Les vecteurs sont désignés selon $\overrightarrow{X}$, X désignant la norme de $\overrightarrow{X}$. Pour tous les satellites terrestres, on prendra le rayon de la Terre $R_T = 6{,}4 \cdot 10^3$ km, l'intensité du champ de gravitation au niveau du sol proche de $g = 9{,}8\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ et la période de rotation de la Terre égale à $T_0 = 24$ h.

Exercices d'application : Mise en orbite, modèle de Bohr,modification d'orbites, deuxième vitesse cosmique, oscillateur harmonique spatial

Culture en sciences physiques : Mise en orbite, modification d'orbites, modèle de Bohr, deuxième vitesse cosmique, désorbitation

Corrigés en TD : Mise en orbite, collision, modification d'orbites, oscillateur harmonique spatial

Mouvements circulaires

Exercice 1 : Mise en orbite

On lance un satellite de masse m d'une base terrestre située à la latitude λ (on rappelle que la latitude est nulle à l'équateur et vaut 90° aux pôles).

1. Faire un schéma et déterminer sa vitesse dans le référentiel géocentrique avant le lancement.
2. En déduire l'énergie à lui communiquer pour le placer sur une orbite de rayon R en fonction de g, R_T, R, T m et λ.
3. Justifier ainsi la localisation des centres de lancement proches de l'équateur.

Exercice 2 : Modèles de Rutherford et Bohr

On considère l'interaction électrostatique entre l'électron (de masse $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg et de charge $q = -e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C) et le proton (masse $m' = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg, charge $q' = e$) d'un atome d'hydrogène. On donne également $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ SI.

En 1911, l'expérience de Rutherford (voir exo suivant) montre qu'il existe un noyau quasi ponctuel chargé positivement au sein de l'atome. Le modèle précédent de l'atome dû à Thomson (électrons localisés dans une sphère chargée uniformément positivement en volume, *cf* exercice sur le bleu du ciel) est alors invalidé. Rhuterford propose un modèle planétaire dans lequel les électrons décrivent des trajectoires circulaires autour d'un noyau ponctuel fixe.

1. Déterminer l'énergie mécanique d'un électron sur une trajectoire de rayon a en fonction des paramètres du problème.
2. Déterminer son moment cinétique.

Pour expliquer les raies discrètes du rayonnement émis par une lampe à décharge, observées par Balmer en 1885, Bohr propose en 1913 un modèle dans lequel il impose au moment cinétique d'être quantifié, *ie* de ne prendre que les valeurs $\sigma_c = n\frac{h}{2\pi}$, où n est un entier et h la constante de Planck ($h = 2\pi \times 1{,}055 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$).

1. Montrer que l'énergie mécanique et le rayon sont aussi quantifiés : on a $a = n^2 a_0$ et $\mathcal{E}_\mathrm{m} = -\frac{\mathcal{E}_0}{n^2}$ où a_0 (rayon de Bohr) et $\mathcal{E}_0$ s'expriment en fonction de constantes fondamentales.
2. Pourquoi peut-on faire l'hypothèse que l'émission d'un photon d'énergie $h\nu$ est due à la transition de l'électron d'une orbite d'énergie $\mathcal{E}_n$ à une orbite d'énergie $\mathcal{E}'_n$ telles que $h\nu = \mathcal{E}_n - \mathcal{E}_{n'}$.
3. Vérifier la loi observée par Balmer donnant la longueur d'onde λ des raies de l'hydrogène :
$$\frac{1}{\lambda} = R_h\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right),$$
avec $n \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in \mathbb{N} > n$. R_H est la constante de Rydberg, dont on donnera l'expression en fonction de constantes fondamentales.
4. Déterminer la quantité de mouvement et le rayon de l'électron sur l'orbite correspondant à $n = 1$. Ce modèle semiclassique est-il satisfaisant pour la mécanique quantique ?

Exercice 3 : Désorbitation

On étudie l'effet, sur la trajectoire de la station spatiale internationale de masse m, des frottements de l'atmosphère ténue qui demeure à son altitude. On considère qu'initialement l'orbite est circulaire d'altitude h_{ISS}.

1. Justifier qualitativement que si les frottements sont suffisamment faibles, on pourra considérer que la station décrit une orbite circulaire de rayon R.
2. Montrer, en étudiant l'énergie mécanique, que le rayon R décroît lentement. Commenter le signe des variations de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_\mathrm{pot}$ et de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_\mathrm{c}$. En quoi ce dernier résultat peut-il être surprenant ?
3. La force de frottement $\overrightarrow{F}$ créée par l'atmosphère est d'intensité proportionnelle au carré de la vitesse v et s'exprime selon $\overrightarrow{F} = -\beta v \overrightarrow{v}$, avec β une constante positive. Déterminer, toujours sous l'hypothèse d'une trajectoire quasi circulaire, la variation d'énergie mécanique et la variation d'altitude à l'issue d'une révolution. Commenter la validité de l'hypothèse précédente.
4. (a) Pour éviter cette diminution, on peut utiliser les moteurs de la station. Calculer le travail qu'ils doivent fournir pendant une révolution pour maintenir l'altitude constante. Dans quel sens et dans quelle direction doit être dirigée la force qu'ils exercent ?
   (b) Le carburant est caractérisé par son pouvoir calorifique massique e, défini comme l'énergie libérée par la combustion d'une unité de masse. Calculer la masse de carburant brûlée par les moteurs par période de révolution, en supposant que la moitié de l'énergie thermique libérée peut être convertie en énergie mécanique.

