Le symbole désigne un exercice demandant un peu plus de calculs.
Le symbole désigne un exercice utilisant des idées/méthodes plus originales.
Les frottements seront négligés, sauf mention explicite du contraire.

Exercices d'application : ressort horizontal, questions courtes, différents paramétrages, bille accrochée, exploitation de mesures,

Culture en sciences physiques : questions courtes, bille accrochée, associations de ressorts, battements

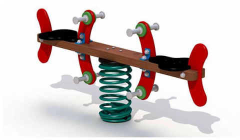
Corrigés en TD : ressort horizontal, plan incliné, bille accrochée, exploitation de mesures,

Exercice 1 : Ressort horizontal

1. Représenter un système masse-ressort horizontal :
   - quand son élongation est maximale,
   - un quart de période plus tard,
   - une demi-période plus tard.
2. Représenter également par des vecteurs la force de tension sur l'extrémité mobile et le vecteur vitesse de ce point à chacun de ces instants.
3. Si l'élongation est maximale (notée Δl_{max}) à $t = 0$, donner une expression de son élongation en fonction du temps.

Exercice 2 : Questions courtes

1. On comprime un ressort horizontal d'une élongation Δl donnée. On y attache un objet qu'on lâche sans vitesse initiale. Comment varient la vitesse maximale et l'élongation maximale atteintes par l'objet en fonction de sa masse ?
2. Comment se peser dans l'espace avec un ressort ?
3. Comment évoluent les oscillations des amortisseurs d'une bascule à ressort comme celle représentée ci-contre selon qu'un adulte ou un enfant l'utilise ?



Exercice 3 : Différents paramétrages

On considère un ressort horizontal de raideur k et de longueur à vide l_0 dont une extrémité est fixée en un point A. On fixe une masse m à l'autre extrémité M. Le ressort est comprimé à l'instant $t = 0$ d'une longueur $\Delta l_0 > 0$. On note M_0 cette position.

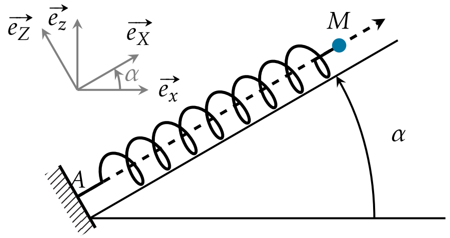
Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par la position du point M en utilisant différentes coordonnées et différentes conditions initiales sur le vecteur vitesse $\vec{v}_0$.

- $\vec{v}_0 = \vec{0}$, origine au point A, axe dirigé par $\overrightarrow{AM_0}$.
- vitesse de norme $v_0 > 0$ dirigée en sens inverse de A ; origine au point O, défini par la position du point M quand le ressort a son longueur au repos, axe dirigé par $\overrightarrow{M_0A}$.
- $\vec{v}_0 = \vec{0}$, origine en M_0, axe dirigé par $\overrightarrow{AM_0}$.

Exercice 4 : Ressort sur un plan incliné

On place un système masse-ressort sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Le vecteur vitesse initial est ici nul et le ressort est initialement allongé d'une longueur Δl_0. Déterminer le mouvement ultérieur en utilisant :

1. les coordonnées X et Z d'origine A et de vecteurs de base $\vec{e_X}$ et $\vec{e_Z}$.
2. les coordonnées x et z de même origine et de vecteurs de base $\vec{e_x}$ et $\vec{e_z}$,



Exercice 5 : Bille accrochée à un ressort vertical

Un ressort vertical s'allonge de 5,0 cm par rapport à sa longueur au repos quand on suspend à son extrémité libre une bille de 200 g. On cogne la bille lorsqu'elle est à l'équilibre, verticalement et vers le haut. Elle remonte alors de 2,0 cm avant de redescendre. On néglige le frottement de l'air et on prendra $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

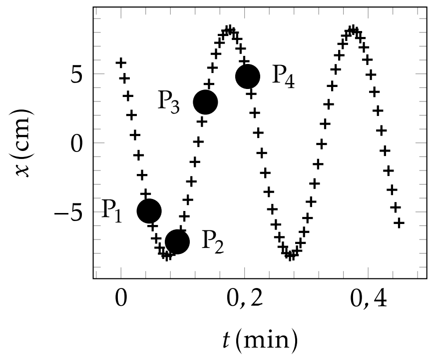
Déterminer :

- la raideur du ressort,
- la période T et la fréquence de ses oscillations,
- l'expression du déplacement $z(t)$ par rapport à la position d'équilibre,
- le module de la vitesse initiale communiquée à la bille lors du choc.

