Exercices d'application : Questions courtes, Fresnel, onde unidimensionnelle, cuve à ondes battements, lecture sur une cuve à ondes,

Culture en sciences physiques : Questions courtes, Fresnel, cuve à onde, battements, onde stationnaire et battements, ondes croisées, courbes de Lissajous

Corrigés en TD : Questions courtes, Fresnel, cuve à ondes, battements, lecture sur une cuve à ondes, onde stationnaire et battements

Exercice 1 : Questions courtes

1. À quelle distance se trouve un orage si on entend le tonnerre 5 s après avoir vu l'éclair ?
2. Que se passe-t-il si on inverse les fils de l'un des hauts-parleurs d'une paire.
3. Est-il important de se placer en face de hauts-parleurs musicaux pour bien entendre. On pourra distinguer selon la fréquence du son.
4. Comparer la vitesse des ondes de corde vibrante sur une guitare le si à 240 Hz par exemple et celle du son.

Exercice 2 : Représentation de Fresnel

Déterminer graphiquement l'amplitude et la phase des sinusoïdes suivantes :

1. $\cos(\omega t)+\cos(\omega t+\pi)$,
2. $\cos(\omega t)+2\sin(\omega t)$,
3. $\cos(\omega t)+3\cos(\omega t+\pi/4)$.

Exercice 3 : Onde unidimensionnelle

Deux sources ponctuelles distantes d'une distance d émettent chacune une onde progressive sinusoïdale unidimensionnelle de même fréquence f et de même amplitude se propageant à la même vitesse c, dans le même sens. Leur déphasage à l'origine est pris nul.

1. Placer, pour chaque onde séparément, les points où la perturbation est maximale :
   - à $t=0$,
   - à $t=1/(2f)$,
   - à $t=1/(4f)$.
2. En déduire l'allure de la somme des deux ondes pour $d=\frac{c}{f};\frac{c}{2f};\frac{c}{4f}$.
3. Retrouver ce résultat en écrivant le champ des perturbations.

Exercice 4 : Cuve à ondes

On observe sur une cuve à ondes une distance entre crêtes de 5 mm et la figure est immobile pour une fréquence du stroboscope de 80 Hz. Que peut-on en déduire concernant la vitesse des ondes se propageant à la surface ?

Exercice 5 : Battements

Deux cordes identiques 1 et 2 de longueur 70 cm vibrent avec une fréquence fondamentale de 250 Hz.

1. On raccourcit la longueur vibrante de l'une des cordes de 1 cm. Quelle est la fréquence du battement qu'on entend quand on fait sonner les deux cordes en même temps ?
2. La vitesse des ondes transverses se propageant le long d'une corde vibrante varie comme la racine de la tension.
   (a) Exprimer le rapport de leurs fréquences fondamentales en fonction du rapport de leurs tensions quand celles-ci sont différentes mais qu'elles ont même longueur.
   (b) Quelle doit être la variation relative de tension sur l'une des cordes pour qu'on entende des battements avec une fréquence de 2 Hz. On utilisera le fait que les variations relatives de fréquence et de tensions sont petites devant un.

Exercice 6 : Lecture sur une cuve à ondes

Les images de la figure 1 représentent l'état de la surface d'une cuve à ondes à différents instants. Une zone claire représente une crête et une zone sombre un creux. La surface est excitée par deux sources, distances de 8 cm.

1. On a mesuré une vitesse de propagation de $0{,}4\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Déterminer la fréquence à laquelle vibrent les sources.
2. Les trois images de la figure 1 ont été prises à des intervalles de temps réguliers. On note Δt la durée entre deux images. Déterminer la plus petite valeur de Δt possible et classer les trois images par ordre chronologique.
3. (a) Comment varie l'amplitude de l'onde au point A avec le temps ? Justifier ce comportement en calculant le déphasage en ce point entre les ondes issues des deux sources.
   (b) Même question pour le point B.