Données : La constante β est de l'ordre de $1 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{kg \cdot m^{-1}}$, $m_{ISS} = 4{,}0 \cdot 10^5$ kg, $h_{ISS} = 4{,}0 \cdot 10^2$ km, $e = 2{,}7 \cdot 10^7\,\mathrm{J \cdot kg^{-1}}$.

Autres mouvements kepleriens

Exercice 4 : Modifications d'orbites

On considère un satellite M de masse m en orbite géostationnaire, dont on note R_0 le rayon.

1. Rappeler l'expression de son énergie mécanique, notée $\mathcal{E}_{m0}$, et du module de sa vitesse, noté v_0, ainsi que la période de l'orbite.

2. L'utilisation de ses moteurs permet de faire varier quasi instantanément la vitesse du satellite.

   (a) On souhaite rendre son orbite elliptique, avec un demi-grand axe égal à $3R_0/4$. Représenter l'allure de la nouvelle trajectoire.

   (b) Établir l'expression de l'énergie mécanique sur la nouvelle trajectoire et en déduire le travail fourni par les moteurs.

   (c) Déterminer également la période de la nouvelle trajectoire en utilisant la troisième loi de Kepler.

3. Avec un travail plus important des moteurs on annule quasiment la vitesse du satellite dans le référentiel géocentrique, alors qu'il était en orbite géostationnaire.

   (a) Décrire l'allure de la trajectoire.

   (b) Déterminer la nouvelle valeur de son énergie mécanique. En déduire le demi-grand axe de la nouvelle trajectoire

   (c) En déduire une estimation de la durée au bout de laquelle le satellite tombera sur la Terre, en utilisant de nouveau la troisième loi de Kepler.

Exercice 5 : Deuxième vitesse cosmique

On étudie quelques conséquences des valeurs de la deuxième vitesse cosmique, notée v_2, relative à l'attraction gravitationnelle de différents astres.

1. Rappeler l'expression de la deuxième vitesse cosmique pour un point matériel situé à la surface d'un astre de masse m et de rayon R.

2. Calculer sa valeur pour les attractions du Soleil, de la Terre, de la Lune et du satellite de Mars Phobos, de masse $m_p = 1{,}8 \cdot 10^{-9} m_T$ et de rayon $R_p = 1{,}7 \cdot 10^{-3} R_T$. On les considérera tous à symétrie sphérique.

   (a) Un spationaute peut-il échapper, en courant ou en sautant, à l'attraction de la Terre, de la Lune, de Phobos ?

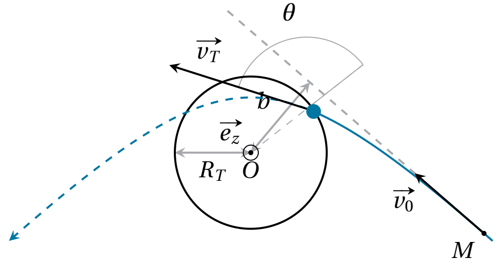
   (b) Justifier que les moteurs de retour (trajet de la Lune vers la Terre) des missions Apollo étaient plus petits que ceux du trajet aller.

   (c) Dans un gaz de molécules de masse molaire M (exprimée en $\mathrm{kg \cdot mol^{-1}}$) à la température T (exprimée en K), l'énergie cinétique d'agitation moyenne des particules correspond à une vitesse $v = \sqrt{3RT/M}$. Calculer la vitesse v_{N_2} pour le diazote sur la Terre ($T = 3 \cdot 10^2$ K), sur la Lune ($T_{max} = 4 \cdot 10^2$ K), sur Phobos ($T = 2 \cdot 10^2$ K). On a donné des ordres de grandeur des températures de surface. Que peut-on en conclure quant à la présence d'une atmosphère sur ces astres ?

   (d) On imagine que la masse de la Terre est concentrée dans une sphère de rayon $R_n < R_T$. Calculer la valeur de R_n (dit rayon de Schwarzschild) pour laquelle la vitesse de libération est celle de la lumière. La densité de l'astre ainsi constitué est alors celle d'un trou noir.

Exercice 6 : Collision

On étudie le mouvement d'un astéroïde M se rapprochant de la Terre de centre O, en provenant de l'infini. On note r la distance OM, qui tend initialement vers l'infini.
L'étude est effectuée dans le référentiel géocentrique.



