

**Exercices d'application :** Calcul, ascenseur, clefs, distance de sécurité, espace des phases, mouvement circulaire, carrousel, spirale logarithmique, coordonnées sphériques

**Culture en sciences physiques :** Clefs, accident, basket, conjonction, mouvement circulaire, carrousel, solide en rotation, coordonnées sphériques, dilatation du temps

**Corrigés en TD :** clefs, accident, basket, carrousel, perceuse

## Coordonnées cartésiennes

### Exercice 1 : Calcul

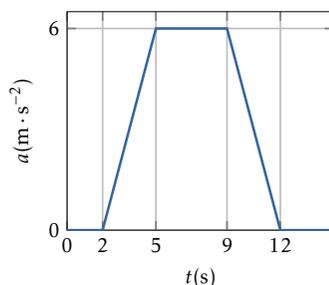
Déterminer les composantes des vecteurs vitesse et accélération, dans la base cartésienne, pour un mouvement de coordonnées :

$$x = a_0 t^2 + x_0 \quad y(t) = v_0 t \quad z(t) = z_0.$$

Déterminer également les expressions de leurs normes.

### Exercice 2 : Utilisation de courbes

On donne ci-contre la courbe représentant l'accélération en fonction du temps au cours d'un mouvement rectiligne. À la date  $t_1 = 1$  s, sa vitesse est  $v_1 = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Déterminer sa vitesse aux dates  $t_2 = 4$  s et  $t_3 = 15$  s.



### Exercice 3 : Ascenseur

Un ascenseur est animé d'un mouvement rectiligne vertical ascendant :

- uniformément accéléré d'accélération  $a_a = 2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  pendant une durée  $t_a = 3,0$  s ;
- uniforme pendant une durée  $t_u = 7$  s ;
- uniformément décéléré d'accélération de norme  $a_d = 1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  pendant une durée  $t_d$  jusqu'à l'arrêt.

1. Tracer la courbe représentant la vitesse en fonction du temps et en déduire la durée  $t_d$ . Lire graphiquement la distance totale parcourue.
2. Tracer la courbe représentant l'accélération en fonction du temps. Comment peut-on y vérifier que l'ascenseur s'est bien arrêté ?

3. Tracer l'allure de la courbe représentant la position en fonction du temps.

### Exercice 4 : Quand on a oublié ses clefs

1. Un conducteur démarre avec accélération constante  $a$  en ligne droite puis se rend compte au bout d'un temps  $t_1$  qu'il a oublié ses clefs... Il décélère alors avec une accélération de même norme.

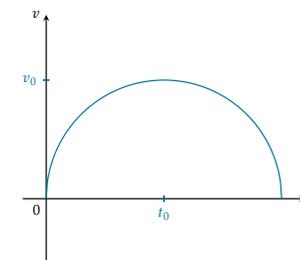
- (a) Quelle durée met-il à s'arrêter ? Tracer la courbe représentative de la vitesse.
- (b) En déduire l'expression de la position en fonction du temps. Tracer également la courbe représentative.
- (c) Déterminer la distance totale parcourue avant l'arrêt. Proposer une lecture graphique de cette distance.

- 2.

L'évolution de la vitesse du même conducteur est maintenant donnée par l'ellipse ci-contre de forme générale :

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 + \left(\frac{t-t_0}{t_0}\right)^2 = 1$$

- (a) Vérifier l'expression donnée en des points bien choisis de la courbe. Déterminer l'expression de  $v$ , en fonction du temps.
- (b) Déterminer de même la distance totale parcourue avant l'arrêt.



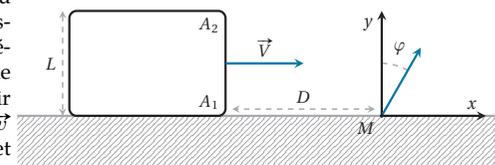
### Exercice 5 : Distance de sécurité

En arrivant sur une zone d'accident, chaque voiture diminue instantanément sa vitesse de  $v_1$  à  $v_2$ . Chaque voiture mesure la même longueur  $l$ . Quelle doit être la distance entre les voitures pour éviter une collision. Calculer pour  $v_1 = 130 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ,  $v_2 = 90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  et  $l = 4$  m.

### Exercice 6 : Accident? 🚗

On considère une voiture modélisée par un parallélépipède de largeur  $L$  en mouvement rectiligne uniforme le long d'un trottoir rectiligne  $Ox$ .

Un piéton commence à traverser la route au moment où la voiture se trouve à une distance  $D$ . Le mouvement du piéton, modélisé par un point  $M$ , est rectiligne uniforme à une vitesse de norme  $v$ . Il peut choisir l'angle  $\varphi$  que forme son vecteur vitesse  $\vec{v}$  avec l'axe  $Oy$ , qui reste compris entre 0 et  $\pi/2$ .



1. On choisit l'origine des coordonnées cartésiennes au point de départ du piéton. Déterminer les coordonnées  $x$  et  $y$  des points  $A_2$  et  $M$  en fonction du temps.
2. En déduire, pour un angle  $\varphi$  donné :
  - l'instant  $t_x$  où les abscisses de  $M$  et  $A_2$  sont égales ;

- L'instant  $t_y$  où les ordonnées de  $M$  et  $A_2$  sont égales.

En déduire la vitesse minimale  $v_{\min}(\varphi)$  permettant au piéton d'éviter la voiture quand il se déplace dans la direction donnée par  $\varphi$ .

- (a) En déduire la vitesse minimale  $v_0$  que doit posséder le piéton pour éviter la voiture en choisissant le meilleur angle. On pourra dériver l'expression de  $v_{\min}(\varphi)$  en fonction de  $\varphi$  ou mettre l'expression de  $v_{\min}(\varphi)$  sous la forme  $v_{\min} = \frac{KV}{\cos(\varphi - \delta)}$  où les constantes  $K$  et  $\delta$  dépendent des distances  $D$  et  $L$ .
- (b) Déterminer les expressions de  $v_0$  pour  $D \gg L$  et  $L \gg D$ , ainsi que les valeurs de l'angle  $\varphi$  optimal correspondant. Commenter.

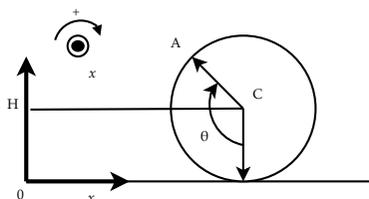
### Exercice 7 : Basket-ball

On précise les caractéristiques de la trajectoire d'un objet en mouvement uniformément accéléré. On prend un vecteur accélération  $\vec{a} = -g\vec{e}_z$ , avec  $g$  une constante positive. Ces trajectoires sont caractéristiques des mouvements dans le champ de pesanteur, en l'absence de frottement.

- Quel est le système de coordonnées approprié ?
- L'objet se trouve à l'instant initial à la position  $x = 0$ ,  $z = h$  et est animé à cet instant du vecteur vitesse  $\vec{v}_0 = v_0(\cos(\alpha)\vec{e}_x + \sin(\alpha)\vec{e}_z)$ , avec  $\alpha \in [0^\circ; 90^\circ]$ . Établir l'équation de sa trajectoire.
- (a) Déterminer l'abscisse  $x_C$  pour laquelle  $z = 0$  ainsi que l'altitude maximale atteinte  $z_S$ .  
(b) Comment  $z_S$  varie-t-elle avec l'angle  $\alpha$  quand  $v_0$  reste fixé ? Avec  $h$  ?  
(c) Dans le cas  $h = 0$ , pour quelle valeur de  $\alpha$  la distance  $x_C$  est-elle maximale ?  
(d) Pour un lancer au basket-ball (vitesse  $v_0$  de l'ordre de  $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ) la taille du joueur influe-t-elle beaucoup sur  $x_C$  ? On considérera que le lancer est effectué dans les conditions de la question précédente.

