Les vecteurs sont désignés selon : $\overrightarrow{X}$, X désignant la norme de $\overrightarrow{X}$. Dans tous les exercices, le référentiel galiléen $\mathcal{R}_T$, dans lequel règne le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$ sera, sauf mention explicite, considéré galiléen pour la durée des phénomènes décrits.
On utilisera préférentiellement les « bras de levier » pour les calculs de moments de forces

Exercices d'application : Balançoire,guide circulaire, trois méthodes, vélo, basculements

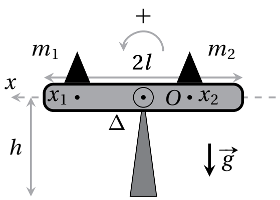
Culture en sciences physiques : Balançoire, excitation du pendule, basculements, patineur, engrenages

Corrigés en TD : Balançoire, freinage, basculements, excitation du pendule, patineur, engrenages

Point matériel

Exercice 1 : Balançoire à bascule

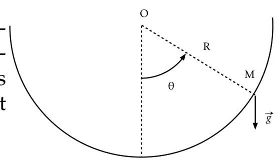
On considère une balançoire à bascule formée d'une planche homogène de longueur $2l$ fixée pouvant tourner autour de l'axe fixe horizontal Δ placé à une distance h du sol. On néglige tout frottement au niveau de l'axe.



1. Appliquer la loi du moment cinétique à la planche en rotation autour de l'axe fixe Δ. Où l'axe doit-il être placé pour que la planche puisse demeurer horizontale ? La masse de la planche importe-t-elle ? Peut-elle demeurer immobile en formant un angle θ non nul avec l'horizontale ?
2. Un enfant de masse m_1, que l'on considérera comme solidaire de la planche, s'assoit sur la planche, son centre d'inertie étant à la distance x_1 de l'axe Δ. Où doit se placer un autre enfant de masse m_2 pour que la planche puisse demeurer horizontale.
3. Un enfant de masse m_1 se place à l'extrémité de la planche. Un ressort vertical de longueur à vide l_0 et de raideur k, dont une extrémité est fixée au sol à l'aplomb de l'autre extrémité de la planche maintient l'ensemble immobile. Quelle doit être la raideur du ressort ?

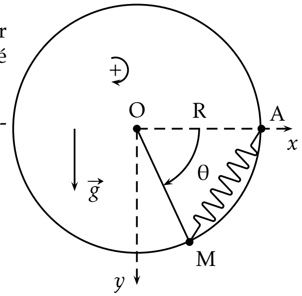
Exercice 2 : Guide circulaire

Un point matériel repéré par la position M se déplace dans un guide hémicylindrique horizontal de rayon R dans le champ de pesanteur terrestre. Déterminer l'équation d'évolution de l'angle θ des coordonnées cylindriques et la période de ses petites oscillations. On utilisera le théorème du moment cinétique.



Exercice 3 : Trois méthodes

Un point matériel de masse m, repéré par le point M est assujetti à glisser sans frottement sur un cerceau vertical de rayon R et de centre O. Il est lié au point A par un ressort de raideur k et de longueur au repos nulle.



1. Établir l'équation du mouvement du mobile en utilisant successivement les trois méthodes suivantes :
   (a) le théorème du moment cinétique,
   (b) la loi de la quantité de mouvement,
   (c) le théorème de l'énergie cinétique.
2. Discuter l'existence de positions d'équilibre, leur stabilité, et dans l'affirmative, la période des petites oscillations au voisinage de l'équilibre.

Exercice 4 : Excitation d'un pendule simple

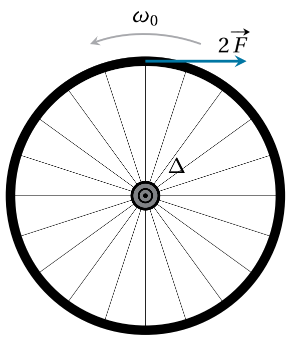
On étudie la possibilité d'augmenter l'énergie, et donc l'amplitude des oscillations, en raccourcissant et rallongeant périodiquement la longueur l d'un pendule en modifiant périodiquement sa longueur sur la corde. On néglige tout frottement et on assimile le système à un pendule simple constitué d'un point matériel M de masse m au bout d'une corde de longueur l.