Exercice 6 : Exploitation de mesures

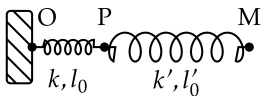
Un dispositif a réalisé l'acquisition de l'allongement d'un ressort au cours du temps. Les résultats sont présentés graphiquement dans la figure ci-dessous.

1. On cherche à exprimer l'allongement sous la forme $x(t) = A\sin(2\pi f_0 t + \varphi)$. Déterminer graphiquement les valeurs numériques de A, f_0 et φ.
2. Représenter le système masse-ressort aux instants correspondant aux points P_1, P_2, P_3 et P_4. Représenter qualitativement les vecteurs vitesse et accélération.
3. La masse de l'objet accrochée au ressort vaut $m = 100$ g. En déduire la raideur du ressort.

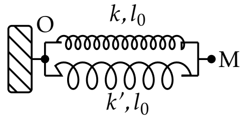


Exercice 7 : Associations de ressorts

1. On considère deux ressorts de constantes de raideur respectives k et k' et de longueurs à vide respectives l'_O et l'_0 associés en série comme représenté ci-contre. Montrer qu'ils sont équivalents à un unique ressort idéal dont on donnera la longueur à vide et la constante de raideur.

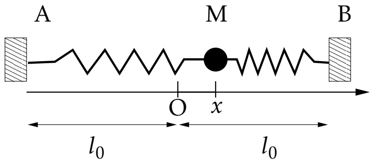


2. On considère maintenant deux ressorts de constantes de raideur respectives k et k' et de même longueur à vide respectives l_O associés en parallèle comme représenté ci-contre : leurs extrémités sont toujours jointes. Montrer qu'ils sont équivalents à un unique ressort idéal dont on donnera la longueur à vide et la constante de raideur.



Exercice 8 : Point matériel lié à deux ressorts

Ressorts horizontaux



Un point matériel de masse m est attaché à deux ressorts horizontaux identiques (longueur au repos l_0, constante de raideur k) fixés aux points A et B, fixes dans $\mathcal{R}_T$.

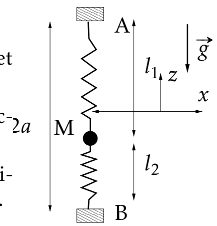
Le point est à l'instant t au point M d'abscisse $\overline{OM} = x$ à l'instant t et glisse sans frottement le long de l'axe Ox.

1. Établir l'équation différentielle du mouvement du point M. Y identifier la pulsation caractéristique du système ω_0.
2. À l'instant initial, le mobile est immobile en M_0 tel que $\overline{OM_0} = x_0$. Exprimer x en fonction de t.
3. Déterminer les forces exercées sur les supports en A et B. Où se trouve le point matériel quand ces forces sont maximales ?
4. Vérifier la conservation de l'énergie mécanique.

Ressorts verticaux

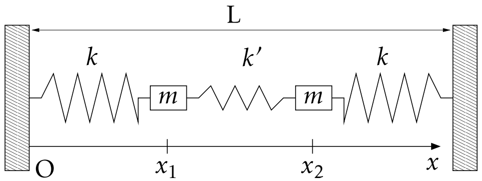
Les ressorts sont maintenant verticaux.