### Exercice 8 : Cycloïde

Une roue de rayon  $R$  et de centre  $C$  roule sans glisser sur un axe  $Ox$ . Le mouvement de la roue est paramétré par l'angle  $\theta(t)$  dont on a tourné un rayon de la roue à partir de sa position initiale.



- Montrer que si la roue ne glisse pas, l'abscisse du centre de la roue  $x_C$  est liée à  $\theta$  par :  $x_C = x_{c_0} + R\theta$ .
- Quelles sont en fonction de  $R$  et  $\theta$  les coordonnées (dans le repère cartésien d'origine  $O$ ) du point  $M$  de la périphérie de la roue qui coïncidait pour  $\theta = 0$  avec  $O$  ? L'ensemble de ces points constitue par définition une *cycloïde*. Tracer cette courbe.
- Calculer en fonction de  $R$  et de  $\theta$  et ses dérivées, les composantes de la vitesse et de l'accélération de  $M$ .

- Donner les valeurs des composantes de la vitesse et de l'accélération de  $M$  au moment où celui-ci touche l'axe.

### Exercice 9 : Espace des phases

On considère un point animé  $M$  d'un mouvement unidimensionnel uniformément accéléré dans un référentiel  $\mathcal{R}$ . On note  $\vec{a}$  l'accélération constante de  $M$ .

- Choisir soigneusement le repère le plus adapté pour y décrire le mouvement de  $M$ .
- On désigne par  $x_0$  et  $v_0$  respectivement la position et la vitesse initiales de  $M$ . Établir la trajectoire de  $M$  dans l'espace des phases. On distinguera différents cas selon les signes respectifs de  $x_0$  et  $v_0$ .

### Exercice 10 : Le chien 🐕

On considère deux demi-droites perpendiculaires  $(Ox)$  et  $(Oy)$ . À l'instant  $t = 0$ , un homme part de  $O$  et parcourt l'axe  $(Oy)$  avec la vitesse constante  $v$ . Au même instant, son chien part d'un point  $A$  de l'axe  $(Ox)$ , situé à la distance  $a$  de  $O$ , et se dirige constamment vers son maître en courant à la vitesse  $2v$ .

- Déterminer la direction du vecteur vitesse du chien en fonction des coordonnées  $(x, y)$  du chien et de son maître  $(x_M, y_M)$ , puis en fonction des coordonnées  $(x, y)$  du chien et du temps.
- Montrer que l'équation différentielle de la trajectoire du chien est :  $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4x^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$ .
- Vérifier que cette équation admet pour solution des fonctions de la forme  $y = \alpha x^{3/2}/3 - \sqrt{x}/\alpha + \beta$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes qu'on déterminera.
- À quel instant le chien rejoint-il son maître ?
- Déterminer, de deux façons différentes, la longueur de la trajectoire parcourue par le chien.

## Coordonnées polaires

### Exercice 11 : Calcul

Déterminer les composantes, dans la base cylindrique, des vecteurs vitesse et accélération d'un mouvement dont les coordonnées sont :

$$r = a_0 t^2 + r_0 \quad \theta(t) = \theta_0 + \omega t \quad z(t) = v_0 t.$$

Déterminer également les expressions de leurs normes.

### Exercice 12 : Mouvement d'un point sur une spirale logarithmique

Un point  $M$  décrit la courbe d'équation polaire suivante :  $(r = be^{-t/\tau}; \theta = \omega t)$  avec  $\tau, \omega$  des constantes positives. Tracer l'allure de sa trajectoire.

- Déterminer l'équation de la trajectoire. Comparer la distance à l'origine  $O$  du point  $M$  quand il est en  $\theta_0$  et à l'issue d'une révolution supplémentaire autour de  $O$ .
- Déterminer les composantes radiale et orthoradiale de la vitesse et de l'accélération du point  $M$ .

3. En déduire les normes de ces vecteurs ainsi que l'angle que fait le vecteur vitesse avec le vecteur position  $\overrightarrow{OM}$ .

### Exercice 13 : Mouvement circulaire

Un point est contraint de se déplacer sur un cercle de rayon  $R$  et de centre  $O$ . On décrit son mouvement en coordonnées polaires de centre  $O$ . Il se trouve en  $\theta = 0$  à l'instant initial.

- Rappeler l'expression des vecteurs vitesse et accélération en coordonnées polaires pour une trajectoire circulaire.
- Donner l'expression de  $\theta(t)$  si le mouvement s'effectue avec une vitesse de norme  $v_0$  constante et s'il s'effectue avec une norme croissant linéairement en fonction du temps :  $v = kt$  avec  $k$  une constante positive.
- En déduire dans ce dernier cas :
  - l'expression du vecteur accélération et sa norme en fonction du temps,
  - l'expression de la distance  $D$  parcourue en fonction du temps.
- Le rayon du cercle est  $R = 2,0 \text{ m}$  et la norme  $v$  croît de  $1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  toutes les 5 s. Combien de tours le point aura-t-il effectués quand le module de son accélération atteindra  $a = 3g$ , avec  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  ?

### Exercice 14 : Conjonction de planètes

Deux planètes assimilées à des points  $M_A$  et  $M_B$  décrivent des orbites circulaires de même centre  $O$  dans un même plan, en tournant dans le même sens. Leurs mouvements sont circulaires uniformes, de périodes respectives  $T_A$  et  $T_B$ .

- Déterminer la durée séparant deux conjonctions de  $M_A$  et  $M_B$ , définies par l'alignement des points  $O$ ,  $M_A$  et  $M_B$ , dans cet ordre.
- Calculer cette durée pour Vénus et la Terre, de périodes respectives  $T_V = 225$  jours et  $T_T = 365$  jours.

### Exercice 15 : Carrousel

On considère un carrousel circulaire de rayon  $R$  en rotation autour de son centre  $O$  à la vitesse angulaire  $\omega$  constante par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$ . Un homme assimilé à un point se déplace à sa surface à la vitesse  $v$  constante.

