

## Induction de Lorentz

### Exercice 1 : Freinage d'un mobile en translation

On considère une spire carrée de côté  $a$ , en translation rectiligne selon l'axe Ox (la spire est guidée dans un plan horizontal, sans frottements, par un dispositif non représenté). Le champ magnétique est nul, sauf dans le domaine  $0 \leq x \leq \ell$ , où il est alors uniforme et stationnaire, égal à  $B\vec{e}_z$ .

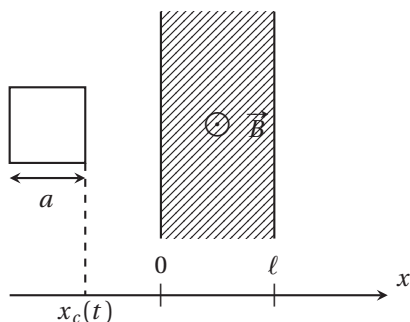


Fig. 1 : Spire carrée en translation, freinée au passage dans le champ magnétique.

On utilise un repère cartésien direct  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , et on considère  $\ell > a$ . La position du cadre est représentée par l'abscisse  $x_C(t)$  de son segment droit (voir Figure 1). On lance le cadre avec une vitesse  $v_0\vec{e}_x$  depuis la partie de champ magnétique nul correspondant à  $x < 0$ . Le cadre pénètre dans la zone de champ magnétique à  $t = 0$  et on étudie ensuite la dynamique du cadre, au cours de sa traversée dans la zone de champ magnétique. Le circuit défini par le cadre a une masse  $m$  et présente une résistance  $R$ , et on néglige son inductance propre dans cet exercice. On considère le cas  $a < \ell$ .

1. Entrée dans la zone de champ magnétique  $0 \leq x \leq a$ .
  - (a) Exprimer la force électromotrice induite dans le circuit défini par le cadre, pour  $0 \leq x_C \leq a$ .
  - (b) En déduire la force de Laplace qui s'exerce sur le cadre pendant cette phase.
  - (c) Déterminer l'expression de la vitesse  $v_x(t)$ , puis de l'abscisse  $x_C(t)$  pour  $0 \leq x_C \leq a$ . On introduira la constante de temps  $\tau = \frac{mR}{a^2 B^2}$ .
  - (d) Déterminer la date  $t_1$  correspondant à  $x_C(t_1) = a$ , en fonction de  $v_0, \tau$  et  $a$ .
2. Adapter ces raisonnements à la suite du mouvement pour en déduire la vitesse finale du cadre lorsqu'il est entièrement sorti de la zone où règne le champ magnétique.

### Exercice 2 : Freinage d'un pendule en rotation

On considère une spire formant un pendule pesant de masse  $m$ , dont la position angulaire est repérée par l'angle  $\alpha(t)$ , comme indiqué sur la Figure 2. La spire est caractérisée par son rayon  $\ell$  et sa largeur angulaire

$\theta_S$ . Son moment cinétique par rapport à l'axe Oz s'écrit  $L_z(t) = J_z \omega(t)$ , avec  $\omega = \dot{\alpha}(t)$ . Le champ magnétique vaut  $B_0\vec{e}_z$  dans la zone hachurée de largeur angulaire  $2\theta_B > \theta_S$  et il est nul en dehors. On lâche la spire sans vitesse initiale avec un angle  $\alpha(0) = -1,5\theta_S$ . Le champ de pesanteur est  $-g\vec{e}_y$ . On note  $\ell_C$  la distance entre le point O et le centre de gravité de la spire.

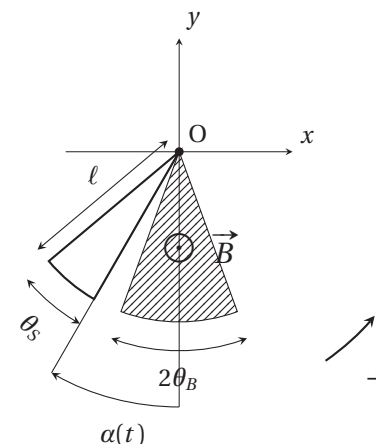


Fig. 2 : Pendule-spire freiné par le passage dans un champ magnétique. Avec les orientations choisies, la partie droite du pendule entre dans la zone de champ magnétique pour  $\alpha = -\theta_B$ .