1. Calculer à l'équilibre les longueurs l_1 et l_2 des ressorts en fonction de m, g, k et a.
2. Établir l'équation différentielle d'évolution de z et en déduire la pulsation caractéristique.
3. À l'instant initial le point matériel se trouve en $z = 0$ animé d'une vitesse v_0 dirigée selon $\vec{e}_z$. Établir l'expression de $z(t)$ et vérifier la conservation de l'énergie.



Exercice 9 : Battements entre oscillateurs faiblement couplés

On se propose de comprendre la nature du mouvement du système de deux points matériels représenté sur la figure ci-contre lorsque le point matériel 1 est écarté de sa position d'équilibre d'une distance a (le point 2 est maintenu immobile) puis relâché sans vitesse.



Les points matériels ont même masse m, les trois ressorts on même longueur à vide l_0 mais le ressort central a une raideur k' différente de la raideur k commune des deux ressorts extrémaux. Le mouvement de chaque masse est unidimensionnel selon l'axe Ox.

1. Déterminer les positions d'équilibres $x_{1(eq)}$ et $x_{2(eq)}$ de chacun des points matériels. On introduira les facteurs sans dimension : $\beta = l_0/L$ et $\alpha = k'/k$.
2. Déterminer les équations différentielles satisfaites par les écarts à l'équilibre $X_1 = x_1 - x_{1(eq)}$ et $X_2 = x_2 - x_{2(eq)}$.
3. Afin de découpler les deux équations, on pose $X_S = X_1 + X_2$ et $X_A = X_1 - X_2$.
   (a) Quelles sont les équations différentielles vérifiées par ces nouvelles variables ?
   (b) Les résoudre en introduisant deux pulsations ω_S et ω_- exprimées en fonction des paramètres du problème.
4. En déduire les équations horaires de x_1 et x_2.
5. On se place maintenant dans le cas où le ressort central est nettement moins raide que les deux autres : le problème est alors celui de deux oscillateurs pratiquement indépendants, faiblement couplés par le ressort central.
   (a) Que peut-on dire des pulsations ω_+ et ω_- ?
   (b) Tracer qualitativement les quantités $x_1(t)$ et $x_2(t)$ (utiliser les développements de $\cos a + \cos b$ et $\cos a - \cos b$).
   (c) Calculer l'énergie contenue dans chaque oscillateur et tracer les graphes de leur variation en fonction du temps. Montrer en particulier que l'énergie passe successivement d'un oscillateur à l'autre. Ce phénomène porte le nom de *battements*.

Correction de l'exercice 1

En choisissant l'origine des temps à l'instant où l'élongation est maximale, et en notant $\Delta l_{\max}$ sa valeur et T la période, l'élongation $\Delta l(t)$ s'écrit à chaque instant : $\Delta l = \Delta l_{\max}\cos(2\pi t/T)$ et la vitesse du point matériel est : $\dot{\Delta l} = -2\pi\Delta l_{\max}\sin(2\pi t/T)/T$.

- La force de tension est dirigée vers l'extrémité fixe du ressort, elle est maximale. Le vecteur vitesse est nul.
- Un quart de période plus tard, en $t = T/4$ l'élongation du ressort est nulle, la force de tension est donc nulle. La vitesse est en revanche maximale, dirigée vers l'extrémité fixe, et a pour norme $|\dot{\Delta l}| = 2\pi\Delta l_{\max}/T$.
- Une demi-période plus tard, en $t = T/2$, la force de tension est de nouveau maximale en norme mais dirigée dans l'autre sens. Le vecteur vitesse est nul.

Correction de l'exercice 2

1. L'élongation maximale sera Δl dans tous les cas. En revanche la vitesse maximale étant égale à $\omega\Delta l$ et $\omega = \sqrt{k/m}$ diminuant quand on augmente la masse, la vitesse maximale sera plus faible pour une masse plus grande.
2. Il suffit de s'attacher à une extrémité d'un ressort dont on connaît la raideur et de fixer l'autre extrémité à un objet de masse beaucoup plus importante (la cloison de la station spatiale). La mesure de la fréquence des oscillations permettra de remonter à la masse.
3. Bien qu'on n'ait pas un ressort en mouvement unidimensionnel, on peut tirer les mêmes conclusions qualitatives. La fréquence varie en $\sqrt{k/m}$, elle augmente quand la masse diminue, *ie* quand c'est un enfant qui utilise la bascule. Les oscillations avec un adulte seront plus lentes.