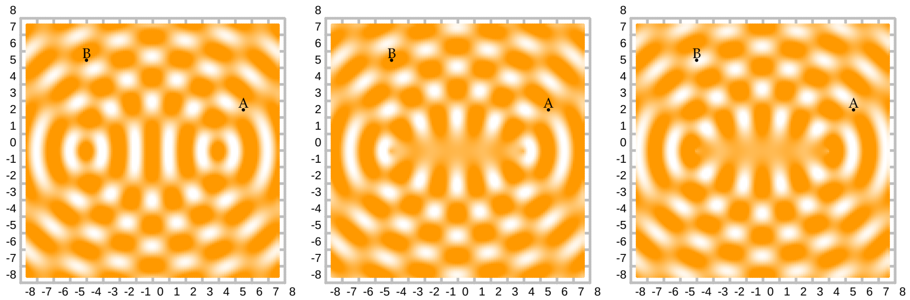
Exercice 7 : Onde stationnaire

On considère deux ondes unidimensionnelles contrapropageantes. L'impulsion sur chacune est formée d'une seule période d'une oscillation rectangulaire symétrique, de même fréquence f.

Tracer l'allure de l'onde somme :

- quand les deux fronts se rencontrent (instant qu'on définira comme $t=0$),
- pour $t=T/4$,
- pour $t=3T/8$,
- pour $t=T/2$,
- pour $t=3T/4$,
- pour $t>2T$

On distinguera deux cas selon la phase relative des deux ondes. Interpréter en termes d'ondes stationnaire.



(a) (b) (c)

Figure 1 – Simulations d'une cuve à ondes. Les échelles sont en cm.

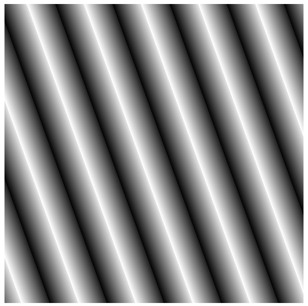
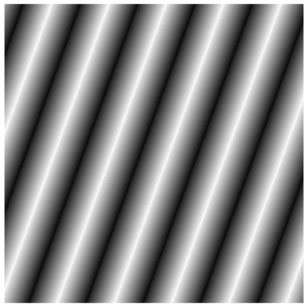
Exercice 8 : Onde stationnaire et battements

On considère deux ondes unidimensionnelles contrapropageantes de même amplitude et de fréquences proches, respectivement f_0 et $f_0+\Delta f$, avec $\Delta f \ll f_0$. On note c leur vitesse commune et on considère pour simplifier que la phase de chacune est nulle à $t=0$ à l'origine $x=0$.

1. Déterminer le champ des perturbations.
2. Décrire précisément ce qu'on observe quand Δf est non nul et positif.

Exercice 9 : Ondes unidimensionnelles croisées

On considère deux ondes planes unidimensionnelles sinusoïdales de même fréquence, de même amplitude et contrapropageantes dont les directions de propagation font un angle α assez faible entre elles : la direction de l'une est donnée par $\cos(\alpha/2)\vec{e}_x+\sin(\alpha/2)\vec{e}_y$ pour l'une et $-\cos(\alpha/2)\vec{e}_x+\sin(\alpha/2)\vec{e}_y$ pour l'autre (voir ci-dessous) :

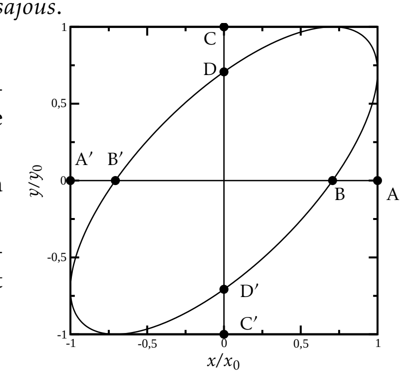
1. Représenter les fronts où la perturbation est respectivement maximale, minimale et nulle pour chaque onde aux instants $t=0$ et $t=\frac{\pi}{2\omega}$. En déduire l'allure de la figure d'interférences.
2. Retrouver ce résultat en déterminant l'expression du champ des perturbations.

Exercice 10 : Courbes de Lissajous

Un point est animé d'un mouvement plan. Ses coordonnées x et y sont données par :

$$x = x_0\cos\omega_x t \qquad y = y_0\cos(\omega_y t+\varphi)$$

Les trajectoires obtenues sont nommées *courbes de Lissajous*.