1. (a) En l'absence totale de champ magnétique, rappeler l'équation différentielle régissant l'évolution de l'angle  $\alpha$ .  
 (b) Dans la limite de petits angles, montrer que l'on obtient un oscillateur harmonique et exprimer la période des oscillations.
2. Avec le champ magnétique présent dans la zone hachurée, expliquer qualitativement les phénomènes physiques qui se manifestent et les différentes phases du mouvement à envisager pour écrire l'équation différentielle sur  $t \mapsto \alpha(t)$ .
3. Dans cette question, on cherche à écrire l'équation différentielle portant sur  $t \mapsto \alpha(t)$  dans la phase où le pendule a été lâché comme indiqué sur la figure et entre dans la zone de champ magnétique, c'est-à-dire pour  $-\theta_B < \alpha < -\theta_B + \theta_S$ .
  - (a) Pour  $-\theta_B < \alpha < \theta_B + \theta_S$ , exprimer le flux du champ magnétique à travers la spire.
  - (b) En déduire la force électromotrice puis l'intensité du courant.
  - (c) Déterminer le moment résultant par rapport à l'axe Oz.
  - (d) Déterminer l'équation différentielle portant sur  $t \mapsto \alpha(t)$ . Exprimer une constante de temps  $\tau$  qui traduit la force de freinage associée au phénomène d'induction.

- (e) Quelle hiérarchie doit-on avoir entre  $T_0$  et  $\tau$  pour pouvoir observer de nombreuses oscillations du pendule ?

### Exercice 3 : Principe d'un moteur à courant continu à entrefer cylindrique

On étudie un modèle simple de moteur à courant continu, utilisant la géométrie cylindrique commune à la majorité des moteurs.

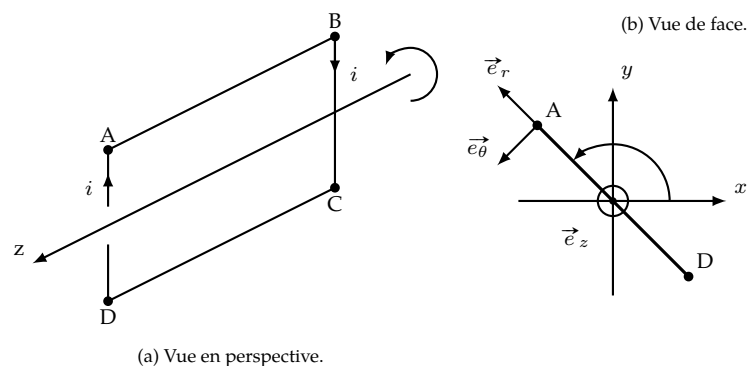


FIG. 3 : Géométrie simplifiée retenue pour le rotor (circuit induit).

Le rotor sera modélisé par une unique spire rectangulaire  $ABCD$ , de rayon  $R$  et de longueur  $\ell$ , représentée sur la Figure 3, entraînée en rotation autour de l'axe  $Oz$ .

Une source de courant continu alimente cette spire et nous notons  $i$  l'intensité du courant dans ce circuit correspondant, orienté dans le sens  $ABCD$  indiqué sur la figure.

Cette spire est soumise à un champ magnétique que nous modéliserons par un champ de direction radiale en chaque point (au sens des coordonnées cylindriques), dirigé selon  $\vec{e}_r$  pour  $x > 0$  et selon  $-\vec{e}_r$  pour  $x < 0$  :

- $\vec{B}(x < 0) = -B_0 \vec{e}_r$  ;
- $\vec{B}(x > 0) = +B_0 \vec{e}_r$ .