Correction de l'exercice 3

Dans tous les cas, la pulsation est $\omega = \sqrt{k/l}$. On note $\vec{e_x}$ le vecteur unitaire dirigé par $\overrightarrow{AM_0}$.

- La force de tension a pour expression $\vec{T} = -k(x-l_0)\vec{e_x}$, l'équation différentielle d'évolution de x est donc :
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x-l_0) \quad \text{de solution : } x = -\Delta l_0\cos(\omega t) + l_0$$
- On a maintenant $\vec{T} = -kx\vec{e_x}$, l'équation différentielle est :
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \text{de solution : } x = \Delta l_0\cos(\omega t) - \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t).$$
- Cette fois-ci : $\vec{T} = -k(x-\Delta l_0)$, soit :
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x-\Delta l_0) \quad \text{de solution : } x = \Delta l_0(1-\cos(\omega t)).$$

Correction de l'exercice 4

On détermine les expressions des coordonnées et des vecteurs de base dans les deux systèmes. On a :

$$\begin{aligned}
X &= x\cos(\alpha) + z\sin(\alpha) & Z &= z\cos(\alpha) - x\sin(\alpha)\\
x &= X\cos(\alpha) - Z\sin(\alpha) & z &= Z\cos(\alpha) + X\sin(\alpha)\\
\vec{e_X} &= \vec{e_x}\cos(\alpha) + \vec{e_z}\sin(\alpha) & \vec{e_Z} &= \vec{e_z}\cos(\alpha) - \vec{e_x}\sin(\alpha)\\
\vec{e_x} &= \vec{e_X}\cos(\alpha) - \vec{e_Z}\sin(\alpha) & \vec{e_z} &= \vec{e_Z}\cos(\alpha) + \vec{e_X}\sin(\alpha)
\end{aligned}$$

On en déduit les expressions des forces dans les deux systèmes de coordonnées

$$\begin{aligned}
\vec{P} &= -mg\vec{e_z} = -mg(\cos(\alpha)\vec{e_Z} + \sin(\alpha)\vec{e_X})\\
\vec{T} &= -k(X-l_0)\vec{e_X} = -k[x\cos(\alpha) + z\sin(\alpha) - l_0][x\cos(\alpha)\vec{e_x} + \sin(\alpha)\vec{e_z}],
\end{aligned}$$

On a toujours : $m\vec{a}(M) = \vec{T} + \vec{P} + \vec{N}$, avec $\vec{N}$ la réaction du support, qui n'a pas de composante selon $\vec{e_X}$ en l'absence de frottement.

1. En coordonnées X, Z, on a :
$$m\frac{d^2X}{dt^2} = -k(X-l_0) - mg\sin(\alpha) \qquad 0 = m\frac{d^2Z}{dt^2} = -mg\cos(\alpha) + N_Z$$
Les conditions initiales étant $X(t=0) = l_0 + \Delta l_0$ et $\dot{X}(t=0) = 0$, la solution est :
$$X = l_0 - \frac{mg\sin(\alpha)}{k} + \Delta l_0\cos(\omega t) \quad Z = 0.$$
2. La méthode la plus simple pour déterminer x et z consiste à utiliser leur expression en fonction de X et Z. On obtient :
$$x = X\cos(\alpha) \quad z = X\sin(\alpha).$$
On vérifie facilement la vraisemblance de ces expressions dans les cas $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi/2$.