1. À quelles conditions la trajectoire est-elle fermée ? Quelle caractéristique présente alors le mouvement ?
2. Tracer l'allure de la trajectoire correspondant à $\omega_y = 3\omega_x ; \varphi = 0$
3. Donner les équations des trajectoires correspondant à $\omega_x = \omega_y$ et $\varphi = 0$ puis $\varphi = \pi/2$ et $\varphi = \pi$, et tracer ces courbes.
4. ∤ On peut montrer que la trajectoire est toujours une ellipse si $\omega_x = \omega_y$. Montrer que dans ce cas a : $|\sin\varphi| = \frac{B'B}{A'A} = \frac{D'D}{C'C}$, ces distances étant définies sur la trajectoire ci-dessus, pour $\varphi = \pi/4$.

Correction de l'exercice 1

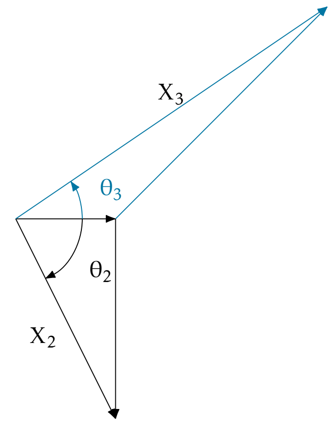
1. La vitesse du son ($c_s = 340\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$) est très faible devant celle de la lumière ($c_\ell = 3{,}00\cdot10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$). On peut donc considérer que cette dernière se propage instantanément. Lors d'un orage, l'éclair et le coup de tonnerre sont produits quasi-simultanément. La lumière de l'éclair parvient instantanément à un observateur situé à une distance d alors que le tonnerre arrivera au bout de la durée $\Delta t = d/c_s$. Pour $\Delta t = 5\,\mathrm{s}$, on calcule $d = c_s\Delta t = 1{,}7\,\mathrm{km}$.

2. Dans le cas d'un son en mono, le signal est le même sur les deux haut-parleurs. Inverser les deux fils rouge et noir sur l'un des haut-parleurs revient à mettre le signal en opposition de phase entre les deux hauts-parleur. En un point équidistant des deux haut-parleur, on aura donc une interférence destructive, *ie* pas de son. Cette extinction n'est cependant pas totale pour un auditeur puisque la taille de son crâne n'est pas négligeable devant la longueur d'onde d'un signal audible : l'interférence ne peut pas être destructive dans les deux oreilles en même temps.

3. Si l'on n'est pas en face d'un haut-parleur, il faut compter sur la diffraction des ondes sonores pour entre le son. Avec une célérité de $c = 340\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, on calcule les longueurs d'onde : $\lambda(20\,\mathrm{Hz}) = 17\,\mathrm{m}$ et $\lambda(20\,\mathrm{kHz}) = 1{,}7\,\mathrm{cm}$. Les sons audibles les plus aigus ont donc des longueurs d'onde trop petites pour être efficacement diffractés et ne pourront être bien entendus qu'en face d'un haut-parleur. Les plus graves seront en revanche très bien diffractés.

4. Sur une corde vibrante, le mode fondamental correspond à une longueur d'onde double de la longueur de la corde, de l'ordre de 64 cm, soit $\lambda_c = 1{,}3\,\mathrm{m}$. Pour cette fréquence, la longueur d'onde dans l'air, avec $c = 340\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ est $\lambda_a = 1{,}4\,\mathrm{m}$, très proches. Les autres cordes ont cependant la même longueur (et donc la même longueur d'onde λ_c) alors que leur longueur d'onde dans l'air peut être très différente (la plus grave a une fréquence fondamentale de 82 Hz).

Correction de l'exercice 2



1. Le premier cas est une onde d'amplitude nulle,
2. Pour le deuxième, on peut écrire :
$$\cos(\omega t) + 2\sin(\omega t) = \cos(\omega t) + 2\cos(\omega t - \pi/2).$$
Le théorème de Pythagore donne une amplitude $X_2 = \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}$; et on lit $\tan(\theta_2) = -2$ soit, puisque $\cos(\theta_2) > 0$, $\theta_2 = \arctan(-2) = -63°$.
3. Dans ce cas, le théorème d'Al-Kashi donne :
$$X_3 = \sqrt{1 + 3^2 + 2\times3\times\cos(\pi/4)} = 3{,}8.$$
On détermine l'angle avec la formule des sinus :
$$\frac{\sin(\theta_3)}{3} = \frac{\sin(\pi-\pi/4)}{X_3} \to \sin(\theta_3) = 0{,}558,$$
soit, puisque $\theta_3 \in [0;\pi/2]$, $\theta_3 = \arcsin(0{,}558) = 33°$.