1. On raccourcit la corde d'une longueur Δl quand le pendule passe par la verticale à l'instant $t = 0$, avec un vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$. On considère que cette opération s'effectue instantanément.
   (a) Donner l'expression du moment cinétique $\sigma_{/\Delta}(M)$ par rapport à l'axe Δ juste avant le raccourcissement.
   (b) Quelle est la force à l'origine de ce raccourcissement ? Quelle propriété possède-t-elle ? En déduire le moment cinétique puis le vecteur vitesse juste après le raccourcissement.
2. (a) En déduire le travail à fournir pour réaliser la traction dans ces conditions.
   (b) Calculer ce travail pour une traction de $\Delta l = 3{,}0\,\mathrm{m}$ sur une longueur initiale de $l = 21\,\mathrm{m}$, pour une vitesse $v = 68\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ et pour une masse de $50\,\mathrm{kg}$. Ce travail vous paraît-il réalisable par un groupe de huit hommes tirant de concert ?
   (c) Le processus doit être périodique si l'on souhaite continuer à augmenter l'énergie du dispositif. À quel instant sera-t-il préférable de rallonger la corde ?

Solide

Exercice 5 : Freinage à vélo

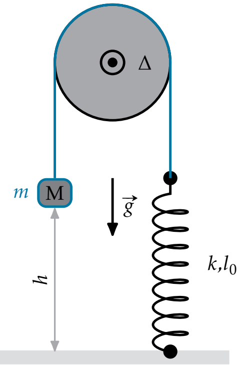
On considère une roue de bicyclette à rayons de rayon R et de masse m dont on étudie l'arrêt de la rotation par des freins à étrier. Chacun des deux freins exerce sur la jante une force d'intensité F que l'on considérera constante tant que la roue tourne. Le vélo étant retourné sur sa selle, la roue est en rotation autour de son moyeu fixe, noté Δ. On néglige les frottements sur l'axe.



1. Quel est le modèle le plus approprié pour décrire le moment d'inertie de la roue : celui du cylindre plein ou celui du cylindre vide ? On prendra ce modèle par la suite.
2. Déterminer le moment résultant des forces de frottement par rapport à l'axe Δ.
3. En déduire l'équation différentielle d'évolution de l'angle θ autour de l'axe Δ.
4. En déduire les expressions de $\dot{\theta}(t)$ et $\theta(t)$ si à $t = 0$ on a $\theta = 0$ et $\dot{\theta} = \omega_0$.
5. Déterminer l'intensité F de la force nécessaire pour arrêter la roue en un seul tour pour les paramètres suivants : $R = 33\,\text{cm}$, $m = 1{,}6\,\text{kg}$ et $\omega_0 = 17\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Cette force serait-elle supérieure ou inférieure pour une roue dite « lenticulaire » de même masse. Il s'agit de roues dans lesquelles les roues sont remplacées par des cônes uniformes reliant le moyeu à la jante.

Exercice 6 : Poulie massive

On considère le dispositif ci-contre dans lequel la poulie a un rayon R et un moment d'inertie J_Δ par rapport à son axe de rotation Δ. On néglige la masse du fil, qui entraîne la poulie en rotation sans glisser. Le ressort est caractérisé par sa constante de raideur k et sa longueur à vide l_0. L'objet M de masse m est abandonné sans vitesse initiale quand elle se trouve à la hauteur h du sol, l'élongation du ressort étant alors nulle. On néglige tout frottement.

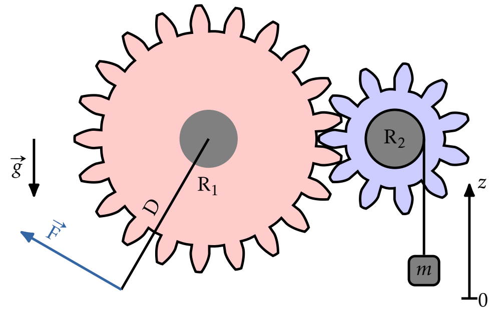


1. La tension est-elle uniforme dans le fil ? On pourra pour l'étudier applique la loi du moment cinétique à un système constitué de la poulie et du fil.
2. À quelle condition portant entre autres sur la masse m, l'objet atteindra-t-il le sol ?
3. Dans le cas contraire, déterminer l'expression de l'amplitude et la fréquence de ses oscillations.

Exercice 7 : Transmission de puissance

On considère le dispositif ci-dessous formé de deux engrenages d'axes parallèles. Leurs moments d'inertie (par rapport à leurs axes de symétrie de révolution parallèles) et nombres de dents sont respectivement notés J_1, J_2, N_1 et N_2.

On exerce une force $\vec{F}$ (orthoradiale sur un levier de longueur D) sur le premier engrenage pour hisser une masse m attachée à un fil sans masse qui s'enroule sur l'axe (de rayon R_2) du deuxième engrenage.
À l'état initial la masse est immobile en $z = 0$.