Correction de l'exercice 5

- À l'équilibre, la somme des forces appliquées (son poids en la force de tension du ressort) au point matériel dans le référentiel terrestre galiléen est nulle : on a donc $\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$, soit $m\vec{g} - k\left(\Delta l_{eq}\right)\vec{e}_z$, avec Δl_{eq} la longueur du ressort à l'équilibre. On détermine ainsi $k = mg/\Delta l_{eq} = 39{,}2\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$.
- La période est $2\pi\sqrt{m/k} = 0{,}45\,\mathrm{s}$, soit $f = 1/T = 2{,}2\,\mathrm{Hz}$.
- L'écart $z(t)$ par rapport à l'équilibre (avec z orienté selon la normale ascendante) est de la forme : $z(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$, avec $\omega = \sqrt{k/m}$. Les conditions initiales étant $z(0) = 0$ et $\dot{z}(0) = v_0$, la solution est $z(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$. L'amplitude du mouvement v_0/ω est évidemment égale à Δz, résultat qu'on peut vérifier sur l'expression précédente de v_0 puisque $\Delta l_{eq} = mg/k$ et $\Delta l_{fin} - \Delta z$. **Remarque:** on peut également vérifier la conservation de l'énergie mécanique entre l'instant initial où elle est entièrement cinétique et l'extension maximale où elle est entièrement potentielle.

Correction de l'exercice 6

1.
   - On mesure, sur la figure1, $2T_0 = 0{,}42 - 0{,}02 = 0{,}40\,\mathrm{min}$, soit $T_0 = 0{,}20\,\mathrm{min}$ et $f_0 = \frac{1}{T_0} = 8{,}3\cdot 10^{-2}\,\mathrm{Hz}$.
   - On lit également $2A = 8{,}0 - (-8{,}0) = 16{,}0\,\mathrm{cm}$, soit $A = 8{,}0\,\mathrm{cm}$.
   - Dans l'expression de $x(t)$, la phase φ représente l'avance de $x(t)$ par rapport à un sinus pour lequel cette phase est nulle. Le premier passage par flanc montant de la courbe étant en $t_0 = 0{,}125\,\mathrm{min}$, le *retard* est $2\pi t_0/T = 3{,}9\,\mathrm{rad} = 225°$. L'*avance* est donc $360 - 225 = 144°$.
2. La vitesse $\dot{x}$ est positive en P_2 et P_3, négative ailleurs. L'accélération $\ddot{x}$ est négative en P_3 et P_4, positive ailleurs.

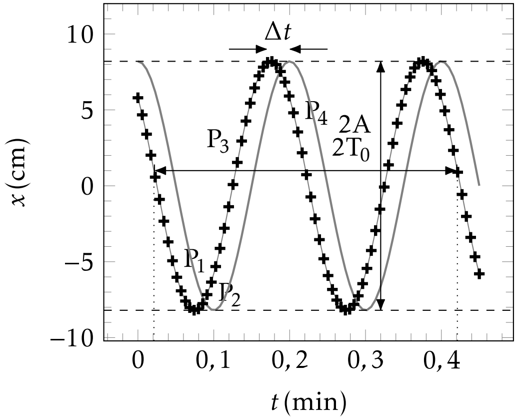


FIGURE 1

3. On calcule $k = 4\pi^2 m f_0^2 = 3{,}3 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$.

Correction de l'exercice 7

Dans les deux cas, on désigne par T_i ($i = 1, 2$) la tension du ressort i et $\overrightarrow{\Delta l_i}$ son élongation.

1. Dans l'association série le principe des actions réciproques assure que chaque ressort exerce une force de même intensité sur l'autre : les deux tensions ont la même tension qu'on notera T. On en déduit les élongations $\overrightarrow{\Delta l_1} = -\overrightarrow{\mathrm{T}}/k_1$ et $\overrightarrow{\Delta l_2} = -\overrightarrow{\mathrm{T}}/k_2$. L'élongation totale $\overrightarrow{\Delta l}$ est, quant à elle, la somme des élongations : $\overrightarrow{\Delta l_1} + \overrightarrow{\Delta l_2} = \overrightarrow{\Delta l}$. On en déduit : $\overrightarrow{\Delta l} = -(1/k_1 + 1/k_2)\,\overrightarrow{\mathrm{T}}$. On retrouve bien la caractéristique d'un ressort de raideur k telle que $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$.

