min} = \frac{U_{\rm eff}}{R} \quad \text{et } I_{\rm eff} \leqslant \sqrt{2} \times I_{\rm eff\,min} \text{ pour } \omega \in \left[\omega_0\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} - \frac{\omega_0}{2Q} ; \omega_0\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} + \frac{\omega_0}{2Q}\right],$$

en effectuant les mêmes calculs que pour la résonance en puissance d'un RLC série.

Correction de l'exercice 3

On utilise le théorème de superposition, en éteignant successivement chacune des sources idéales.

e_1 éteint (*ie* remplacé par un fil): On reconnaît un diviseur du courant i_2 entre R_1 R_2 et le condensateur. Les amplitudes complexe du courant traversant le condensateur et la tension à ses bornes sont alors :

$$\underline{I_{2m}} = \frac{j2C\omega i_2}{1/R_1 + 1/R_2 + j2C\omega} \quad \text{soit une tension: } \underline{U_{2m}} = \frac{I_0}{j2C\omega} = \frac{R_1R_2i_2}{R_1 + R_2 + R_1R_2j2C\omega}.$$

La tension réelle est alors :

$$u_2(t) = \frac{R_1R_2I_0}{\sqrt{(R_1+R_2)^2 + (R_1R_2C2\omega)^2}}\sin\left(2\omega t - \arctan\left(\frac{2R_1R_2C\omega}{R_1+R_2}\right)\right).$$

i_2 éteint (*ie* remplacé par un interrupteur ouvert): On reconnaît un pont diviseur de tension entre R_1 et l'association parallèle $R_2//C$ d'impédance équivalente $\underline{Z}_{\rm eq} = R_2/(R_2 + jC\omega)$. La tension complexe est donc :

$$\underline{U_{1m}} = \frac{\underline{Z}_{\rm eq}E_0}{R_1 + \underline{Z}_{\rm eq}} = \frac{R_2E_0}{R_1 + R_2 + jR_1R_2C\omega}.$$

On en déduit :

$$u_1(t) = \frac{R_2E_0}{\sqrt{(R_1+R_2)^2 + (R_1R_2C\omega)^2}}\cos\left(\omega t - \arctan\left(\frac{R_1R_2C\omega}{R_1+R_2}\right)\right)$$

La tension totale vaut :

$$u(t) = \frac{R_1R_2I_0}{\sqrt{(R_1+R_2)^2 + (R_1R_22C\omega)^2}}\sin\left(2\omega t - \arctan\left(\frac{2R_1R_2C\omega}{R_1+R_2}\right)\right)$$
$$+ \frac{R_2E_0}{\sqrt{(R_1+R_2)^2 + (R_1R_2C\omega)^2}}\cos\left(\omega t - \arctan\left(\frac{R_1R_2C\omega}{R_1+R_2}\right)\right).$$

Correction de l'exercice 4

1. Il suffit de comparer les tensions $\underline{U_{BC}}$ et $\underline{U_{DC}}$ pour comparer les potentiels des points B et D. On utilise pour cela des ponts diviseurs de tension. Dans le montage P/Q on obtient par exemple :

$$\underline{U_{BC}} = \frac{\underline{U_{AC}}Q}{P+Q} = \frac{QE}{P+Q} \qquad \underline{U_{DC}} = \frac{\underline{Z_0}\underline{U_{AC}}}{Z + \underline{Z_0}} = \frac{\underline{Z_0}E}{Z + \underline{Z_0}}.$$

Le pont est alors équilibré si $\underline{V_B} = \underline{V_D}$, soit $\underline{U_{BC}} = \underline{U_{DC}}$, d'où on déduit : $Q\underline{Z} = P\underline{Z_0}$. On obtient de la même manière la condition d'équilibre dans l'autre montage : $PQ = \underline{Z}\underline{Z_0}$.

2. Ces deux montages ne permettent pas de comparer les mêmes impédances. En effet, dans le montage « P/Q » les réactances de $\underline{Z}$ et $\underline{Z_0}$ devront être de même signe pour réaliser l'équilibre car les résistances P et Q sont toujours positives.

   En revanche, dans le montage $< PQ >$, les réactances de $\underline{Z}$ et $\underline{Z_0}$ seront opposées à l'équilibre, puisque : $\arg\left(\underline{Z}+\underline{Z_0}\right)=\arg\underline{Z}+\arg\underline{Z_0}=\arg PQ=0$.

3. Avec un pont PQ, on a :

$$PQ=\frac{\underline{Z}}{jC_0\omega}\rightarrow\underline{Z}=j\omega PQC.$$

   L'impédance inconnue $\underline{Z}$ a donc un argument égal à $\pi/2$, il s'agit d'une bobine d'auto-inductance $L=PQC=2\,\mathrm{H}$.