1. (a) Établir une relation entre les vitesses angulaires des deux engrenages faisant intervenir leurs nombres de dents.
   (b) En déduire l'équation différentielle vérifiée par l'altitude z de la masse m.
2. On étudie dans cette question un régime permanent dans lequel la masse monte à la vitesse constante v_0.
   (a) Déterminer l'intensité de la force (notée F_0) si la masse monte à la vitesse constante v.
   (b) Comparer la puissance fournie par l'opérateur à la puissance du poids de la masse m.
   (c) On a $D = 50\,\text{cm}$, $R_1 = R_2 = 10\,\text{cm}$ et $m = 150\,\text{kg}$. L'opérateur est capable de développer une force de 300 N. Comment choisir les nombres de dents pour qu'il puisse hisser une masse de 300 kg ? Quelle seront alors la vitesse d'ascension de la masse et la puissance qu'il développe s'il fait tourner le premier engrenage avec une fréquence de 1 Hz ?

Exercice 8 : Basculements d'un parallélépipède

On étudie les basculements d'un parallélépipède autour d'une arête.

1. On place un parallélépipède rectangle, noté $\mathcal{S}$, sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale, perpendiculairement à la ligne de plus grande pente du plan (Figure 1). On admet que la force de frottement du support l'empêche de glisser et on étudie son éventuel basculement autour d'une de ses arêtes, Δ_1 ou Δ_2, alors qu'il est initialement immobile.

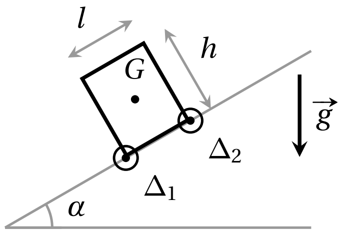


Fig. 1

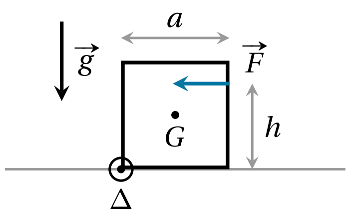


Fig. 2

   (a) Déterminer les signes du moment du poids par rapport à chacun des axes.

   (b) On considère que le contact avec le support est ponctuel quand le cube est en rotation autour d'un axe Δ. Que peut-on dire du moment, par rapport à l'axe Δ, de la force de contact exercée par le support sur le cube.

   (c) On fait l'hypothèse que l'objet a tout juste commencé à basculer autour de l'arête Δ_2. Montrer, en y appliquant la loi du moment cinétique, que l'objet $\mathcal{S}$ recolle au support.

   (d) On fait l'hypothèse que l'objet a tout juste commencé à basculer autour de l'arête Δ_1. Déterminer, en y appliquant la loi du moment cinétique, à quelle condition l'objet $\mathcal{S}$ continue à basculer.

2. Le parallélépipède est maintenant un cube d'arête a, que l'on souhaite faire avancer sur un plan horizontal et dont on note m la masse (Figure 2).

   (a) On fait basculer le cube autour de son arête Δ en poussant avec une force $\vec{F}$. On admet qu'il ne glisse pas. Appliquer la loi du moment cinétique par rapport à l'axe Δ et en déduire la force minimale à appliquer pour provoquer le basculement en fonction de la hauteur h à laquelle la force $\vec{F}$ est exercée. Où faut-il pousser pour exercer un effort minimal ?

   (b) Déterminer le travail à fournir pour faire tourner $\mathcal{S}$ d'un angle $\theta \leqslant \pi/4$. En déduire le travail minimal à fournir pour que le cube bascule.

   (c) On peut aussi faire glisser le cube. La force de frottement $\vec{T}$ exercée par le support est constante et a pour intensité μmg. Déterminer la force minimale à exercer pour faire glisser le cube.

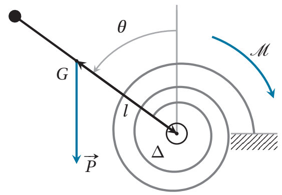
   (d) Exprimer le travail minimal pour faire avancer le cube d'une longueur l.

   (e) Conclure : dans quels cas est-il plus avantageux de faire « rouler » le cube ? Qu'en est-il pour $\mu =$ 0,3 (frottement bois sur bois).

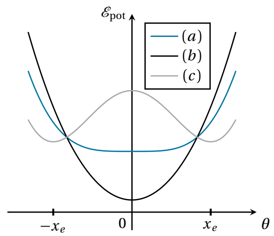
Exercice 9 : Gravimètre

On étudie un gravimètre formé d'un ressort à spirale auquel est fixée rigidement une tige (Figure 3a). Ce ressort exerce sur la tige un moment de rappel harmonique $\mathcal{M}_{/\Delta} = -K\theta$ par rapport à l'axe Δ du ressort quand la tige a tourné d'un angle θ. On désigne par l la distance du centre d'inertie de la tige à l'axe Δ horizontal fixe et par J le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe Δ.