2. Dans l'association parallèle, c'est l'élongation qui est la même pour les deux ressorts (on la note $\overrightarrow{\Delta l}$), et le point matériel est soumis la somme des deux tensions. En notant $\overrightarrow{\mathrm{T}}$ cette somme, on a $\overrightarrow{\mathrm{T}} = \overrightarrow{\mathrm{T}}_1 + \overrightarrow{\mathrm{T}}_2 = -\left(k_1\overrightarrow{\Delta l_1} + k_2\overrightarrow{\Delta l_2}\right) = -(k_1 + k_2)\overrightarrow{\Delta l}$: la raideur k est maintenant la somme des raideurs.

Correction de l'exercice 8

Horizontaux

1. Dans $\mathcal{R}_\mathrm{T}$ galiléen, le point matériel est soumis à la réaction $\overrightarrow{\mathrm{R}}$ du support normale à $\vec{e}_x$ (mouvement sans frottement), à son poids lui aussi normal à $\vec{e}_x$ et aux forces de rappel élastique exercées par les deux ressorts : $\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{T}}_\mathrm{A} = -k\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}} - l_0\,\vec{u}_\mathrm{AM}\right) = -k(x + l_0 - l_0)\,\vec{e}_x = -kx\,\vec{e}_x \\ \overrightarrow{\mathrm{T}}_\mathrm{B} = -k(\overrightarrow{\mathrm{BM}} - l_0\,\vec{u}_\mathrm{BM}) = -k(-l_0 + x + l_0)\,\vec{e}_x = -kx\,\vec{e}_x\end{cases}$.
Le principe fondamental de la dynamique s'écrit, en projection sur $\vec{e}_x$: $m\ddot{x} = -2kx$: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, avec $\omega_0 = \sqrt{2k/m}$.
2. On a immédiatement : $x = x_0\cos(\omega_0 t)$.
3. La tension d'un ressort idéal étant uniforme, la force en A (resp. en B) est simplement l'opposée de la tension exercée par le ressort de gauche (resp. de droite). On a $\overrightarrow{\mathrm{F}}_\mathrm{A} = kx\,\vec{e}_x$ et $\overrightarrow{\mathrm{F}}_\mathrm{B} = kx\,\vec{e}_x$.
Elles sont maximales en norme quand l'élongation du ressort est maximale, soit quand $|x| = x_0$, soit encore pour $\omega t = 0\,[\pi]$.
4. On vérifie que
$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x)^2 + \frac{1}{2}k(-x)^2,$$
est bien une constante en utilisant le fait que $\sin^2 + \cos^2 = 1$.

Verticaux

1. Le point matériel est soumis à :
   - $\overrightarrow{\mathrm{P}} = -mg\,\vec{e}_z$
   - $\overrightarrow{\mathrm{F}}_\mathrm{A} = -k(\overrightarrow{\mathrm{AM}} - l_0\,\vec{u}_\mathrm{AM})\,\vec{e}_z = k(l_1 - l_0)\,\vec{e}_z$
   - $\overrightarrow{\mathrm{F}}_\mathrm{B} = -k(\overrightarrow{\mathrm{BM}} - l_0\,\vec{u}_\mathrm{BM}) = -k(l_2 - l_0)\,\vec{e}_z$

   À l'équilibre, on a donc : $k(l_1 - l_2) = mg$. Comme $(l_1 + l_2) = 2a$, on obtient :
$$l_1 = a + mg/(2k) \quad \text{et} \quad l_2 = a - mg/(2k).$$
2. Comme on l'a vu en cours, le fait de rendre l'oscillateur vertical ne change pas sa pulsation, seule la position d'équilibre est modifiée. On a donc toujours une pulsation égale à $\omega = \sqrt{2k/m}$. On a :
$$\ddot{z} + \omega^2(z - z_\mathrm{eq}) = 0, \text{avec : } z_\mathrm{eq} = -\frac{mg}{2k}.$$
3. Les conditions initiales $z = 0$ et $\vec{v} = v_0\,\vec{e}_z$ assurent que :
$$z = z_\mathrm{eq}\,(1 - \cos(\omega t)) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t).$$