En pratique, ce champ magnétique est développé grâce à des pièces polaires, fixes dans le référentiel d'étude, qui constituent le stator (voir Figure 4) et la spire que nous considérons est obtenue en réalisant des enroulements sur une pièce cylindrique qui guide les lignes de champ magnétique.

**Couple moteur.** Déterminer l'expression du moment résultant (couple moteur) en fonction de  $B_0$ ,  $R$ ,  $\ell$  et  $i$ .

Système collecteurs — balais.]

1. Si la spire est toujours alimentée par la même intensité  $i$ , expliquer le problème rencontré lorsque la spire a effectué un demi-tour.
2. Expliquer comment le système collecteurs-balais de la Figure 5 permet de résoudre ce problème.

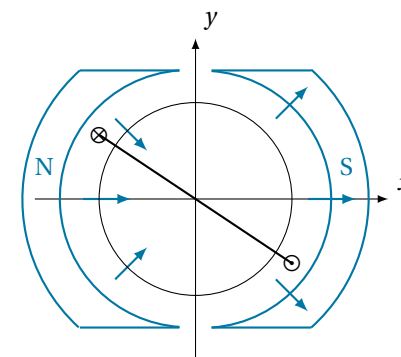


FIG. 4 : Une spire rectangulaire placée dans un entrefer cylindrique. Les flèches représentent le champ magnétique en six points de l'entrefer, région de l'espace contenue entre les pièces polaires du stator, et le noyau sur lequel on bobine le circuit dit induit.

**Force électromotrice induite.** Lorsque la spire rectangulaire se déplace dans le champ extérieur, il apparaît une force électromotrice dans le circuit associé à la spire. Déterminer l'expression de cette f.é.m.  $\epsilon$  en exprimant la nullité de la somme de la puissance des forces de Laplace et de la puissance de cette f.é.m. induite.

### Exercice 4 : Comportement fréquentiel d'un haut-parleur

On modélise comme en cours un haut-parleur par un rail de Laplace de masse  $m$  et de longueur  $l$  soumis à une force de rappel élastique  $\vec{F}_e$  caractérisée par une raideur  $k$  et à une force de frottement due à l'air  $\vec{F}_a$  d'amplitude égale à  $\alpha v$  avec  $\alpha$  une constante positive et  $v = \dot{x}$  la vitesse de translation de la barre.

Le circuit est caractérisé par une auto-impédance  $L$ , une résistance  $R$  et est plongé dans un champ magnétique d'intensité  $B_0$  orthogonal au plan du circuit. L'ensemble est alimenté par un générateur de force électromotrice  $E$  à la pulsation  $\omega$ .

1. Justifier que le sens du champ magnétique n'a pas d'importance en régime sinusoïdal établi.
2. (a) Établir les équations différentielles couplées vérifiées par l'intensité  $i$  dans le circuit et par la vitesse  $\dot{x}$  de la barre. En déduire l'intensité complexe  $\underline{I}$  en fonction de  $E$ ,  $\omega$ , des paramètres du circuit et des caractéristiques mécaniques.  
(b) On introduit les paramètres  $(B_0 \ell)^2 / \alpha$ ,  $(B_0 \ell)^2 / k$  et  $(B_0 \ell)^2 / m$  dont on précisera la dimension. Quelle est la nature du filtre ainsi constitué ?
3. (a) Peut-on toujours utiliser le formalisme de l'amplitude complexe si l'intensité de la force de frottement varie non plus linéairement avec  $v$  mais comme son carré  $v^2$ .  
(b) Justifier qualitativement qu'un signal électrique à  $\omega$  produira alors également des harmoniques à la pulsation  $2\omega$ . Quelle conséquence cela aura-t-il sur la fidélité du haut-parleur ?