- L'homme se déplace en suivant un rayon du cercle (Figure 1a). Il se trouve à l'instant initial en  $O$  et se dirige dans la direction  $\theta = 0$ . Déterminer ses coordonnées polaires  $r(t)$  et  $\theta(t)$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .
  - Même question si l'homme se déplace à la vitesse  $v$  constante le long d'un cercle de rayon  $r_0$  de centre  $O$ , dans le même sens que la rotation du carrousel (Figure 1b), avec  $\theta = 0$  à l'instant initial.
- Déterminer dans les deux cas précédents le vecteur vitesse et le vecteur accélération dans  $\mathcal{R}$  de l'homme.
- Déterminer, dans les deux cas précédents la valeur maximale du rayon  $R$  pour laquelle la norme de l'accélération reste inférieure à  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  si  $v = 1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $\omega = 2\pi/5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

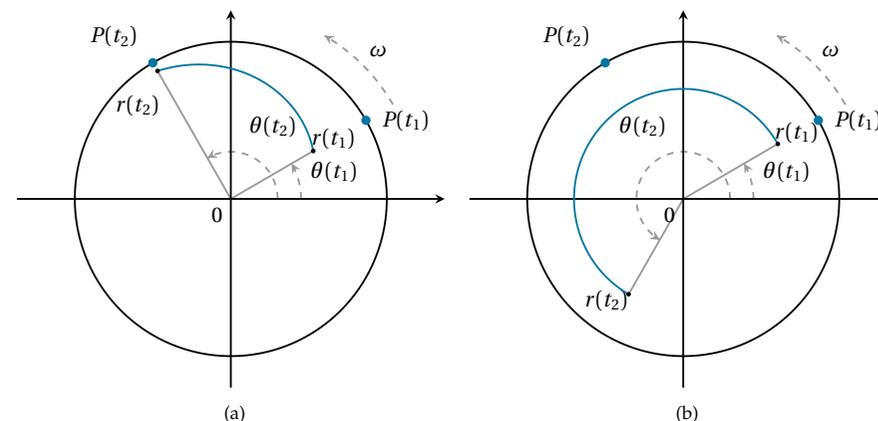


FIG. 1 : Trajectoires de l'homme entre les instants  $t_1$  et  $t_2$ . Le point  $P$  est un point fixe du carrousel.

## Autres thèmes

### Exercice 16 : Perceuse

On étudie le mouvement de rotation d'une perceuse électrique de bricolage. L'ensemble du foret et du mors constitue un solide en rotation autour de l'axe de symétrie de révolution du mors, noté  $\Delta$ . La notice d'utilisation de la perceuse indique une vitesse de rotation variable du mors par rapport à la perceuse pouvant aller jusqu'à 2300 tours par minute. On utilise un foret de diamètre  $d = 8,0 \text{ mm}$ .

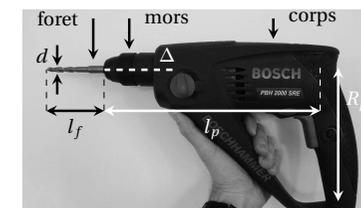


FIG. 2

On désigne par  $l_f = 7,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}$  la longueur du foret à l'extérieur de la perceuse, par  $l_p = 3,0 \cdot 10^{-1} \text{ m}$  la longueur du corps de la perceuse et par  $R_p = 1,8 \cdot 10^{-1} \text{ m}$  la plus grande distance à l'axe du mors d'un point de la perceuse.

- Déterminer la norme du vecteur vitesse des points de la périphérie du foret.
- En raison d'un défaut de serrage, l'axe de symétrie du foret se déplace brusquement pendant qu'on l'utilise pour percer un trou dans un mur. On considère que les axes de symétrie du foret et du mors forment alors un angle de  $5^\circ$ .
  - On considère que le foret se bloque instantanément dans le mur quand il se désaxe. Si la perceuse n'est pas tenue assez fermement, on peut considérer que pendant un temps cours la vitesse

de rotation du mors par rapport à celle-ci reste constante. Estimer la vitesse maximale que peut atteindre un point de la perceuse.

- (b) Si le mur est assez tendre et la perceuse maintenue assez fermement, on peut en revanche considérer que le corps de la perceuse reste immobile et que la vitesse de rotation du mors par rapport au corps reste la même. Estimer la vitesse maximale que peut atteindre un point du foret et décrire le trou formé.

3. Reprendre ces questions si  $c'$  est maintenant l'axe du mors de la perceuse qui en raison d'un défaut de fabrication forme un angle  $\alpha$  avec celui du corps de la perceuse.

### Exercice 17 : Coordonnées sphériques

On étudie le mouvement d'un avion se déplaçant à faible altitude autour de la Terre. On peut alors considérer qu'il évolue à la surface d'une sphère de rayon  $R_T$ . Sa position  $y$  est repérée par les angles  $\theta$  et  $\varphi$  des coordonnées sphériques.

- Son vecteur vitesse  $\vec{v}$  par rapport à la Terre est de norme constante.
  - Il se déplace du nord vers le sud. Déterminer l'évolution de ses coordonnées sphériques  $\theta$  et  $\varphi$ .
  - Même question s'il se déplace sur un cercle de latitude  $\theta$  constante, d'est en ouest.
- Il se déplace maintenant du nord vers le sud et d'est en ouest en gardant toujours le même angle  $\alpha$  par rapport à l'axe nord-sud. Comment doit-il ajuster la norme  $v$  de son vecteur vitesse en fonction de sa position pour toujours garder le Soleil au zénith ?

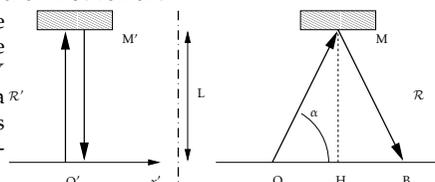
### Exercice 18 : Bon courage

Déterminer les expressions de la vitesse et de l'accélération en coordonnées sphériques.

### Exercice 19 : Dilatation du temps en mécanique relativiste

On illustre dans cet exercice une conséquence de l'invariance de la vitesse de la lumière postulée par la relativité restreinte : la dilatation du temps dans un référentiel en mouvement.

On considère deux observateurs, un chef de gare immobile sur son quai et un contrôleur, immobile dans un train se déplaçant en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse  $V$  par rapport au quai. Dans tout l'exercice on distinguera le temps dans le référentiel du train  $\mathcal{R}'$ , noté  $t'$  de celui dans le référentiel ( $\mathcal{R}$ ) du quai, noté  $t$ . On supposera que les référentiels liés à la gare et au train sont bien galiléens.



À l'instant initial  $t' = 0$ , le contrôleur envoie une impulsion lumineuse (faisceau laser par exemple) verticalement vers un miroir situé à une distance  $D$ . Cet instant est également choisi comme l'instant  $t = 0$  dans  $\mathcal{R}$ . À cet instant, le contrôleur est en  $O'$ , le chef de gare en  $O$  et  $O = O'$ .

- On raisonne tout d'abord dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ . En admettant que la lumière s'y propage à  $c$ , quel est le temps  $T'$  mis par la lumière pour atteindre le miroir et revenir au contrôleur.
- On admet que conformément à la théorie de la relativité restreinte, la lumière se propage également à  $c$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Compte-tenu du déplacement de  $M$  dans  $\mathcal{R}$  durant la propagation lumineuse, son trajet y est triangulaire.

- (a) Établir la relation entre l'angle  $\alpha$  (fait par la direction du faisceau lumineux avec l'horizontale dans  $\mathcal{R}$ ),  $c$ ,  $L$  et le temps  $T$  mis par la lumière pour revenir au contrôleur dans  $\mathcal{R}$ .

- (b) Établir une autre relation entre  $\alpha$ ,  $V$  et  $c$ . En déduire  $T$ .

3. En conclure que l'invariance de la vitesse de la lumière dans les deux référentiels implique qu'on a  $T = \gamma T'$ , avec  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$ . Justifier alors le terme de « dilatation des durées » entre  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ .

**Correction de l'exercice 1**

On a immédiatement :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2a_0 t & \dot{y} &= v_0 & \dot{z} &= 0 \\ \ddot{x} &= 2a_0 & \ddot{y} &= 0 & \ddot{z} &= 0 \\ v &= \sqrt{(4a_0^2 t^2 + v_0^2)} & a &= 2|a_0| \end{aligned}$$

**Correction de l'exercice 2**Par définition, on a  $a = \frac{dv}{dt}$ . À chaque instant on a donc, par intégration :

$$v(t) - v(t=0) = \int_{t=0}^t a(t) dt.$$

On intègre ensuite les expressions de  $a(t)$ , linéaires par morceaux. On peut également lire graphiquement la variation de la vitesse comme l'aire sous la courbe : il suffit ici de la découper en triangles et rectangles. On obtient :

$$v(t_2) = v(t_1) + \frac{2 \text{ s} \times 2 \times 6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} / 3}{2} = 7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad v(t_3) = v(t_1) + 7 \text{ s} \times 6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 45 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

**Correction de l'exercice 3**

Les courbes sont représentées sur la Figure 3.

- La vitesse croît linéairement avec le temps pendant la durée  $t_a$ , puis reste constante pendant  $t_u$  et décroît linéairement avec une pente deux fois plus faible pendant  $t_d$ . La durée  $t_d$  doit donc être deux fois plus grande que  $t_a$ . La longueur totale parcourue est l'aire sous la courbe puisqu'en notant  $x$  la position à l'instant  $t$ , on a  $x(t) - x(0) = x(t) = \int_{\tau=0}^t v d\tau$ .
- La courbe de l'accélération se compose de trois portions constantes. De la même manière que précédemment, on a  $v(t) - v(0) = v(t) = \int_{\tau=0}^t a d\tau$ . La vitesse est donc l'aire entre la courbe de l'accélération et l'axe des abscisses, comptée positivement si la courbe est au dessus de l'axe et négativement sinon. Elle est bien nulle à la fin du mouvement puisque les aires au dessus et en dessous de l'axe sont égales.
- On a  $\frac{dx}{dt} = \text{cste}$  sur la portion d'accélération nulle et  $\frac{d^2x}{dt^2} = \text{cste}$  sur les portions à accélération constante. La courbe de la position en fonction du temps se compose donc d'une portion de parabole tournée vers le haut, d'une portion rectiligne et d'une portion de parabole tournée vers le bas. Ces courbes doivent se raccorder continûment et être partout dérivables puisque la position et la vitesse sont continues.

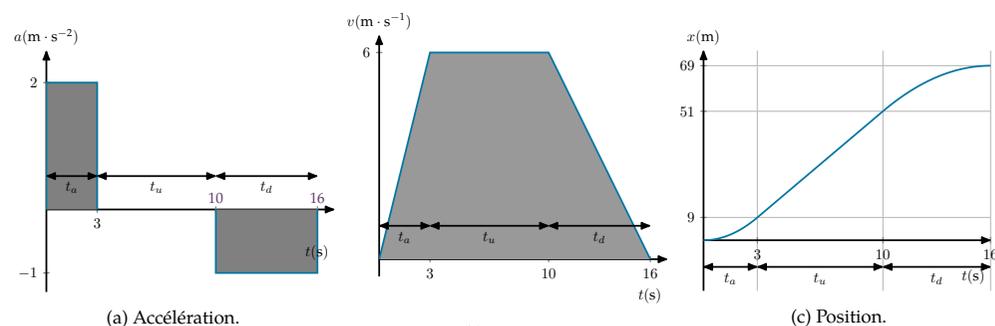
**Correction de l'exercice 4**Notons  $x$  l'axe du mouvement.

FIG. 3 : .

- (a) La vitesse évolue selon :

$$\begin{cases} t \leq t_1 : & v_x = at \\ t \geq t_1 : & v_x - at_1 = -a(t - t_1) \rightarrow v_x = 2at_1 - at. \end{cases}$$

Elle s'annule donc pour  $t = 2t_1$  (représentée sur la figure 4a).

- (b) On l'obtient par intégration :

$$\begin{cases} t \leq t_1 x(t) - 0 & = \int_{t=0}^t v(t) dt = \int_{t=0}^t at dt = \frac{1}{2}at^2 \\ t \geq t_1 x(t) - x(t_1) & = \int_{t=t_1}^t v(t) dt = \int_{t=t_1}^t 2at_1 dt - at dt = 2at_1(t - t_1) - \frac{1}{2}a(t^2 - t_1^2) \\ x(t) & = -at_1^2 + 2at_1t - \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

représenté sur la figure 4b. On vérifie qu'elle est bien continue et dérivable puisque  $v_x$  est continue.

- (c) La distance totale parcourue est  $x(2t_1) = at_1^2/2$ . On a de plus :

$$dx = v_x d \rightarrow x(2t_1) = \int_{x=0}^{x(2t_1)} dx = \int_{t=0}^{2t_1} v_x dt.$$

C'est donc l'aire sous la courbe de  $v_x(t)$ , ce qu'on vérifie puisque l'aire sous ce triangle de base  $2t_1$  et de hauteur  $at_1$  est  $at_1^2$ .

- (a) On vérifie que l'égalité :

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 + \left(\frac{t-t_0}{t_0}\right)^2 = 1$$

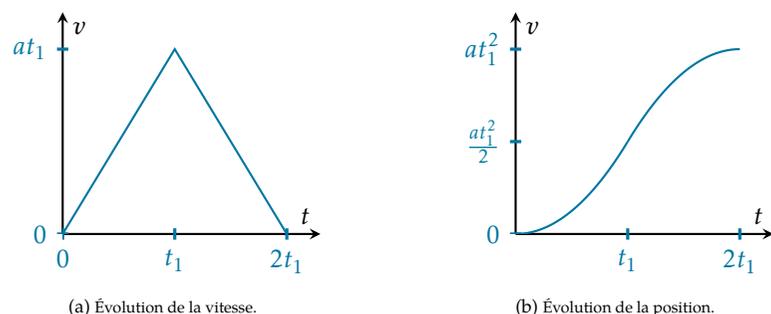


FIG. 4

est vérifiée aux points :  $v = 0, t = 0, v = 0, t = 2t_1, v = v_0, t = t_0$ . Les grandeurs  $v_0$  et  $t_0$  représentent les demi-axes de l'ellipse, analogues du rayon d'un cercle quand ils sont égaux. Comme  $v$  est toujours positif, on a :

$$v = v_0 \sqrt{1 - \left(\frac{t}{t_0} - 1\right)^2}.$$

(b) On en déduit, par intégration :

$$x(t) - 0 = \int_{t=0}^t v(t) dt = v_0 \int_{t=0}^t \sqrt{1 - \left(\frac{t}{t_0} - 1\right)^2} dt.$$

On effectue un changement de variable en posant  $t/t_0 - 1 = \sin(u)$ . On a  $dt = t_0 \cos(u) du$  et  $u \in [-\pi/2; \pi/2]$  pour  $t \in [0; 2t_0]$ . On calcule  $\sqrt{1 - \sin(u)^2} = |\cos(u)| = \cos(u)$  puisque  $\cos(u) \geq 0$  sur cet intervalle, d'où :

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 \int_{u=-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin(u)^2} dt = v_0 t_0 \int_{u=-\pi/2}^{\pi/2} \cos(u)^2 du = v_0 t_0 \int_{u=-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2u)}{2} du \\ &= \frac{v_0 t_0}{2} \left( \pi + [\sin(2u)/2]_{u=-\pi/2}^{\pi/2} \right) = \frac{\pi v_0 t_0}{2}. \end{aligned}$$

Comme précédemment, cette grandeur représente l'aire sous la courbe  $dev(t)$ . On aurait pu obtenir ce résultat directement en utilisant l'aire de l'ellipse, de demi-axes  $v_0$  et  $t_0$ , égale à  $\pi v_0 t_0$  comme on vient de l'établir. On peut facilement retenir ce résultat en le rapprochant de l'aire d'un disque de rayon, égale à  $\pi R^2$  et en interprétant une ellipse comme un cercle de « rayons » différents selon les deux axes, égaux aux demi-axes.