1. Quelle est la nature du mouvement de M quand r tend vers l'infini ?

2. On note $\overrightarrow{v_0}$ sa vitesse à l'infini. Exprimer son moment cinétique par rapport à O, noté $\overrightarrow{\sigma_{/O}}(M)$ quand il est à l'infini en fonction des paramètres du schéma. Quelle est l'évolution de $\overrightarrow{\sigma_{/O}}(M)$? La distance b est nommée « paramètre d'impact ».

3. (a) Rappeler l'expression de l'énergie potentielle effective de l'astéroïde et tracer son allure en fonction de r. Représenter sur cette courbe la distance minimale r_{min} de O à laquelle passera M.

   (b) Quelle est l'énergie mécanique de l'astéroïde quand il est à l'infini ? En déduire, par conservation de l'énergie mécanique, l'expression de r_{min}.

   (c) En déduire à quelle condition l'astéroïde évitera la Terre, de rayon R_T. Exprimer en particulier la vitesse minimale notée $v_{min}(b)$ pour une valeur de b donnée. On l'exprimera en fonction de la deuxième vitesse cosmique (Section **??**) relative à l'attraction gravitationnelle de la Terre, notée v_2.

   (d) Calculer v_{min}/v_2 pour $b = 60R_T$, correspondant à l'orbite de la Lune.

4. On considère maintenant que $v_0 = v_{min}(b)/\sqrt{2}$.

   (a) Utiliser la conservation de l'énergie mécanique pour déterminer le module v_T de la vitesse de M quand il atteint la Terre. On l'exprimera de nouveau en fonction de v_2, b et R_T.

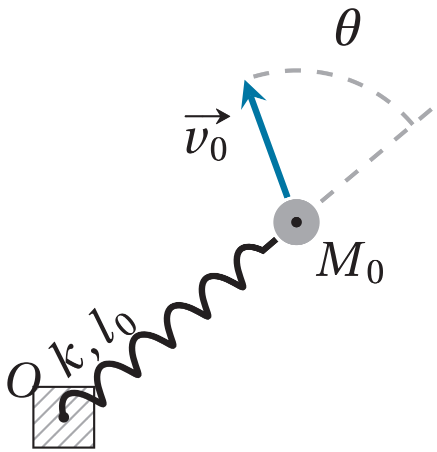
   (b) Utiliser la conservation du moment cinétique pour déterminer l'angle θ du vecteur vitesse $\vec{v}(M)$ avec la normale à la surface de la Terre au moment de l'impact.

   (c) Calculer ces grandeurs pour $b = 60R_T$.

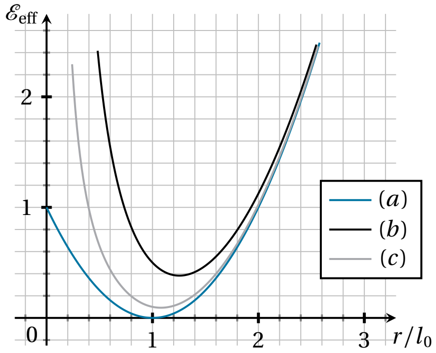
Force centrale conservative quelconque

Exercice 7 : Oscillateur harmonique spatial

On considère un point matériel M en mouvement sans frottement sur un plan horizontal. Il est lié par un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 à un point O fixe du référentiel. On note r la distance OM (Figure 1a).



(a)



(b)

1. Justifier que le mouvement est conservatif et que l'on peut l'étudier à l'aide d'une énergie potentielle effective fonction de r.

2. À l'instant initial, le point M se trouve à la distance $r_0 = 0{,}8 l_0$, animé d'une vitesse de module v_0. La Figure 1b représente les courbes correspondant à différentes valeurs de l'angle θ_0 entre le vecteur vitesse initial et le vecteur $\overrightarrow{OM}$ initial, en gardant r_0 et v_0 fixés.

   (a) Quelle est la courbe qui peut correspondre à $\theta_0 = 0$? Quelle est celle qui peut correspondre à $\theta_0 = \pi/2$?

   (b) Que peut-on dire de $\dot{r}$ quand les vecteurs $\vec{v}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont orthogonaux ? En déduire dans le cas $\theta_0 = \pi/2$ les valeurs minimale et maximale de r atteintes au cours du mouvement ainsi que la valeur de l'énergie mécanique.

   (c) Même question pour la courbe (c).

   (d) Sur cette dernière courbe, décrire le mouvement selon que $\theta_0 > \pi/2$ ou $\theta_0 < \pi/2$.

Exercice 8 : Période d'un mouvement lié à l'aide de $\mathcal{E}_{\text{eff}}$

On considère le mouvement d'un point matériel de position M soumis dans un référentiel galiléen à une force centrale de centre O conservative à laquelle est associée l'énergie potentielle $\mathcal{E}_{\text{pot}}(r)$, avec $r = OM$. On cherche dans cet exercice à obtenir une expression formelle de la période d'un mouvement lié.