Correction de l'exercice 3

1. $t = 0$ La première onde a ses maxima en $x = 0[\lambda]$, avec $\lambda = c/f$ sa longueur d'onde. Pour la deuxième onde ils sont à $x = d[\lambda]$.

   $t = 1/(2f)$ Les ondes ont progressé de $\Delta x = c/(2f) = \lambda/2$. Les maxima de la première sont désormais en $x = \lambda/2[\lambda]$ et deux de la deuxième en $x = d + \lambda/2[\lambda]$,

   $t = 1/(4f)$ Les ondes ont progressé de $\Delta x = c/(4f) = \lambda/4$. Les maxima de la première sont désormais en $x = \lambda/4[\lambda]$ et deux de la deuxième en $x = d + \lambda/4[\lambda]$.

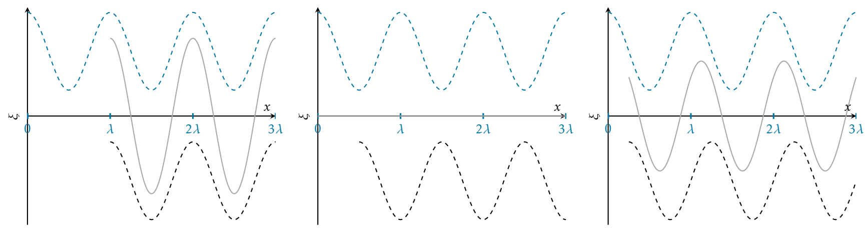
2. Les trois ondes somme sont sinusoïdales de fréquence f.

   $d = c/(f)$ Les ondes sont en phase, on a une onde d'amplitude double.

   $d = c/(2f)$ Les ondes sont en opposition de phase, la somme est nulle.

   $d = c/(4f)$ Les maxima de la somme sont entre $x = 0[\lambda]$ et $x = \lambda/4[\lambda]$.

   On illustre ces résultats sur la figure suivante.



3. L'onde somme a pour expression, dans tous les cas :

$$\cos\left(2\pi f\left(t-\frac{x}{c}\right)\right)+\cos\left(2\pi f\left(t-\frac{x-d}{c}\right)\right).$$

Les deux derniers cas sont évidents. Pour le premier, on met cette expression sous la forme $X\cos(2\pi(t-\frac{x}{c}+\varphi))$ au moyen d'une construction de Fresnel. On obtient $X=\sqrt{2}$ et $\varphi=-22{,}5°$ en accord avec la figure précédente.

Correction de l'exercice 4

Si la figure est immobile, on peut penser qu'une crête a remplacé la suivante entre deux flashs du stroboscope. La distance $d=5\,\mathrm{mm}$ est alors la longueur d'onde. Sous cette hypothèse la durée nécessaire pour que l'onde parcourt une longueur d'onde d est la période du stroboscope $T=1/f$. On calcule alors la célérité $c=df=40\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$.

L'interprétation peut cependant être plus complexe :

- l'onde peut avoir parcouru un nombre entier de fois sa longueur d'onde entre deux flashs du stroboscope ; la célérité c sera alors un multiple de celle déterminée précédemment.
- l'onde peut également avoir parcouru une fraction entière ($1/n$ avec n entier) de sa longueur d'onde. Si la fréquence est suffisamment élevée, la persistence rétinienne donnera l'illusion que pendant n flash, les crêtes placées successivement en $0, \lambda/n, 2\lambda/n\dots$ sont observées simultanément. Dans ce cas la distance entre crête observée est une fraction de la longueur d'onde et la véritable célérité sera un multiple de celle déterminée précédemment.