### Correction de l'exercice 5

Choisissons comme origine des temps, l'instant où la première voiture atteint la zone d'accident et comme origine des abscisses le début de cette zone. En notant  $x_1(t)$  son abscisse, on a immédiatement  $x_1(t) = v_2 t$ .

Posons  $D$  la distance entre les deux voitures avant la zone d'accident. La première voiture se trouve quant à elle à  $t = 0$  en  $x_2 = -(D + l)$  et elle parvient à l'instant  $(D + l)/v_1$  à la zone d'accident. L'accident sera évité si la première voiture est entièrement engagée dans la zone d'accident à cet instant, où elle a parcouru  $v_2(D + l)/v_1$ , soit si  $l < v_2(D + l)/v_1$ , i.e  $D > (v_1/v_2 - 1)l = 1,8$  m.

### Correction de l'exercice 6

1. On décompose la vitesse du piéton selon :

$$\vec{v}(M) = v (\cos(\varphi) \vec{e}_y + \sin(\varphi) \vec{e}_x).$$

On obtient son vecteur position en intégrant entre l'instant initial  $t = 0$  où  $M = O$  et un instant ultérieur, avec  $v = \text{cste}$  :

$$\overrightarrow{OM}(t) - \vec{0} = \int_{t=0}^t \vec{v}(M) d\tau = v (\cos(\varphi) \tau \vec{e}_y + \sin(\varphi) \tau \vec{e}_x),$$

soit :

$$y_M(t) = v \cos(\varphi) t \quad \text{et} \quad x_M(t) = v \sin(\varphi) t.$$

2. On obtient de la même manière :

$$\vec{v}(A_2) = V \vec{e}_x \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{A_2(0)A_2(t)} = V t \vec{e}_x \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} x_{A_2}(t) = -D + V t \\ y_{A_2}(t) = L \end{cases}.$$

On en déduit :

- $x_M = x_{A_2}$  pour  $t_x = \frac{D}{V - v \sin(\varphi)}$  ;
- $y_M = y_{A_2}$  pour  $t_y = \frac{L}{v \cos(\varphi)}$ .

On remarque que  $t_x$  diverge pour  $V = v \sin(\varphi)$  : le piéton ne sera jamais rattrapé par la voiture s'ils ont la même vitesse selon  $Ox$ . De même  $t_y$  diverge pour  $\varphi = \pi/2$  : le piéton reste alors sur l'axe  $Ox$ .

Le piéton peut éviter la voiture s'il atteint  $y = L$  avant que la voiture ne l'ait rejoint, soit pour  $t_x > t_y$ , c'est-à-dire :

$$\frac{D}{V - v \sin(\varphi)} > \frac{L}{v \cos(\varphi)}.$$

La vitesse limite  $v_{\min}(\varphi)$  vérifie donc :

$$t_x = t_y \quad \text{soit} \quad v_{\min}(\varphi) = \frac{VL}{D \cos(\varphi) + L \sin(\varphi)}.$$

3. (a) On peut déterminer l'angle  $\varphi$  minimisant  $v_{\min}(\varphi)$  en cherchant à annuler la dérivée de  $v_{\min}(\varphi)$ . Il est cependant plus léger d'utiliser la représentation de Fresnel pour transformer l'expression  $D \cos(\varphi) + L \sin(\varphi)$ . On peut en effet l'écrire :

$$D \cos(\varphi) + L \sin(\varphi) = D \cos(\varphi) + L \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

En représentation de Fresnel, on forme donc le vecteur comme somme de deux vecteurs orthogonaux. Sa norme est donc  $\sqrt{D^2 + L^2}$  et sa phase peut s'écrire  $\varphi - \delta$ , avec  $\tan \delta = L/D$ . On a finalement :

$$D \cos(\varphi) + L \sin(\varphi) = \sqrt{D^2 + L^2} \cos(\varphi - \delta) \quad \text{soit: } v_{\min}(\varphi) = \frac{VL}{\sqrt{D^2 + L^2} \cos(\varphi - \delta)}.$$

Cette expression est minimale pour  $\varphi = \delta$  où la valeur absolue du cosinus est maximale. Son minimum est :

$$v_0 = v_{\min}(\varphi = \delta) = \frac{VL}{\sqrt{D^2 + L^2}}.$$

- (b) Pour  $D \gg L$  (qui est le cas le plus fréquent lors de la traversée d'un passage piéton), on a  $\tan(\delta) \ll 1$ , l'angle  $\delta$ , et donc  $\varphi$ , sont alors très petits devant 1 : le piéton doit traverser selon  $Oy$ . Par ailleurs, on a alors  $v_0 \simeq VL/D$ . Le rapport des vitesses du piéton et de la voiture doit être supérieur au rapport des distances  $L/D$ .

Pour  $L \gg D$ , on a au contraire  $\tan(\delta) \gg 1$  et donc  $\varphi = \delta$  très proche de  $\pi/2$  : le piéton doit courir selon  $Ox$  si la voiture est très proche. On a alors  $v_0 \simeq V$  : il doit courir plus vite que la voiture ne roule pour l'éviter.

### Correction de l'exercice 7

1. Le système possède une direction privilégiée, la direction du vecteur  $\vec{a}$ . On choisit donc les coordonnées cartésiennes.

2. On intègre deux fois par rapport au temps l'équation différentielle  $\frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} = -g\vec{e}_z$  pour obtenir :

$$x = v_0 t \cos(\alpha) \quad \text{et} \quad z = h + v_0 t \sin(\alpha) - \frac{gt^2}{2}.$$

Il reste à « faire disparaître » le paramètre  $t$  pour obtenir la trajectoire :

$$t = \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)} \quad \text{soit: } z - h = x \tan(\alpha) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} x^2.$$

3. (a) On résout tout d'abord l'équation  $z = 0$ . On a donc :

$$-h = x \tan(\alpha) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} x^2 \quad \text{soit: } 0 = x^2 - \frac{2v_0^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{g} x - \frac{2hv_0^2 \cos^2(\alpha)}{g}.$$

L'unique racine positive de cette équation du second degré, qu'on notera  $x_C$  est :

$$x_C = \frac{v_0^2}{g} \left( \frac{\sin(2\alpha)}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sin(2\alpha)}{2}\right)^2 + \frac{2gh}{v_0^2} \cos^2(\alpha)} \right)$$

Pour établir l'altitude maximale, il est fructueux de transformer l'expression de la trajectoire pour y lire directement ses caractéristiques. En faisant apparaître le développement du carré d'une somme, on a en effet :

$$\begin{aligned} z - h &= x \tan(\alpha) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} x^2 = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} \left( x^2 - \frac{2v_0^2 \cos^2(\alpha) \tan(\alpha)}{g} x \right) \\ &= -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} \left[ x - \frac{v_0^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{g} \right]^2 + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}, \end{aligned}$$

$$\text{soit: } z - \left( h + \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g} \right) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} \left[ x - \frac{v_0^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{g} \right]^2.$$

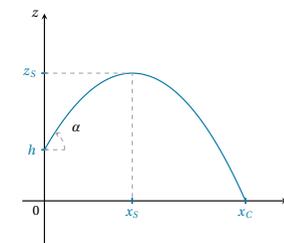
Cette expression est de la forme :

$$z_S - z = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} (x - x_S)^2,$$

avec  $x_S$  et  $z_S$  les coordonnées du sommet de la parabole.