1. (a) Rappeler la définition de $\mathcal{E}_{\text{eff}}(r)$. En quoi n'est-elle pas une véritable énergie potentielle ?

   (b) Comment définir les zones de l'espace accessibles pour un mouvement de moment cinétique en O, noté σ_c, donné ? Utiliser les intégrales premières du mouvement d'un point matériel de masse m soumis à une force centrale conservative pour exprimer $\dot{r}^2$ en fonction de r, de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{\text{m}}$ et de la masse m du point matériel.

2. (a) À l'instant $t = 0$ le P.M. se trouve à la distance r_0 du centre O. Établir une relation de la forme $t = G(r)$ en notant r la distance à un instant ultérieur t. Quelle condition doivent vérifier les variations de r pour que cette relation soit valable ?

   (b) À l'instant $t = 0$, la position du P.M. était également repérée par l'angle θ_0. Déterminer la relation entre l'angle θ à un instant ultérieur en fonction de la distance r de la forme : $\theta - \theta_0 = H(r)$.

   (c) Dans le cas où le mouvement est contraint entre deux cercles de rayon r_m et $r_M > r_m$, à quelle condition la trajectoire est-elle fermée ? Donner alors l'expression de la période du mouvement.

Correction de l'exercice 1

1. Le satellite, immobile dans le référentiel terrestre décrit dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_{\text{geo}}$ un cercle de rayon $R_T \cos\lambda$ en $T = 24\,\text{h}$. Sa vitesse y vaut donc $v_0 = \frac{2\pi R_T \cos\lambda}{T}$.

2. Son énergie cinétique initiale vaut, dans R_{geo}, $\mathcal{E}_{\text{cin}0} = \frac{2\pi^2 mR^2\cos^2\lambda}{T^2}$, soit une énergie mécanique $\mathcal{E}_{\text{m}0} = -\frac{\mathcal{G}M_T m}{R_T} + \mathcal{E}_{\text{cin}0} \simeq -mgR_T + \mathcal{E}_{\text{cin}0}$. Sur l'orbite circulaire, elle vaudra $\mathcal{E}_{\text{m}} = -\frac{1}{2}\frac{\mathcal{G}M_T m}{R} \simeq -\frac{mgR_T^2}{2R}$, on aura donc du lui communiquer l'énergie $\Delta\mathcal{E}_{\text{m}} = \mathcal{E}_{\text{m}} - \mathcal{E}_{\text{m}0} = mgR_T\left(1 - \frac{R_T}{2R}\right) - \mathcal{E}_{\text{cin}0}$, d'autant plus faible que $\mathcal{E}_{\text{cin}0}$ est élevée.

3. On a donc intérêt à placer les centres de lancement proches de l'équateur où $\cos\lambda$ est maximal pour maximimser $\mathcal{E}_{\text{cin}0}$.

Correction de l'exercice 2

1. On a $\mathcal{E}_{\text{m}} = -\frac{\alpha}{2a} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$.

2. Le moment cinétique vaut $\sigma_c = mav$, puisque $v = \sqrt{\alpha/(ma)}$, on obtient $\sigma_c = \sqrt{ma\alpha}$.

1. Toutes les grandeurs précédentes ne dépendent que du rayon a de la trajectoire. On a donc $a = \frac{n^2h^2}{4\pi^2 m\alpha} = n^2 a_0$, avec $a_0 = \frac{h^2}{4\pi^2 m\alpha} = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m e^2} \simeq 0{,}53\cdot 10^{-10}\,\text{m}$ le *rayon de Bohr* et $\mathcal{E}_{\text{m}0} = -\frac{\alpha}{2n^2 a_0} = -\frac{\mathcal{E}_0}{n^2}$, avec $\mathcal{E}_0 = \frac{\alpha}{2a_0} = 13{,}6\,\text{eV}$.

2. La conservation de l'énergie du système électron + photon impose que l'émission d'un photon d'énergie $h\nu$ s'accompagne d'une diminution égale de l'énergie de l'électron.

3. On a donc : $h\nu = h\frac{c}{\lambda} = \mathcal{E}_0\left(-\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n'^2}\right)$, soit $\frac{1}{\lambda} = R_H\left(1/n^2 - 1/p^2\right)$ avec $R_H = \frac{\mathcal{E}_0}{hc} = 1{,}09\cdot 10^{-7}\,\text{m}^{-1}$ et $p > n$ pour assurer la positivité.

4. Sur l'orbite 1, le moment cinétique vaut $\sigma_c = h$, soit $r_0 p_0 = h$ pour une trajectoire circulaire uniforme. On est clairement à la frontière où la mécanique quantique doit intervenir puisque $p_0 r_0$ n'est pas très supérieur à h. En particulier la notion de trajectoire d'un point matériel n'a plus de sens et l'électron doit être décrit par une fonction d'onde. Il est cependant remarquable que ce modèle donne les mêmes valeurs numériques que le traitement quantique de l'atome d'hydrogène, et spécialement pour l'énergie des différents niveaux.