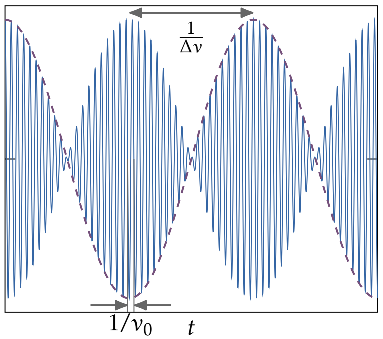
Correction de l'exercice 5

1. La condition de corde vibrante donne $\nu=\frac{c}{2L}$, avec ν la fréquence du monde fondamental et L la longueur de la corde. On a donc :

$$\frac{\nu(69)}{\nu(70)}=\frac{70}{69}\to\frac{\nu(69)-\nu(70)}{\nu(69)}=\frac{70-69}{69}\simeq 1{,}4\%$$

On a donc $\nu(69)=254\,\mathrm{Hz}$. On sait que la fréquence du battement est la différence entre les deux fréquences qui battent, soit $4\,\mathrm{Hz}$ ici.

On a tracé ci-contre la courbe représentant le battement somme de deux fréquences proches de ν_0, qui diffèrent de $\Delta\nu$. On y distingue des oscillations quasi-sinusoïdales à ν_0 dont l'amplitude varie elle-aussi sinusoïdalement avec une fréquence $\Delta\nu$. La courbe en trait interrompus représente la fonction dite «enveloppe», d'équation $\cos\left(\frac{2\pi(\Delta\nu)t}{2}\right)$, de période $\Delta\nu/2$.



☠ la période $1/\nu_0$ n'est pas, dans le cas général, rigoureusement égale à la distance entre deux maxima locaux de la courbe bien qu'elle en soit proche. En revanche, il est tout à fait légitime de faire cette approximation quand $\Delta\nu\ll\nu_0$.

2. (a)

   (b)

1. On écrit :

$$\begin{aligned}X_0\cos(2\pi f_1 t)+X_0\cos(2\pi f_2 t)&=2X_0\cos\left(\frac{2\pi(f_1+f_2)t}{2}\right)\cos\left(\frac{2\pi(f_1-f_2)t}{2}\right)\\&=2X_0\cos(2\pi f_0 t)\cos\left(\frac{2\pi(\Delta f)t}{2}\right),\end{aligned}$$

en posant $f_0\equiv(f_1+f_2)/2$ et $\Delta f=f_1-f_2$.

2. Notons f la fréquence d'une des deux cordes, dont on note X la tension et c la célérité des ondes acoustiques. Notons de même $f+\Delta f$ la fréquence de l'autre, $c+\Delta c$ la célérité et $X+\Delta X$ la tension. Les deux cordes ayant la même longueur, on a :

$$\frac{f+\Delta f}{f}=\frac{c+\Delta c}{c}\to\frac{\Delta f}{f}=\frac{\Delta c}{c}.$$

Comme on l'a vu dans les calculs d'imprécisions, puisque c varie comme la puissance 1/2 de X, on a :

$$\frac{\Delta c}{c}=\frac{1}{2}\frac{\Delta X}{X}.$$

Pour une variation relative de fréquence de $2/250=8\cdot10^{-3}$, il faudra donc avoir une variation double, soit $1{,}6\cdot10^{-2}$ de la tension.

Correction de l'exercice 6

1. On lit une quatre longueurs d'onde entre les deux sources distantes de $8\,\mathrm{cm}$. On a donc $\lambda=2{,}0\,\mathrm{cm}$, soit une fréquence $\nu=c/\lambda=20\,\mathrm{Hz}$.
2. Sur les images 1b et 1c l'excitation est nulle entre les deux sources. Comme cette zone correspond à une onde stationnaire, on en déduit que les instants correspondants (notés t_b et t_c) sont séparés d'un multiple d'une demi-période. De plus le reste de la figure n'est pas identique : l'onde est donc en opposition de phase entre ces deux instants : on a donc $|t_c-t_b|=(p+1/2)T$, avec T la période et $p\in\mathbb{N}$.

   Sur l'image 1a en revanche, l'excitation dans la zone d'onde stationnaire est maximale, l'onde y est donc en quadrature par rapport aux deux autres images, soit $|t_a-t_b|=(2q+1)+T/4$, avec $q\in\mathbb{N}$. La plus petite durée Δt est donc T/4 et les trois instants sont alors séparés d'un quart de période exactement, soit $\Delta t=T/4=1{,}25\cdot10^{-2}\,\mathrm{s}$.