L'altitude maximale sera donc  $z_S = h + \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g}$ , atteinte

$$\text{pour } x_S = \frac{v_0^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{2g}.$$



- (b) L'altitude  $z_S$  est évidemment maximale pour une trajectoire verticale, c'est-à-dire avec  $\alpha = \pi/2$ . On a alors  $z_S = h + \frac{v_0^2}{2g}$ . Quel que soit l'angle  $\alpha$ , l'altitude  $z_S$  croît linéairement avec  $h$ .
- (c) Pour  $h = 0$ , on a  $x_C = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$ , maximale pour  $2\alpha = \pi/2$ , soit  $\alpha = \pi/4$  où elle vaut  $x_C = \frac{v_0^2}{g}$ .
- (d) Pour  $\alpha = \pi/4$  on a, pour  $h$  non nul :

$$x_C = \frac{v_0^2}{2g} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4gh}{v_0^2}} \right).$$

Prenons pour  $h$  la hauteur de la main du joueur au moment du lancer. Pour  $h \simeq 2$  m, le terme sans dimension  $4gh/v_0^2$  n'est pas très grand devant 1 et on a  $\left(1 + \sqrt{1 + 4gh/v_0^2}\right)/2 \simeq 1,17$ . Un lancer de  $h = 2$  m par rapport à un lancer du sol ne fait gagner que 16% à la portée du tir. De plus l'expression de  $x_C$  est bien croissante avec  $h$  mais elle croît lentement puisqu'elle comporte une fonction racine. Pour un lancer avec  $h = 1,5$  m, on aura encore  $\left(1 + \sqrt{1 + 4gh/v_0^2}\right)/2 \simeq 1,13$  : les 0,5 m du lanceur à  $h = 2$  m ne lui font gagner que 3%.

### Correction de l'exercice 8

1. Si la roue ne glisse pas, son centre avance à chaque tour d'une longueur égale à son périmètre, soit  $2\pi R$ . Comme la roue a alors tourné de  $\theta = 2\pi$ , on a  $x_c = x_{c_0} + R\theta$ . Le choix d'origine du repère assure ici que  $x_{c_0} = 0$ .

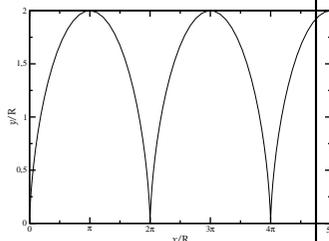
2. On a  $\vec{OA} = \vec{OH} + \vec{HC} + \vec{CA}$  avec  $H$  le projeté orthogonal de  $C$  sur l'axe  $Oy$ . Comme  $\vec{CA} = R[-\sin\theta\vec{e}_x - \cos\theta\vec{e}_y]$ ,  $\vec{HC} = x_C\vec{e}_x = R\theta$  et  $\vec{OH} = R\vec{e}_y$ , on obtient :

$$\vec{OA} = R[(1 - \cos\theta)\vec{e}_y + (\theta - \sin\theta)\vec{e}_x].$$

3. On en déduit les expressions de la vitesse et de l'accélération dans le référentiel  $\mathcal{R}$  dans lequel  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$  sont fixes :

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\sin\theta\vec{e}_y + R\dot{\theta}(1 - \cos\theta)\vec{e}_x$$

$$\text{et } \vec{a} = R(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\vec{e}_y + R[\ddot{\theta}(1 - \cos\theta) + \dot{\theta}^2\sin\theta]\vec{e}_x$$



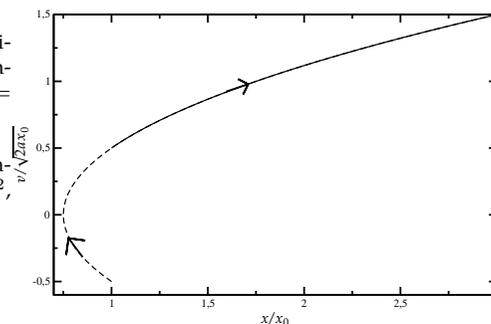
4. Quand le point  $A$  repasse en  $\theta = 0[2\pi]$ , c'est-à-dire au contact avec le sol, on a  $\vec{v} = \vec{0}$  et  $\vec{a} = R\dot{\theta}^2\vec{e}_y$ . La vitesse coïncide alors avec la vitesse du point du sol coïncident à l'instant du contact : on dit qu'il y a « roulement sans glissement ».

### Correction de l'exercice 9

1. On choisit évidemment le repère cartésien d'origine  $O$  dont l'un des axes,  $Ox$  par exemple, coïncide avec la direction de  $\vec{a}$ . On aura donc  $\vec{a} = a\vec{e}_x$ .

2. L'équation du mouvement de  $M$  s'écrit immédiatement :  $v(t) = v_0 + at$  et  $x(t) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$ , soit la trajectoire dans l'espace des phases :

$$x - \left(x_0 - \frac{v_0^2}{2a}\right) = \frac{v^2}{2a},$$



parabole de sommet  $x = (x_0 - \frac{v_0^2}{2a}, v = 0)$ . On représente sur la figure ci-contre  $v/\sqrt{2ax_0}$  en fonction de  $x/x_0$  pour  $v_0/\sqrt{2ax_0} = \frac{1}{2}$  (courbe en traits continus) et  $v_0/\sqrt{2ax_0} = -\frac{1}{2}$  (courbe en traits interrompus). Bien évidemment, les deux trajectoires se confondent pour  $t \rightarrow \infty$ .

### Correction de l'exercice 10

1. Le chien, situé à l'instant  $t$  en  $(x(t), y(t))$  se dirige toujours vers son maître situé, au même instant en  $0, vt$ . Un vecteur directeur de la tangente à la trajectoire du chien est donc  $(1, dy/dx)$ , avec  $dy/dx = (vt - y)/(-x)$ .

2. On calcule alors la norme de la vitesse du chien :  $2v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = |\dot{x}|\sqrt{1 + (dy/dx)^2}$ . On dérive l'équation  $-x dy/dx = vt - y$  par rapport au temps pour obtenir :  $-\dot{x}dy/dx - x\dot{x}d^2y/dx^2 = v - \dot{x}dy/dx$ , soit  $x\dot{x}d^2y/dx^2 = -v$ . En reportant cette expression dans l'expression du module au carré de la vitesse, on obtient :

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4x^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2.$$

3. On vérifie que les solutions proposées sont solutions. Comme les conditions initiales du mouvement sont  $x(0) = a$ ;  $y(0) = 0$  et  $dy/dx(0) = 0$ , on obtient  $\alpha = 1/\sqrt{a}$  et  $\beta = 2a/3$ .