Correction de l'exercice 3

1. Si la variation d'altitude sur une révolution est négligeable devant la distance en début de révolution, on peut considérer que la trajectoire a été pratiquement circulaire.

2. La station est soumise à la force de gravitation, centrale et conservative, et à la force de frottement, non conservative.

   La puissance de la force de frottement est négative, et le théorème de l'énergie mécanique donne $\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{m}}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}(\vec{F}) < 0$: l'énergie mécanique décroît donc. Comme elle est négative, sa valeur absolue croît. En supposant l'orbite quasi circulaire, on a toujours $\mathcal{E}_{\text{m}} = -\mathcal{G}m_T m_{ISS}/(2R)$: on en conclut que R décroît, tout comme $\mathcal{E}_{\text{pot}}$.

   De même, les relations des orbites circulaires donnent à chaque instant $\mathcal{E}_{\text{m}} = -\mathcal{E}_{\text{c}} = \frac{1}{2}\mathcal{E}_{\text{pot}}$: l'énergie cinétique est donc croissante bien que les frottements soient résistants.

3. La vitesse étant quasiment constante à $v_{ISS} = \sqrt{\mathcal{G}m_T/R_{ISS}} = \sqrt{-2\mathcal{E}_{\text{m}}/m_{ISS}}$ sur une révolution de périmètre $2\pi R_{ISS}$, le travail de la force de frottement est :
$$W(\vec{F}) = -\beta v_{ISS}^2 2\pi R_{ISS} = \frac{4\pi\beta R_{ISS}\mathcal{E}_{\text{m}}}{m_{ISS}} \leqslant 0.$$
   puisque la force est d'intensité constante et toujours colinéaire et de sens opposé à la vitesse.

   Le théorème de l'énergie mécanique s'écrit donc, au cours d'une révolution où l'énergie mécanique varie de $\Delta\mathcal{E}_{\text{m}}$:
$$\Delta\mathcal{E}_{\text{m}} = \frac{4\pi\beta R_{ISS}\mathcal{E}_{\text{m}}}{m_{ISS}} \text{soit: } \left|\frac{\Delta\mathcal{E}_{\text{m}}}{\mathcal{E}_{\text{m}}}\right| = -\frac{4\pi\beta R_{ISS}}{m_{ISS}} = 2{,}1\cdot 10^{-6}.$$
   On utilise les différentielles logarithmiques pour relier la variation élémentaire d'altiture Δh à la variation élémentaire d'énergeie $\Delta\mathcal{E}_{\text{m}}$. On a en effet :
$$\mathcal{E}_{\text{m}} = -\frac{\mathcal{G}m_T m_{ISS}}{2(R_T + h)} \text{soit: } \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{m}}}{\mathcal{E}_{\text{m}}} = -\frac{\mathrm{d}R_{ISS}}{R_{ISS}} = -\frac{\mathrm{d}h}{R_T + h}.$$
   Comme la variation relative de $\mathcal{E}_{\text{m}}$ considérée est très faible, on peut appliquer également la relation précédente aux variations finies mais très petites : on a donc $\Delta\mathcal{E}_{\text{m}}/\mathcal{E}_{\text{m}} = -\Delta h/(R_T + h)$. La diminution relative de rayon est donc également de $2{,}1\cdot 10^{-6}$, ce qui correspond à $\Delta h = -14\,\text{m}$, bien négligeable par rapport à l'altitude de l'orbite.

4. (a) On calcule $\Delta\mathcal{E}_{\text{m}} = -2{,}3\cdot 10^7\,\text{J}$. Les moteurs doivent apporter cette énergie en exerçant une force tangente à la trajectoire, dirigée vers l'avant.

   (b) La masse de carburant correspondante est $2|\Delta\mathcal{E}_{\text{m}}|/e = 2{,}0\,\text{kg}$.

Correction de l'exercice 4

1. On a :
$$\mathcal{E}_{\text{m}0} = -\frac{\mathcal{G}mm_T}{2R_0} \quad v_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}m_T}{R_0}} \quad T = 1\,\text{jour}.$$

2. (a) L'allure de la trajectoire est représentée sur la Figure 2.

   (b) L'énergie d'un état lié s'exprime en fonction du demi-grand axe a selon : $\mathcal{E}_{\text{m}} = -\mathcal{G}m_T m/(2a)$, soit $\mathcal{E}_{\text{m}} = -2\mathcal{G}m_T m/(3R_0)$ ici. Le théorème de l'énergie mécanique assure que la variation d'énergie mécanique entre l'orbite géostationnaire et l'orbite elliptique est égale au travail W des moteurs. On a donc :
$$W = -\frac{2\mathcal{G}m_T m}{3R_0} + \frac{\mathcal{G}m_T m}{2R_0} = -\frac{\mathcal{G}m_T m}{6R_0}.$$
   Il est bien évidemment négatif puisque l'on doit freiner le satellite pour qu'il « tombe » plus vite vers la Terre.