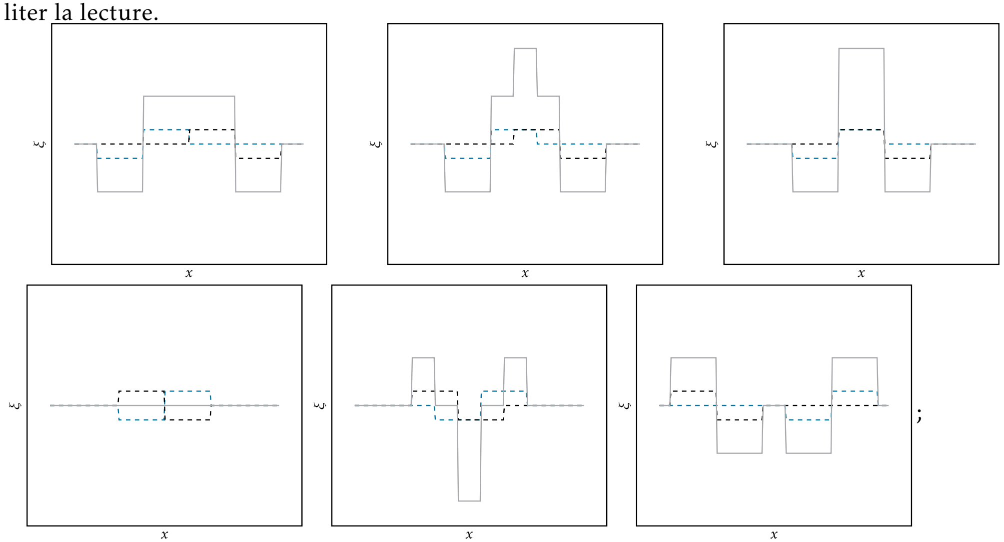
   Enfin, en regardant la zone d'onde progressive, à droite de la source A par exemple, on constate que la frange sombre située sur la source A sur l'image 1b a progressé d'un ¼ de longueur d'onde sur l'image 1a et encore de la même distance sur l'image 1c. La chronologie est donc : image 1b → image 1a → image 1c.

3. (a) Au point A, l'excitation est toujours nulle. En effet, on peut lire que les distances entre chacune des sources et ce point sont 10 cm et 3 cm, elles diffèrent donc de 7 cm, soit $3{,}5\times\lambda$. Les ondes interfèrent bien destructivement en ce point.

   (b) Au point B, l'excitation oscille avec une amplitude maximale. On lit ici que les distances aux deux sources sont respectivement 9,5 cm et 5,5 cm. Elles diffèrent de $2\times\lambda$: les ondes interfèrent bien constructivement en ce point.