4. Quand le chien rejoint son maître, on a  $x = 0$  et donc  $y = \beta = 2a/3$ . Il faut vérifier à quel instant  $t_f$  le chien atteint la droite  $x = 0$ . Pour cela, on introduit dans l'équation donnant  $\dot{x}$  l'expression de  $d^2y/dx^2$ . On obtient :  $\frac{dx}{dt} = -v/[\alpha\sqrt{x}/4 + 1/(4\alpha\sqrt{x})]$ . On intègre alors selon :

$$\int_{x=a}^{x=0} \alpha\sqrt{x}/4 + \frac{1}{4\alpha\sqrt{x}} dx = -\int_{t=0}^{t_f} v dt \rightarrow \alpha/6a^{3/2} + \sqrt{a}/(2\alpha) = vt_f \rightarrow 2a/3 = vt_f.$$

Or à  $t = 2a/3$ , le maître se trouve en  $2a/3$  qui est bien la position du chien : ils se sont bien rejoints.

5. Le chien court à  $2v$ , il a donc parcouru  $2vt_f$  avant qu'ils se rejoignent. On peut le vérifier en calculant

$$l = \int_{x=a}^{x=0} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x=a}^{x=0} -dx\sqrt{1 + (dy/dx)^2} = \int_{x=0}^{x=a} 2x \frac{d^2y}{dx^2} = \int_{x=0}^{x=a} (\sqrt{x/a} + \sqrt{a/x})/2 = 4a/3.$$

### Correction de l'exercice 11

On a :

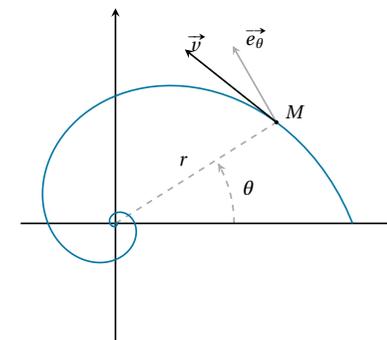
$$\begin{aligned} \vec{v} &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z & \vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z \\ &= 2a_0t\vec{e}_r + (a_0t^2 + r_0)\omega\vec{e}_\theta + v_0\vec{e}_z & &= (2a_0 - (a_0t^2 + r_0)\omega^2)\vec{e}_r + 2(2a_0t + r_0)\omega\vec{e}_\theta \end{aligned}$$

et :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(2a_0t)^2 + \omega^2(a_0t^2 + r_0)^2 + v_0^2} \quad \|\vec{a}\| = \sqrt{(2a_0 - (a_0t^2 + r_0)\omega^2)^2 + 4\omega^2(2a_0t + r_0)^2}$$

### Correction de l'exercice 12

1. On élimine le paramètre  $t$ . On a  $t = \theta/\omega$ , soit  $r = be^{-\theta/(\omega\tau)}$ . Si le point est en  $(r_0 = be^{-\theta_0/(\omega\tau)}; \theta_0 = \omega t_0)$  à l'instant  $t_0$ , il a accompli une révolution pour le premier instant tel que  $\theta = \theta_0 + 2\pi$ , soit  $t = t_0 + 2\pi/\omega$ . On a alors  $r = r_0be^{-2\pi/(\omega\tau)}$ , constant. Cette courbe porte le nom de spirale logarithmique, elle est représentée sur la Figure 12.



2. On obtient  $v_r = \frac{dr}{dt} = -\frac{b}{\tau}e^{-t/\tau}$  et  $v_\theta = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} = b\omega e^{-t/\tau}$ . On détermine également  $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = (1/\tau^2 - \omega^2)be^{-t/\tau}$  et  $a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = -\frac{2b\omega}{\tau}e^{-t/\tau}$ .

3. On calcule  $v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = b\sqrt{\omega^2 + 1/\tau^2}e^{-t/\tau}$  et  $a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = b(\omega^2 + 1/\tau^2)e^{-t/\tau}$ . En notant  $\alpha$  l'angle  $(\vec{e}_r, \vec{v})$ , on a  $\cos(\alpha) = (\vec{v} \cdot \vec{OM}) / (vr) = -1/\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}$ , on remarque en particulier qu'il ne dépend pas du point  $M$ .

### Correction de l'exercice 13

1. On a  $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$  et  $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$ .

2. Si la norme de la vitesse est constante, on a :  $\dot{\theta} = v_0/R$  et donc :

$$\theta(t) - \theta(0) = \theta(t) = \int_{\tau=0}^t \frac{d\theta}{d\tau} d\tau = \frac{v}{R} \int_{\tau=0}^t d\tau = \frac{v\tau}{R}.$$

Si  $v = kt$ , on a  $\dot{\theta} = kt/R$ , soit :

$$\theta(t) - \theta(0) = \theta(t) = \int_{\tau=0}^t \frac{d\theta}{d\tau} d\tau = \frac{k}{R} \int_{\tau=0}^t \tau d\tau = \frac{kt^2}{2R}.$$

3. (a) On a alors  $\dot{\theta} = kt/R$  et  $\ddot{\theta} = k/R$ , soit :

$$\vec{a} = R \left( -\frac{k^2 t^2}{R^2} \vec{e}_r + \frac{k}{R} \vec{e}_\theta \right) \quad \text{soit: } a = k \sqrt{1 + \frac{k^2 t^4}{R^2}}.$$

(b) La distance parcourue est  $D(t) = R\theta = \frac{kt^2}{2}$ .

4. On a dans ce cas  $k = \frac{1}{5} = 2,0 \cdot 10^{-1} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Comme on ne recherche pas explicitement le temps, on le fait disparaître en remplaçant  $kt^2$  par  $2D$ . On aura donc  $a = 3g$  pour  $D$  tel que :

$$3g = k \sqrt{1 + \frac{4D^2}{R^2}} \quad \text{soit: } D = \frac{R}{2} \left( \frac{3g}{k} - 1 \right).$$

Le nombre de tours est  $D/(2\pi R) = 23,2$ .

### Correction de l'exercice 14

1. La vitesse angulaire sur chaque mouvement est  $\omega = 2\pi/T$ . La différence angulaire  $\Delta\theta$  entre les directions des deux planètes varie donc avec le temps  $t$  comme  $\Delta\theta = 2\pi \left( \frac{1}{T_V} - \frac{1}{T_T} \right) t$ . Les planètes sont en conjonction quand  $\Delta\theta = 0 \pmod{2\pi}$ . En choisissant une conjonction comme origine des temps, la suivante se produit pour  $t = T_c$  tel que  $2\pi \left( \frac{1}{T_V} - \frac{1}{T_T} \right) T_c = 2\pi$  soit :  $T_c = \frac{T_T T_V}{T_T - T_V}$ .

2. On calcule  $T_c = 587$  jour.

### Correction de l'exercice 15

1. (a) On a immédiatement  $r = vt$ . L'homme met le même temps que le carrousel pour effectuer un tour complet autour de  $O$  sa vitesse angulaire est donc la même et on a  $\theta = \omega t$  comme pour un point fixe du carrousel.
- (b) On a cette fois-ci  $r = r_0$ . En un temps  $\Delta t$ , l'homme a tourné de  $v\Delta t/r_0$  par rapport au rayon du carrousel sur lequel il se trouvait initialement, qui a lui-même tourné de  $\omega t$ . Sa vitesse angulaire est donc  $\omega + v/r_0$  et on a  $\theta = (\omega + v/r_0)t$ .

2. On a toujours :  $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$  et  $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$ .