On néglige les frottements sur l'axe.



(a) Gravimètre de Holweck et Lejay



(b) Allure de $\mathcal{E}_{\text{pot}}(\theta)$ pour différentes valeurs du rapport $\alpha = 2mgl/K$

1. Justifier que le système est conservatif et donner l'expression d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_{\text{pot}}$ associée.

2. La Figure 3b donne l'allure de la courbe $\mathcal{E}_{\text{pot}}(\theta)$ pour différentes valeurs du rapport $\alpha = 2mgl/K$. Classer ces courbes par valeurs croissantes de α. Existe-t-il des positions d'équilibre ? Discuter leur stabilité.

3. (a) Effectuer un développement limité de $\mathcal{E}_{\text{pot}}$ au terme non nul d'ordre le plus bas en $\theta \ll 1$. On rappelle le développement limité de cos à l'ordre 4 en $\theta \ll 1$:

$$\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24}.$$

   (b) Retrouver les conclusions de la question 2.

   (c) Établir l'expression de la pulsation ω des petites oscillations dans le cas où l'équilibre est stable. On la mettra sous la forme :

$$\omega = \sqrt{\beta - \frac{mgl}{J}},$$

   avec β une constante positive. Rappeler également l'expression de la pulsation d'un pendule pesant dont le centre d'inertie est à la distance l de l'axe.

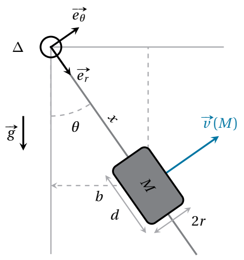
4. Calculer $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}g}$ puis $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}g}/\omega$ pour le gravimètre étudié et pour un pendule pesant. En déduire que ce dispositif peut être beaucoup plus sensible qu'un pendule simple pour mesurer l'accélération de la pesanteur g.

5. Ce dispositif peut également modéliser un manège de jardin d'enfants où l'enfant se balance sur un siège fixé au bout d'un ressort à boudin. Qu'observe-t-on si un adulte essaie de se balancer ?

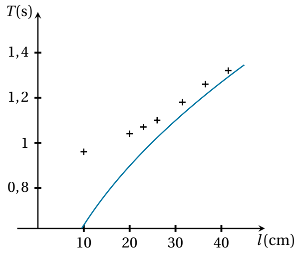
Exercice 10 : Moments d'inertie d'un pendule pesant

On considère un pendule pesant formé d'une tige d'aluminium de longueur l et de masse m_1 et d'un cylindre en laiton de masse m_2 (Figure 4a).

La Figure 4b rassemble les mesures de la période de ses petites oscillations en fonction de la distance x entre le centre d'inertie du cylindre et l'axe Δ de rotation.



(a) Pendule pesant.



(b) Variation de la période des petites oscillations en fonction de la distance x. La courbe représente la période d'un pendule simple de longueur x.

1. Rappeler l'expression de la période d'un pendule simple constitué d'un point matériel de masse m placé à la distance x de l'axe Δ sur une tige sans masse. Cette courbe est représentée en trait plein sur la courbe 4b. Rappeler également la période d'un pendule pesant de moment d'inertie J_Δ par rapport à l'axe Δ dont le centre d'inertie est à la distance x de l'axe.

2. Proposer une interprétation des différences entre la courbe expérimentale et les mesures en considérant les moments d'inertie du cylindre et de la tige.

3. On peut montrer que le moment d'inertie du cylindre a pour expression :

$$J_x = m_2 x^2 + m_2 \left(\frac{r^2}{4} + \frac{d^2}{12}\right).$$

   Vérifier la vraisemblance de cette expression en considérant des valeurs extrêmes de x.

4. Proposer une expression pour le moment d'inertie de l'ensemble du dispositif et en déduire la période des petites oscillations en fonction de x. Tracer l'allure de la courbe correspondante.

Exercice 11 : Résolution de problème : patineur artistique

On étudie une phénomène spectaculaire en patinage artistique, l'augmentation de la vitesse de rotation d'une pirouette.

Un patineur est en rotation, debout bras tendus sur la pointe de ses patins. On constate qu'il peut augmenter sa vitesse de rotation en rabattant ses bras le long de son corps.

1. Expliquer ce phénomène en considérant la variation de son moment d'inertie selon que ses bras sont ou non tendus.

2. Estimer le gain en vitesse de rotation.

3. Estimer un ordre de grandeur de la vitesse de rotation à l'issue du mouvement.

4. Estimer un ordre de grandeur du travail mécanique qu'il a dû fournir.