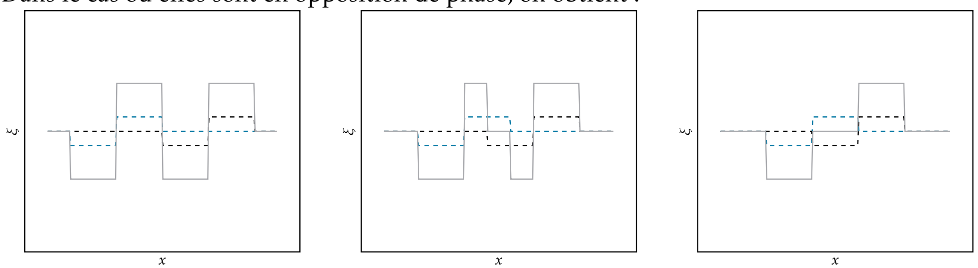
Correction de l'exercice 7

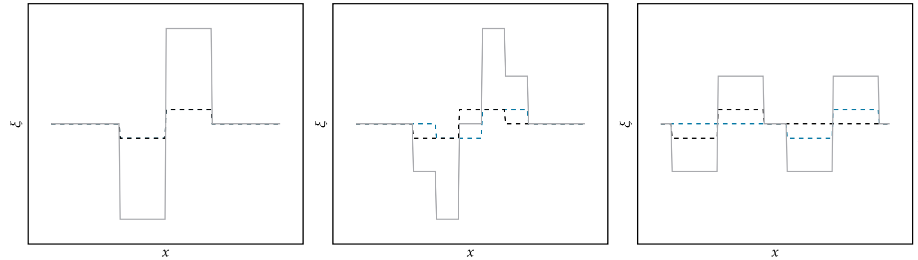
Dans le cas où les deux ondes sont en phase à l'instant initial on obtient les profils suivants dans lesquels les ondes contrapropageantes sont en traits interrompus et leur somme en trait continu. Les amplitudes des ondes individuelles ont été diminuées d'un facteur 1/3 pour faciliter la lecture.



;

Dans le cas où elles sont en opposition de phase, on obtient :





;

Le deuxième cas illustre, si l'on ne regarde que la moitié gauche de la figure le cas de la réflexion d'une onde sur une paroi pouvant donner naissance à une onde stationnaire, si l'onde incidente est une sinusoïde permanente.

Correction de l'exercice 8

1. On est dans le cas d'une onde stationnaire classique. On a :

$$\xi(x,t) = A\cos(2\pi f_0(t-x/c)) + A\cos(2\pi f_0(t+x/c)) = 2A\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi x/\lambda),$$

   avec $\lambda = c/f_0$.

2. On calcule de la même manière :

$$\begin{aligned}\xi(x,t) &= A\cos(2\pi f_0(t-x/c)) + A\cos(2\pi(f_0+\Delta f)(t+x/c))\\ &= 2A\cos(2\pi(f_0+\frac{\Delta f}{2})t)\cos(\frac{2\pi\Delta f\,t}{2}+2\pi x/\lambda)\end{aligned}$$

   Comme dans le cas d'un battement, le premier cosinus oscille temporellement beaucoup plus vite que le deuxième. On a donc une figure d'onde stationnaire qui régresse lentement à la vitesse $\lambda\Delta f/2$. En effet les points où l'amplitude de l'oscillation à $f_0+\Delta f/2$ est maximale sont, à un instant t, tels que $\cos(\frac{2\pi\Delta f t}{2}+2\pi x/\lambda)$ est d'amplitude maximal, soit tels que :

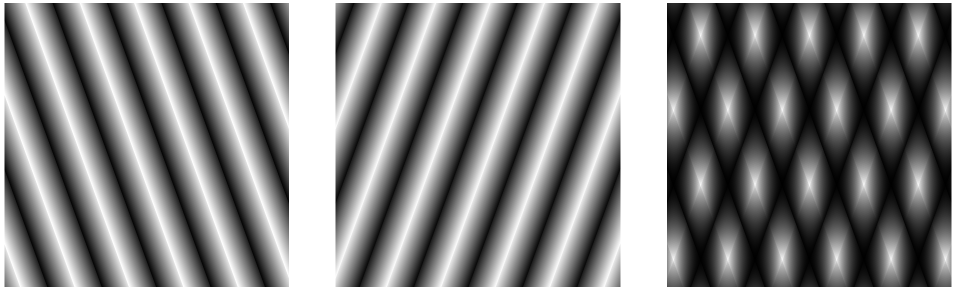
$$2\pi(\Delta f\,t/2 + x/\lambda) = k\pi.$$

   Notons $x_k(t)$ la position d'un tel point, on a :

$$x_k = k\lambda/2 - \lambda\Delta f\,t/2 \rightarrow \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t} = -\lambda\Delta f/2.$$

Correction de l'exercice 9

1. Les deux ondes séparément donnent les deux premières figures représentées ci-dessous. Leur somme donne la troisième, pour $\alpha = 40$. La figure d'interférences «défile» ensuite uniquement selon $\overrightarrow{e_y}$, à la vitesse $f\lambda/\sin(\alpha/2)$.



2. Le vecteur d'onde a pour norme $k = 2\pi/\lambda$. Posons $k_x = k\cos(\alpha/2)$ et $k_y = k\sin(\alpha/2)$. Le retard en un point de coordonnées (x, y) peut s'écrire pour la première onde comme $k_x x + k_y y$.