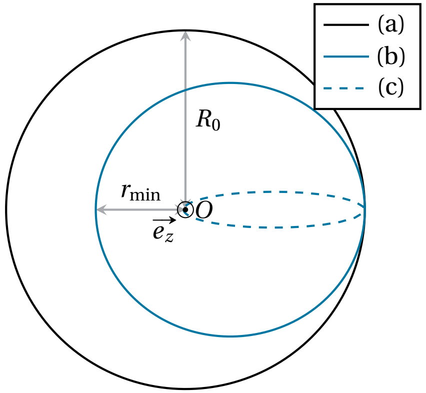


Fig. 2 : Trajectoires du satellite. Orbite géostationnaire (a), orbite de demi-grand axe $3R_0/4$ (b), orbite proche de celle correspondant à la chute sur la Terre (c).

(c) En notant T_0 et T les périodes respectives de l'orbite géostationnaire et de l'orbite elliptique, on a :

$$\frac{T_0^2}{R_0^3} = \frac{T^2}{(3R_0/4)^3} \text{soit:} T = T_0 \left(\frac{3}{4}\right)^{3/2} = 6{,}5 \cdot 10^{-1}\,\text{jour} = 16\,\text{heure}.$$

3. (a) L'ellipse se réduit alors quasiment à un segment joignant le foyer de l'ellipse (le centre de la Terre) à l'apogée, où le satellite se trouvait initialement.

   (b) L'énergie cinétique initiale étant négligeable, l'énergie mécanique a pour expression, à l'instant initial :

$$\mathcal{E}_{\text{m}} = \mathcal{E}_{\text{pot}} = -\frac{\mathcal{G}m_T m}{R_0}.$$

   En notant a le demi-grand axe de cette ellipse, on a par ailleurs $\mathcal{E}_{\text{m}} = -\mathcal{G}m_T m/(2a)$, soit $a = R_0/2$.

   (c) On calcule alors comme précédemment :

$$\frac{T_0^2}{R_0^3} = \frac{T^2}{(R_0/2)^3} \text{soit: } T = T_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{3/2} = 3{,}5 \cdot 10^{-1}\,\text{jour} = 8{,}5\,\text{heure}.$$

   La chute durera donc la moitié de cette période.

Correction de l'exercice 5

1. Comme vu en cours, on a $v_2 = \sqrt{2\mathcal{G}m/R}$.

2. Les valeurs données en cours permettent de calculer les vitesses rassemblées dans le tableau 1.

astre	Soleil	Terre	Lune	Phobos
$v_2 (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	$6{,}2 \cdot 10^5$	$1{,}1 \cdot 10^4$	$2{,}3 \cdot 10^3$	11
$v_{\text{N}_2} (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$		$5{,}4 \cdot 10^2$	$5{,}9 \cdot 10^2$	$4{,}2 \cdot 10^2$

Tab. 1 : Vitesses de libération v_2 et vitesses d'agitation thermique v_{N_2} pour le diazote.

(a) Un homme n'est pas capable de courir à une vitesse de l'ordre du $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$: il ne pourra donc pas échapper à l'attraction de la Terre ou de la Lune. En revanche les $11\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ sont accessibles à un coureur de 100 m qui pourra donc échapper à l'attraction de Phobos.

(b) La vitesse de libération est notablement plus faible sur la Lune que sur Terre : il faudra donc consommer beaucoup moins de carburant pour partir de la Lune que pour partir de la Terre (d'autant plus que les frottements avec l'atmosphère très ténue sur la Lune sont quasi inexistants).

(c) Les vitesses d'agitation sont données dans le tableau 1. Celle sur la Terre est très inférieure à la vitesse de libération : la Terre conserve donc une atmosphère. En revanche les deux vitesses sont comparables sur la Lune : les gaz à sa surface s'en échappent très facilement et la pression à sa surface est très faible. Finalement, Phobos n'est pas capable de retenir une atmosphère.

(d) La taille correspondante est extrêmement petite :

$$R_n = R_T \left(\frac{v_2}{c}\right)^2 = 8{,}6\,\text{mm}.$$

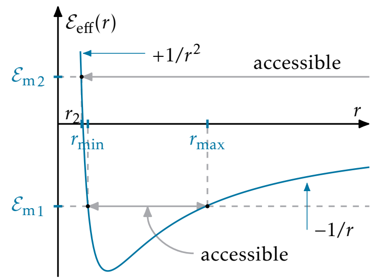
Correction de l'exercice 6

1. La force de gravitation tend vers $\vec{0}$, le mouvement de l'astéroïde est donc rectiligne uniforme de vecteur vitesse noté $\overrightarrow{v_0}$ constant.