- Dans le premier cas, on obtient :

$$\vec{v} = v(\vec{e}_r + \omega t \vec{e}_\theta) \quad \vec{a} = v\omega(2\vec{e}_\theta - \omega t \vec{e}_r).$$

- Dans le deuxième, on a :

$$\vec{v} = (v + r_0\omega)\vec{e}_\theta \quad \vec{a} = -r_0 \left( \omega + \frac{v}{r_0} \right)^2 \vec{e}_r.$$

3. • Dans le premier cas, on exprime la norme  $a$  de  $\vec{a}$  en fonction de  $r$  :  $a = v\omega\sqrt{4 + (\omega t)^2} = v\omega\sqrt{4 + \left(\frac{r\omega}{v}\right)^2}$ . Cette expression est croissante et maximale pour  $r = R$ , on résout alors  $a = g$ . On obtient  $R = 6,0$  m.
- Dans le deuxième cas, on a directement  $a = r_0 \left( \omega + \frac{v}{r_0} \right)^2$ . On résout  $a = g$  pour  $r_0 = R = 4,5$  m.

### Correction de l'exercice 16

1. Notons  $\omega$  la pulsation de rotation du mors. On a  $\omega = \frac{2\pi}{60} \times 2300 = 2,4 \cdot 10^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . L'ensemble du foret et du mors constitue un solide en rotation autour de leur axe commun de symétrie. La vitesse des points de la périphérie est alors  $\frac{d\omega}{2} = 9,6 \cdot 10^{-1} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
2. (a) Le corps de la perceuse constitue ici un solide en rotation autour de l'axe du mors à la pulsation  $\omega$ . L'angle  $\alpha$  n'influe que sur la direction de cet axe, pas sur les normes des vitesses de rotation. Les points les plus éloignés de cet axe auront la plus grande vitesse, égale à  $\omega R_p = 4,3 \cdot 10^1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Il est évident que cette vitesse ne sera pas conservée, d'une part parce que l'opérateur maintiendra le corps de la perceuse, et d'autre part parce que le moteur de la perceuse ne dispose pas d'une puissance suffisante.
- (b) L'axe du mors  $\Delta$  reste ici horizontal et le foret constitue un solide en rotation autour de  $\Delta$ . Le foret décrit alors un cône de demi-angle au sommet  $\alpha$  à la pulsation  $\omega$ . Son extrémité se trouvant à la distance  $l_f \sin(\alpha) + d \sin(\alpha)/2 = 1,4$  cm, la norme de son vecteur vitesse est  $1,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Le trou sera de forme conique.
3. L'angle  $\alpha$  est désormais entre l'axe commun du foret et du mors et celui de la perceuse.
- (a) Si le foret se bloque, c'est l'axe du corps de la perceuse qui va décrire une trajectoire conique. La plus grande norme de vecteur vitesse sera pour le point situé à  $l_p \sin(\alpha)$  de l'axe du mors, soit  $\omega l_p \sin(\alpha) = 6,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . De nouveau, le corps sera bloqué par l'opérateur.

- (b) Ici l'axe du foret reste immobile, incliné par rapport à celui du corps de la perceuse. Les normes des vecteurs vitesse sont donc les mêmes que dans la première question. Le trou sera cylindrique de diamètre  $d$  mais il faudra incliner le corps de la perceuse pour qu'il soit horizontal.

### Correction de l'exercice 17

- (a) Pour un mouvement du nord vers le sud, l'angle  $\varphi$  reste constant. Il décrit un cercle de rayon  $R_T$  à la vitesse  $v$  uniforme. On a donc  $\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R_T}$ .
  - (b) C'est désormais l'angle  $\theta$  qui est constant et  $\varphi$  qui varie. Par ailleurs, le cercle décrit a pour rayon  $R_T \sin(\theta)$ . On a donc  $\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{v}{R_T \sin(\theta)}$ .
2. Pour un mouvement à la surface d'une sphère, les composantes sphériques du vecteur vitesse sont :

$$v_\theta = R_T \dot{\theta} \quad v_\varphi = R_T \sin(\theta) \dot{\varphi}.$$

Les informations sur la direction du vecteur vitesse assurent que  $v_\theta \geq 0$  et  $|v_\varphi/v_\theta| = \tan(\alpha)$ . Dans le référentiel de la Terre, le Soleil décrit une révolution en  $T = 24$  h, d'est en ouest, ce qui correspond à une vitesse angulaire  $\dot{\varphi} = -\frac{2\pi}{T}$ . L'avion doit avoir la même vitesse angulaire pour suivre le Soleil. On a donc :

$$v = \sqrt{v_\theta^2 + v_\varphi^2} = |v_\varphi| \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2(\alpha)}} = \frac{2\pi R_T \sin(\theta)}{T} \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2(\alpha)}}.$$

On vérifie que la norme  $v$  est bien maximale quand il croise l'équateur, c'est-à-dire pour  $\theta = \pi/2$ .

### Correction de l'exercice 18

On calcule les dérivées temporelles de chacun des vecteurs  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\theta$  et  $\vec{e}_\varphi$  de la manière suivante, illustrée pour  $\vec{e}_r$ .

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\vec{e}_r}{d\theta} \dot{\theta} + \frac{d\vec{e}_r}{d\varphi} \dot{\varphi}.$$

Pour la dérivée par rapport à  $\theta$ , on est dans la situation des coordonnées cylindriques, et on peut écrire directement :

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r,$$

et on observe que  $\frac{d\vec{e}_\varphi}{d\theta} = \vec{0}$ .

Pour les dérivées par rapport à  $\varphi$  c'est un peu plus compliqué... La dérivée d'un vecteur  $\vec{X}$  par rapport à un angle s'exprime à l'aide du produit vectoriel du vecteur unitaire définissant l'angle orienté de la rotation par  $\vec{X}$ .

Par exemple, pour les rotations d'angle  $\varphi$ , le vecteur dirigeant la rotation est  $\vec{e}_z$ . On a donc :

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\varphi} = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r = \sin(\theta) \vec{e}_\varphi, \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{d\varphi} = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\theta = \cos(\theta) \vec{e}_\varphi, \quad \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\varphi = -(\sin(\theta) \vec{e}_r + \cos(\theta) \vec{e}_\theta)$$

Remarquons que les rotations correspondant à des variations de  $\theta$  sont des rotations autour du vecteur  $\vec{e}_\varphi$ .

Il ne reste ensuite plus qu'à dériver l'expression de la vitesse en coordonnées sphériques.

### Correction de l'exercice 19

- La lumière doit parcourir la distance  $2L$  à  $c$ , elle met donc le temps  $T' = 2L/c$ .
  - (a) L'hypoténuse des triangles représentés vaut  $L/\sin \alpha$ , la distance parcourue dans ce référentiel vaut donc  $2L/\sin \alpha$ , soit  $T = \frac{2L}{c \sin \alpha}$  si la lumière s'y propage également à  $c$ .
  - (b) Le miroir se déplace à  $V$  dans  $\mathcal{R}$ . Son abscisse  $x_M$  et son ordonnée  $y_M$  sont donc données par  $x_M = Vt$  et  $y_M = L$ . L'intersection avec la trajectoire de la lumière :  $x = c \cos \alpha t$  et  $y = c \sin \alpha t$  pour  $r = T/2$  assure donc que  $\cos \alpha = V/c$  et donc  $T = \frac{2L}{c \sqrt{1 - v^2/c^2}}$ .
3. On a bien  $T = \gamma T'$  avec  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ . Pour  $v \ll c$  (imposé par la relativité restreinte sinon cette expression n'est plus définie...)  $\gamma \geq 1$ . À une durée  $T$  dans  $\mathcal{R}$  correspond une durée inférieure  $T'$  dans  $\mathcal{R}'$  : le temps s'écoule plus lentement dans  $\mathcal{R}'$ .