   Pour la première onde, on peut écrire la perturbation comme :

$$\xi_1 = A\cos\left(\omega t - k_x x - k_y y\right).$$

   Pour la deuxième, c'est :

$$\xi_2 = A\cos\left(\omega t + k_x x - k_y y\right).$$

   La somme est :

$$\xi_1 + \xi_2 = 2A\cos(\omega t - k_y y)\cos(k_x x).$$

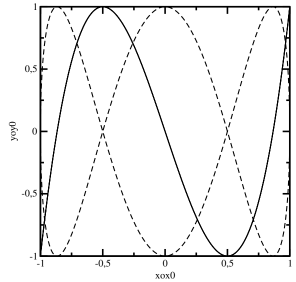
   On reconnaît le produit d'une onde progressive selon $\overrightarrow{e_y}$ multipliée par une enveloppe d'onde stationnaire selon $\overrightarrow{e_x}$.

↯

Correction de l'exercice 10

1. Si la trajectoire est fermée, il existe au moins une date t et une durée T tels que $M(t) = M(t+T)$, soit : $\begin{cases}\cos\omega_x(t+T) & = \cos\omega_x t\\ \cos\omega_y(t+T) & = \cos\omega_y t\end{cases}$, soit $\begin{cases}\omega_x T & = 2p\pi\\ \omega_y T & = 2q\pi\end{cases}$, soit encore $\omega_x/\omega_y \in \mathbb{Q}$: les deux pulsations sont dites *commensurables*. Comme les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont alors périodiques, la trajectoire est périodique, et une période en est $T = 2p\pi/\omega_x = 2q\pi/omega_y$.

2. La plus petite période du mouvement est ici $2\pi/\omega_x$. On détermine la trajectoire sur l'intervalle $[0;\pi/(2\omega_x)]$, le reste s'en déduira par des symétries simples.

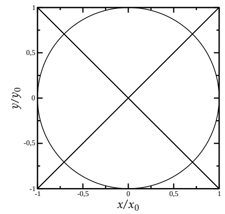
   

   $0 \leqslant \omega_x t \leqslant \pi/2 \rightarrow 0 \leqslant \omega_y t \leqslant 3\pi/2$. Sur cet intervalle, y décroît de 1 à −1 puis croît de 1 à 0.

   $\pi/2 \leqslant \omega_x t \leqslant \pi$ On a $x(t) = -x(\pi/\omega_x - t)$, avec $\pi/\omega_x - t$ compris dans l'intervalle précédent et de même $y(t) = -y(\pi/\omega_x - t)$. La trajectoire sur ce domaine est la symétrique par rapport à l'origine de la trajectoire sur $[0, \pi/(2\omega_x)]$.

   $-\pi/2 \leqslant \omega_x t \leqslant 0$. Puisque $x(t)$ et $y(t)$ sont paires, cette partie de la courbe est identique à celle pour $[0;\pi/(2\omega_x)]$.

   La trajectoire pour $(\omega_y = 3\omega_x; \varphi = 0)$ est représentée sur la figure ci-dessus en trait continu. On y a également représenté, en traits interrompus, la trajectoire correspondant à $(\omega_y = 3\omega_x; \varphi = \pi/2)$.

3. 

   $(\omega_x = \omega_y; \varphi = 0)$: on a $x/x_0 = y/y_0$, la trajectoire est une droite de pente +1,

   $(\omega_x = \omega_y; \varphi = \pi/2)$: on a $\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 = 1$, la trajectoire est un cercle,

   $(\omega_x = \omega_y; \varphi = \pi)$: on a $x/x_0 = -y/y_0$, la trajectoire est une droite de pente −1.

4. Le point D est atteint pour $x = 0, y > 0$, soit (pour $x_0 > 0$ et $y > y_0$ et $\varphi > 0$) $\omega_t = 3\pi/2$ où y vaut $y_D = y_0\cos(3\pi/2 + \varphi) = y_0\sin\varphi = y_C\sin\varphi$ puisque le maximum atteint par y, égal à y_C est y_0. On a donc :

$$|\sin\varphi| = \frac{B'B}{A'A} = \frac{D'D}{C'C},$$

   en considérant les autres points. On doit utiliser une valeur absolue car si φ est négatif, le même raisonnement sera tenu avec les points D′ et C′. Cette technique ne permet donc pas de déterminer le signe de la phase.