2. Comme vu en cours, on a $\overrightarrow{\sigma_{/O}}(M) = mbv_0\overrightarrow{e_z}$. Il sera conservé puisque la force est centrale. On pose $\|\overrightarrow{\sigma_{/O}}(M)\| = \sigma_c$.

3. (a) On a $\mathcal{E}_{\text{eff}} = \frac{\sigma_c}{2mr^2} - \frac{\mathcal{G}m_T m}{r}$, dont la courbe est donnée sur la figure ci-contre, sur laquelle r_1 représente la distance minimale d'approche.

   (b) Son énergie potentielle étant nulle à l'infini, on a $\mathcal{E}_{\text{m}} = mv_0^2/2$. Au point de distance minimale, on a par définition $\dot{r} = 0$ et la conservation de $\mathcal{E}_{\text{m}}$ entre l'infini et le point de distance minimale s'écrit :



$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{\sigma_c^2}{2mr^2} - \frac{\mathcal{G}m_T m}{r_{\text{min}}} = \frac{mv_0^2 b^2}{2r^2} - \frac{\mathcal{G}m_T m}{r_{\text{min}}}$$

$$\text{soit: } r^2 + 2\frac{\mathcal{G}m_T}{v_0^2} r - b^2 = 0.$$

   En posant $b_0 = \mathcal{G}m/v_0^2$, l'unique racine positive de ce trinôme est :

$$r_{\text{min}} = \sqrt{b^2 + b_0^2} - b_0.$$

(c) La collision sera évitée si $r_{\text{min}} > R_T$. On a alors :

$$b_0 = \frac{b^2 - R_T^2}{2R_T} \text{soit: } v_{\text{min}}(b) = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}m_T}{R_T\left(\frac{b^2}{R_T^2} - 1\right)}}.$$

Avec $v_2 = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}m_T}{R_T}}$, on a finalement :

$$v_{\text{min}}(b) = \frac{v_2}{\sqrt{\left(\frac{b}{R_T}\right)^2 - 1}}.$$

(d) On calcule $v_{\text{min}}/v_2 = 1{,}7\%$.

4. (a) L'énergie mécanique est maintenant :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{4}mv_{\text{min}}^2 = \frac{mv_2^2}{4\left(\frac{b^2}{R_T^2} - 1\right)}.$$

On n'utilise pas cette fois-ci l'énergie potentielle effective puisque l'on ne cherche pas à distinguer le mouvement radial du mouvement angulaire. La conservation de l'énergie entre l'infini et l'impact s'écrit désormais :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_T^2 - \frac{\mathcal{G}m_T m}{R_T}$$

$$\frac{mv_2^2}{4\left(\frac{b^2}{R_T^2} - 1\right)} = \frac{1}{2}mv_T^2 - \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$\text{soit: } v_T = v_2\sqrt{\frac{b^2/R_T^2 - 1/2}{b^2/R_T^2 - 1}}.j$$

(b) Le moment cinétique au moment de l'impact s'exprime selon $\overrightarrow{\sigma_{/O}}(M) = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$. Sa norme est $mR_T v_T |\sin\theta|$. On a donc :

$$|\sin\theta| = \frac{bv_{\text{min}}(b)/\sqrt{2}}{R_T v_T} = \frac{b}{R_T\sqrt{2\frac{b^2}{R_T^2} - 1}}.$$

(c) L'angle θ étant supérieur à $\pi/2$ (figure précédente), on a $\theta = 180° - 45°$.

Correction de l'exercice 7

1. Sur un plan horizontal et sans frottement, le poids et la réaction du support se composent à chaque instant. La résultante des forces est la tension du ressort, centrale et conservative. On utilisera :

$$\mathcal{E}_{\text{eff}} = \frac{\sigma_c^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}k(r - l_0)^2,$$

avec σ_c le module du moment cinétique par rapport à O, constant.

2. (a) Le module σ_c a pour expression $\sigma_c = \|\overrightarrow{OM_0} \wedge \overrightarrow{v_0}\| = r_0 v_0 |\sin\theta_0|$. Il sera en particulier nul pour $\theta_0 = 0$ et la courbe de $\mathcal{E}_{\text{eff}}$ sera alors une parabole : il s'agit de la courbe (a).
La courbe correspondant à $\theta_0 = \pi/2$ est celle pour laquelle le terme $\sigma_c^2/(2mr^2)$ est maximal à r fixé et modifie donc le plus la parabole. Il peut donc s'agir de la courbe (b).