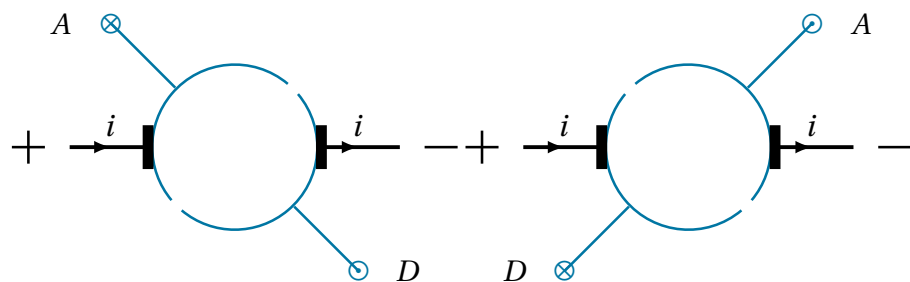
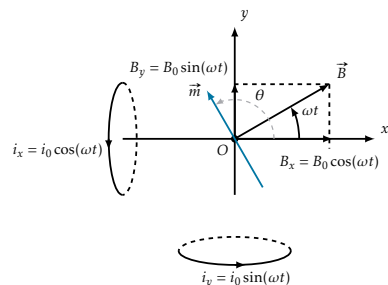


Fig. 5 : Système balais-collecteurs pour le redressement du courant à chaque demi-tour du rotor. Les balais sont les petits rectangles pleins. Les collecteurs sont représentés par les arcs de cercle.

**Exercice 5 : Aimant entraîné par un champ tournant**

On cherche à entraîner en rotation autour de l'axe  $Oz$  un aimant considéré ponctuel situé en  $O$ . On utilise pour cela le champ tournant créé par deux bobines identiques d'axes  $Ox$  et  $Oy$ , situées à la même distance de  $O$  et parcourues par un courant de même intensité oscillant à la pulsation  $\omega$ . On désigne par  $B_O$  l'intensité du champ que chacune produit en  $O$ .

- (a) Quel doit être le déphasage entre les intensités dans chaque bobine pour produire un champ tournant d'intensité constante ?
- (b) L'aimant est caractérisé par son moment magnétique  $\vec{m}$ , de norme constante. Quelle est l'expression du couple  $\mathcal{C}_{/Oz}$  des forces de Laplace qu'il subit en fonction de  $\vec{m}$  et  $\vec{B}$  ?



- L'aimant est contraint à tourner dans le plan  $xOy$  par une liaison pivot et on note  $\theta$  l'angle entre  $\vec{e}_x$  et la direction du vecteur  $\vec{m}$ , qui reste toujours celle de l'axe Sud-Nord de l'aimant. On note enfin  $J$  le moment d'inertie de l'aimant par rapport à l'axe  $Oz$ . Dans un premier temps, seul le couple des forces de Laplace s'exerce sur l'aimant.

- Établir l'équation différentielle d'évolution de l'angle  $\theta$  et en déduire que l'aimant peut être animé d'un mouvement de rotation à une vitesse angulaire constante dont on donnera la valeur. Que peut-on alors dire de l'angle entre l'aimant et le champ  $\vec{B}$  au cours du mouvement ?
- On considère pour cette question que l'aimant est soumis à un couple résistant par rapport à  $Oz$ , noté  $-\Gamma$  avec  $\Gamma \geq 0$ . Déterminer la valeur maximale de  $\Gamma$ , notée  $\Gamma_{\max}$  pour laquelle l'aimant peut de nouveau tourner à vitesse constante. Quel est alors l'angle entre  $\vec{B}$  et  $\vec{m}$  ? On exprimera  $\Gamma_{\max}$  en fonction de  $B_0$  et  $m$ .