   Dans le cas du montage $< P/Q >$ on a désormais :

$$\frac{P}{jC_0\omega}=Q\underline{Z}\rightarrow\underline{Z}=\frac{P}{QjC_0\omega}.$$

   L'impédance inconnue $\underline{Z}$ a un argument égal à $-\pi/2$, il s'agit d'un condensateur de capacité $C_0Q/P=2\,\mu\mathrm{F}$. On constate que dans ces deux cas la fréquence n'intervient pas.

Correction de l'exercice 5

1. Des diviseurs de tension permettent de calculer la tension aux bornes du condensateur de droite : $\underline{U_{Cdm}}=\frac{1}{1+jRC\omega}\underline{U_{em}}$ et celle aux bornes de la résistance « d'en bas » : $\underline{U_{Rb}}=\frac{jRC\omega}{1+jRC\omega}\underline{U_{em}}$. On en déduit la tension $\underline{U_{sm}}=-\underline{U_{Rbm}}+\underline{U_{Cdm}}=\frac{1-jRC\omega}{1+jRC\omega}\underline{U_{em}}=\underline{U_{em}}e^{-2j\varphi}$, avec $\varphi=\arctan RC\omega$.

2. Le réglage de R, au moyen par exemple d'un potentiomètre, permet ainsi de déphaser arbitrairement un signal entre 0 et $-\pi$ sans modifier son amplitude.

Correction de l'exercice 6

1. On veut avoir $\underline{U}_m/\underline{I}_m=\underline{Z}$. On détermine l'impédance équivalente $\underline{Z}_e$ par associations successives : $L\leftrightarrow Z//C$: $\underline{Z}_0=jL\omega+\frac{\underline{Z}}{1+jC\omega\underline{Z}}$ et $\underline{Z}_e=\frac{\underline{Z}_0}{1+jC\omega\underline{Z}_0}$. La condition $\underline{Z_e=Z}$ s'écrit alors :

$$\underline{Z}\left(1+jC\omega\underline{Z}_0\right)=\underline{Z}_0\rightarrow\underline{Z}\left(1-LC\omega^2+\frac{jC\omega\underline{Z}}{1+jC\omega\underline{Z}}\right)=jL\omega+\frac{\underline{Z}}{1+jC\omega\underline{Z}}$$
$$\underline{Z}\left(1+jC\omega\underline{Z}-LC\omega^2-jLC^2\omega^3\underline{Z}+jC\omega\underline{Z}\right)=jL\omega-LC\omega^2\underline{Z}+\underline{Z}$$
$$2jC\omega\underline{Z}^2-jLC^2\omega^3\underline{Z}^2=jL\omega\rightarrow\text{soit}\quad\underline{Z_c}^2=\frac{L}{C}\frac{1}{2-LC\omega^2}$$

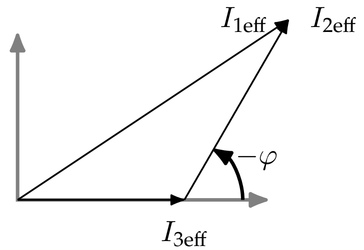
2.
   - Pour $\omega\leqslant\sqrt{2}\,\omega_0$, avec $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\underline{Z_c}^2$ est réelle positive donc l'impédance est la résistance : $R_c=\sqrt{\frac{L}{C}\frac{1}{2-LC\omega^2}}$.
   - Pour $\omega\geqslant\sqrt{2}\,\omega_0$ $\underline{Z}_c^2$ est réelle négative, l'impédance est donc une inductance ou une capacité donnée par $\underline{Z}_c=\pm j\sqrt{\frac{L}{C}\frac{1}{LC\omega^2-2}}$.

Correction de l'exercice 7

1. L'égalité de la tension aux bornes de $\underline{Z}$ et R permet de déterminer $\frac{\underline{Z}}{R}=\frac{\underline{I_3}}{\underline{I_2}}$. L'argument de $\underline{Z}$ est donc également celui de $\underline{I_3}$ par rapport à $\underline{I_2}$. Sur la construction de Fresnel ci-contre de la loi de nœuds, le théorème d'Al-Kashi assure que :

$$I_{1\text{eff}}^2=I_{2\text{eff}}^2+I_{3\text{eff}}^2-2I_{2\text{eff}}I_{3\text{eff}}\cos\left(\pi-(-\varphi)\right),$$

   d'où $\cos\varphi=\cos(-\varphi)=\frac{I_{1\text{eff}}^2-I_{3\text{eff}}^2-I_{2\text{eff}}^2}{2I_{2\text{eff}}I_{3\text{eff}}}$.



2. Il suffit de mesurer la valeur efficace $U_{2\text{eff}}$de la tension aux bornes de $\underline{Z}$, le module de $\underline{Z}$ sera alors $Z=U_{2\text{eff}}/I_{2\text{eff}}$.

3. Cette méthode s'adapte au cas où on dispose de trois voltmètres : il suffit alors de mettre les dipôles $\underline{Z}$ et $\underline{R}$ en série et de brancher un voltmètre aux bornes de chacun et le troisième au bornes de leur association série. Un construction de Fresnel des tensions permet alors de déterminer la phase.