(b) En coordonnées polaires, on a $\vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta_0}\overrightarrow{e_\theta}$. À un instant où $\vec{v}$ est orthogonal à $\overrightarrow{e_r}$, $\dot{r}$ est nécessairement nul : on a $\mathcal{E}_{\text{m}} = \mathcal{E}_{\text{eff}}$ et la distance r est alors extrêmale.
On est dans cette situation pour la courbe correspondant à $\theta_0 = \pi/2$. On détermine ainsi l'origine du mouvement : il s'agit du point M_0 de la courbe 3, intersection de la courbe b avec la droite $x = 0{,}8l_0$. L'énergie mécanique est l'énergie potentielle effective en M_0, on lit $\mathcal{E}_{\text{m}} = 1{,}8$.
L'autre extrêmum est l'autre intersection de $\mathcal{E}_{\text{eff}}(r)$ la droite horizontale d'ordonnée 1,8, le point M_0'.

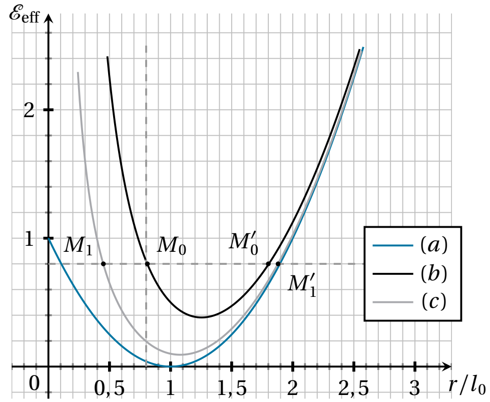


FIG. 3 : Détermination graphique des extremums des trajectoires.

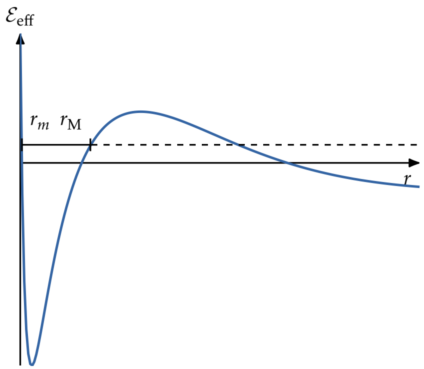
(c) La valeur de l'énergie mécanique est la même puisqu'elle ne dépend que des modules r_0 et v_0, pas de leurs directions. On détermine donc les extrêmums de cette trajectoire par intersection de la droite $y = 1{,}8$ avec la courbe (c).

(d) Si l'angle θ_0 est aigu, la composante radiale du vecteur $\overrightarrow{v_0}$ est positive : la distance r est initialement croissante et on se déplace de $r_0 = 1{,}8l_0$, vers M_1'. Si l'angle θ_0 est obtus, la distance r commence par décroître et on part vers M_1.

Correction de l'exercice 8

1. (a) Comme vu en cours, on a, en désignant par σ_c le moment cinétique, stationnaire pour un mouvement à force centrale : $\mathcal{E}_{\text{eff}}(r) = \mathcal{E}_{\text{pot}}(r) + \frac{\sigma_c^2}{2mr^2}$.

   Cette énergie potentielle ne décrit que la variation de l'énergie cinétique orthoradiale et n'est pas l'opposé d'un travail. De plus, elle dépend des conditions initiales. Ce n'est donc pas une véritable énergie potentielle.



   (b) La conservation de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{\text{m}} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{\text{eff}}(r)$ donne immédiatement : $\dot{r}^2 = \frac{2(\mathcal{E}_{\text{m}} - \mathcal{E}_{\text{eff}}(r))}{m}$, dans les zones accessibles, où $\mathcal{E}_{\text{eff}}(r) \leqslant \mathcal{E}_{\text{m}}$.

2. (a) Il faut considérer une partie du mouvement sur laquelle r varie monotonement. Le signe de $\dot{r}$ y est constant et on peut écrire :

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{\frac{2\left(\mathcal{E}_{\text{m}} - \mathcal{E}_{\text{eff}}(r)\right)}{m}} \quad \to \quad t - t_0 = \pm\int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2(\mathcal{E}_{\text{m}} - \mathcal{E}_{\text{eff}}(r))}{m}}}.$$

   (b) La conservation du moment cinétique permet de calculer $\dot{\theta} = \frac{\sigma_c}{mr^2}$, soit : $\theta - \theta_0 = \pm\int_{r_0}^{r} \frac{\sigma_c dr}{r^2\sqrt{2m(\mathcal{E}_{\text{m}} - \mathcal{E}_{\text{eff}}(r))}}$

   (c) La variation angulaire au cours d'une $\frac{1}{2}$-oscillation» de r_m à r_M est : $\Delta\theta = \int_{r_m}^{r_M} \frac{\sigma_c \mathrm{d}r}{r^2\sqrt{2m(\mathcal{E}_{\text{m}} - \mathcal{E}_{\text{eff}}(r))}}$. Pour qu'au bout de m $\frac{1}{2}$ oscillations, on ait fait p tours, on doit avoir $2m\Delta\theta = 2p\pi$. On aura alors : $T = m\int_{r_m}^{r_M} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2(\mathcal{E}_{\text{m}} - \mathcal{E}_{\text{eff}}(r))}{m}}}$.