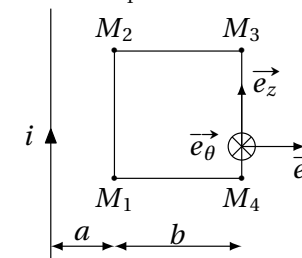
- On considère de nouveau que l'aimant n'est soumis qu'au couple des forces de Laplace.
  - Établir l'équation différentielle d'évolution de l'angle  $\alpha$  défini par  $\alpha(t) \equiv \omega t - \theta(t)$ . Décrire les solutions.
  - À l'instant  $t = 0$ , on a  $\theta = 0$  et l'aimant est animé de la vitesse angulaire  $\omega(1 - \beta)$  avec  $0 < \beta \ll 1$ . Établir l'expression de  $\alpha(t)$  et en déduire celle de  $\theta(t)$ .

**Induction de Neumann**

**Exercice 6 : Inductance mutuelle entre une spire et un fil.**

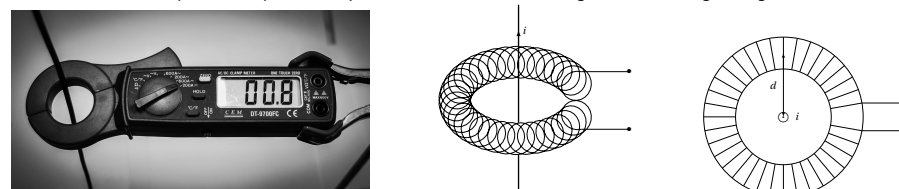
On considère un fil rectiligne infini parcouru par un courant d'intensité  $i$  et une spire carrée  $M_1M_2M_3M_4$ .

- Déterminer l'expression du flux du champ magnétique développé par le fil à travers le circuit défini par la spire  $M_1M_2M_3M_4$  en fonction de  $\mu_0, i, a$  et  $b$ .
- En appliquant la définition de l'inductance mutuelle entre le fil et la spire, en déduire l'expression de cette inductance mutuelle  $M$  en fonction de  $\mu_0, a, b$ .



**Exercice 7 : Pince ampèremétrique**

Pour mesurer l'intensité efficace d'un courant alternatif dans une installation électrique, on peut utiliser une pince ampèremétrique dont cet exercice présente le principe de fonctionnement.



On cherche donc à mesurer l'intensité du courant alternatif qui circule dans un fil assimilé à un fil rectiligne infini, choisi selon l'axe  $Oz$ . On choisit un système de coordonnées cylindriques, avec une base  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ . L'intensité qui circule dans le sens des  $z$  croissant est de la forme  $i = I_{\text{eff}}\sqrt{2} \cos(\omega t)$ . On dispose autour du fil un circuit constitué d'un ensemble de  $N$  spires circulaires, chacune d'une aire  $S$ , qu'on modélise par un tore disposé autour du fil. Avec le système de coordonnées utilisé, le vecteur surface de chaque spire est selon  $\vec{e}_\theta$ .

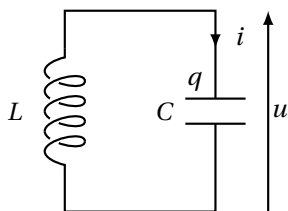
- Avec une intensité de  $1,0 \text{ A}$ , que vaut le champ magnétique à une distance  $d = 2,0 \text{ cm}$ . On donne  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ . Le champ magnétique est-il uniforme sur le disque délimité par chaque spire ?

Dans la suite, on confondra le champ magnétique moyen sur le disque délimité par chaque spire avec sa valeur au centre de cette spire, à la distance  $d$  du fil.

- Exprimer la force électromotrice  $e$  développée aux bornes du circuit constitué par les  $N$  spires.
- En déduire l'expression de la valeur efficace  $E_{\text{eff}}$  de la tension mesurée avec cette pince ampèremétrique en fonction  $\mu_0, S, \omega, I_{\text{eff}}, d$ .
- (a) Quel doit être l'ordre de grandeur de  $N$  pour avoir une tension de l'ordre de  $0,1 \text{ V}$  pour un courant de l'ordre de  $100 \text{ A}$ ? On prendra les paramètres géométriques :  $d \simeq 3 \text{ cm}$ ;  $S \simeq 1 \text{ cm}^2$ , à la pulsation  $\omega = 2\pi \times 50 \text{ Hz}$  :  
(b) Pourquoi ne peut-on pas avoir confiance dans la mesure de la photographie?

### Exercice 8 : Boucle de détection

On présente schématiquement le principe de fonctionnement d'une « boucle de détection ». Ce dispositif permet de détecter une voiture se présentant devant une barrière (sortie d'une aire de stationnement typiquement), de façon à en actionner l'ouverture.



- (a) On considère le circuit LC de la figure ci-contre. Déterminer l'équation différentielle régissant l'évolution de la tension aux bornes du condensateur.  
(b) Quelle est la forme générale des solutions de l'équation précédente?
- On admet dans la suite que l'on dispose de deux dispositifs analogues délivrant chacun une tension sinusoïdale dont la pulsation dépend d'une inductance  $L$ , comme dans l'oscillateur LC de la question précédente. L'un des deux oscillateurs a une inductance fixée et l'autre voit son inductance varier lorsque la carcasse métallique de la voiture est à proximité. En l'absence de perturbation, les deux oscillateurs oscillent en phase, avec la même amplitude.  
(a) Expliquer qualitativement comment la présence d'une masse métallique à proximité d'un solénoïde est susceptible de faire varier son inductance propre.  
(b) On note  $u_1(t) = U_0 \cos(\omega_0 t)$  la tension délivrée par l'oscillateur de référence et  $u_2(t) = U_0 \cos(\omega_1 t)$  celle délivrée par l'oscillateur qui ressent la présence de l'automobile. La différence  $\omega_1 - \omega_0$  est faible en valeur relative par rapport à  $\omega_0$ . On cherche à détecter l'apparition d'une modulation à basse fréquence dans le signal obtenu en sommant ces deux tensions. Exprimer le signal  $u_1(t) + u_2(t)$  sous la forme d'un produit faisant intervenir deux pulsations très différentes  $\omega_m$  et  $\Delta\omega$ , à exprimer en fonction de  $\omega_0$  et  $\omega_1$ .  
(c) Représenter l'allure de ce signal en mettant en évidence une modulation à basse fréquence des oscillations rapides.

### Exercice 9 : Plaque à induction

On illustre le principe des plaques à induction sur un modèle simple. La partie épaisse du fond de la casserole est modélisée par un ensemble de quatre spires circulaires concentriques, de diamètres respectifs  $D_1, D_2, D_3, D_4$ . On notera  $R_1, R_2, R_3, R_4$  les résistances électriques de ces spires. La casserole est soumise à un champ magnétique variable, orthogonal au fond de la casserole, sous la forme :

$$\vec{B} = B_0 \sin(\omega t) \vec{e}_z.$$

- Exprimer la force électromotrice  $e_k$  induite dans le circuit associé à la spire  $k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ).
- En déduire l'expression de l'intensité  $i_k(t)$  en fonction de  $\omega, B_0, D_k, R_k$ .
- Exprimer la puissance instantanée dissipée par effet Joule dans l'ensemble des quatre spires.
- On rappelle la formule suivante, utilisée par exemple pour calculer une valeur efficace en régime sinusoïdal,  $\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt = \frac{1}{2}$ . Exprimer la moyenne temporelle de la puissance dissipée par effet Joule.
- Les spires sont toutes réalisées avec un conducteur de conductivité  $\gamma$ , de section  $S$ . On rappelle qu'un tronçon de conducteur de conductivité  $\gamma$ , de longueur  $\ell$  et de section  $S$  a une résistance électrique  $R = \frac{1}{\gamma} \frac{\ell}{S}$ . Exprimer la puissance dissipée en fonction de  $\gamma, B_0, \omega, S$  et des  $\{D_k\}$ .
- Les fréquences utilisées sont de l'ordre de quelques dizaines de kilohertz. D'après la dépendance en fréquence, est-il pertinent de choisir des fréquences élevées?

### Exercice 10 : Résonances de circuits couplés

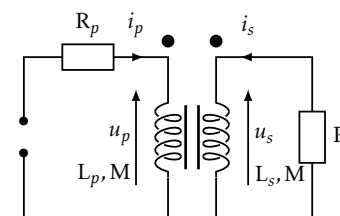
On considère une bobine de rayon  $R = 2 \text{ cm}$  et de longueur  $\ell = 10 \text{ cm}$  sur laquelle sont enroulées  $N = 2000$  spires. On néglige toute les résistances.

- (a) Estimer son auto-inductance notée  $L$  dans le cas idéal.  
(b) On forme un circuit L-C avec cette bobine et un condensateur de capacité  $C = 1 \mu\text{F}$ . Déterminer sa fréquence de résonance.
- On couple ce circuit LC à un circuit identique par mutuelle : on note  $M$  la valeur de leur inductance mutuelle.  
(a) Quelle serait l'expression de  $M$ ? On la note  $M_{\text{max}}$  et on suppose par la suite que  $M = \alpha M_{\text{max}}$  avec  $\alpha$  une constante vérifiant  $\alpha < 1$ . Qu'obtient donc dans le cas  $\alpha = 1 - \beta$ , avec  $\beta \ll 1$ . On se place dans cette condition dans toute la suite.  
(b) Décrire l'évolution des courants  $i_1$  et  $i_2$ . Quelles données supplémentaires doit-on connaître pour déterminer complètement  $i_1$  et  $i_2$ ?  
(c) Discuter qualitativement le cas où les deux bobines ne sont plus identiques.

### Exercice 11 : Puissances dans un transformateur idéal

On considère le transformateur représenté sur la figure ci-dessous.

Le circuit primaire (à gauche sur le schéma) est caractérisé par une auto-inductance notée  $L_p$ , une inductance mutuelle  $M$  et une résistance  $R_p$ . Il est alimenté par un générateur idéal de tension d'amplitude  $E$  à la pulsation  $\omega$ . Le circuit secondaire (à droite sur le schéma) est caractérisé par une auto-inductance notée  $L_s$  et la même inductance mutuelle  $M$ . La résistance  $R_s$  prend en compte à la fois la résistance de la bobine (négligeable le plus souvent) et du dipôle qu'on cherche à alimenter.



Avec les conventions représentées sur le schéma pour les intensités  $i_1$  et  $i_2$ , le coefficient  $M$  est positif.

On ne fait dans un premier temps aucune hypothèse sur les relations liant  $L_s, L_p$  et  $M$ .

1. Établir le système d'équations couplées vérifiées par les intensités  $i_1$  et  $i_2$  en régime sinusoïdal établi.
2. En déduire le rapport des amplitudes complexes  $\underline{I}_s/\underline{I}_p$ , puis l'expression de  $\underline{I}_p$  en fonction de  $E$  et des caractéristiques des circuits.
3. On considère maintenant le cas d'un transformateur idéal :
  - ses inductances vérifient  $L_s L_p \simeq M^2$  et  $L_s/L_p = N_s^2/N_p^2$ , avec  $N$  le nombre de spires des enroulements,
  - les résistances sont négligeables devant les impédances inductives.
  - (a) Simplifier l'expression précédente de  $\underline{I}_1$  pour l'exprimer uniquement en fonction de  $E$ ,  $R_s$  et  $R_p$ . Interpréter : à quoi est équivalent le circuit secondaire vu du circuit primaire ?
  - (b) Établir les expressions des rapports  $\underline{U}_2/\underline{U}_1$  et  $\underline{I}_2/\underline{I}_1$ . Que peut-on en déduire concernant la puissance reçue par l'enroulement du primaire et celle fournie par l'enroulement du secondaire ?
  - (c) Établir l'expression de la puissance moyenne fournie par le générateur d'amplitude  $E$  et de celle reçue par  $R_s$  et les comparer. Pour quelle valeur du rapport  $R_s/R_p$  cette dernière est-elle maximale quand  $E$ ,  $R_p$  et  $\omega$  sont fixés ?