Correction de l'exercice 9

1. L'équilibre du ressort 1 est atteint pour $-k(x_1 - l_0) + k'(x_2 - x_1 - l_0) = 0$, celui du ressort 2 pour $k(\mathrm{L} - x_2 - l_0) - k'(x_2 - x_1 - l_0) = 0$. On résout ce système linéaire en effectuant la somme et la différence de ces équations.
$$\begin{cases}-k(x_1 - l_0) + k'(x_2 - x_1 - l_0) &= 0 \\ k(\mathrm{L} - x_2 - l_0) - k'(x_2 - x_1 - l_0) &= 0\end{cases} \begin{cases}x_1 + x_2 &= \mathrm{L} \\ (2k' + k)(x_1 - x_2) &= -k(\mathrm{L} - 2l_0) - 2k'l_0\end{cases}$$
$$\text{soit} \quad \begin{cases}x_\mathrm{s} = x_1 + x_2 &= \mathrm{L} \\ x_\mathrm{a} = x_1 - x_2 &= -\mathrm{L}\frac{1 - 2\beta(1-\alpha)}{1 + 2\alpha}\end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases}\beta &= l_0/\mathrm{L} \\ \alpha &= k'/k\end{cases}$$
$$\text{et donc} \quad \begin{cases}x_1^\mathrm{eq} &= \frac{\mathrm{L}}{2}\left(1 - \frac{1 - 2\beta(1-\alpha)}{1 + 2\alpha}\right) \\ x_2^\mathrm{eq} &= \frac{\mathrm{L}}{2}\left(1 + \frac{1 - 2\beta(1-\alpha)}{1 + 2\alpha}\right)\end{cases}$$
2. On effectue les mêmes sommes et différences sur les équations du mouvement :
$$\begin{cases}m\ddot{x}_1 &= -k(x_1 - l_0) + k'(x_2 - x_1 - l_0) \\ m\ddot{x}_2 &= k(\mathrm{L} - x_2 - l_0) - k'(x_2 - x_1 - l_0)\end{cases} \begin{cases}m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) &= k(\mathrm{L} - x_1 - x_2) \\ m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) &= -k(\mathrm{L} + (x_1 - x_2)) - 2k'(x_1 - x_2) + 2kl_0\end{cases}$$
Pour faire apparaître les positions d'équilibre, on peut « soustraire » à la première équation la condition d'équilibre : $0 = k\left(\mathrm{L} - (x_1^\mathrm{eq} + x_2^\mathrm{eq})\right)$ et à la seconde : $0 = -k(\mathrm{L} - 2l_0) - (2k' + k)(x_1^\mathrm{eq} - x_2^\mathrm{eq})$. On obtient :
$$\begin{cases}m(\ddot{\mathrm{X}}_1 + \ddot{\mathrm{X}}_2) + k(\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2) &= 0 \\ m(\ddot{\mathrm{X}}_1 - \ddot{\mathrm{X}}_2) + (2k' + k)(\mathrm{X}_1 - \mathrm{X}_2) &= 0\end{cases}$$

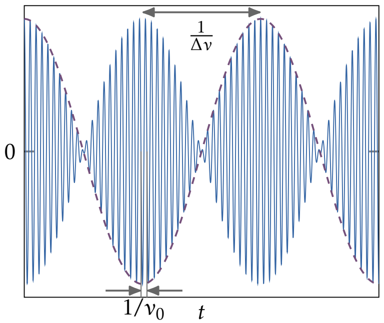
3. On a immédiatement :
$$\begin{cases}\ddot{X}_s+\omega_s^2X_s &=0\\ \ddot{X}_a+\omega_a^2X_a &=0\end{cases}\quad\text{avec}\quad\begin{cases}\omega_s^2 &=k/m\\ \omega_a^2 &=(2k'+k)/m\end{cases}$$

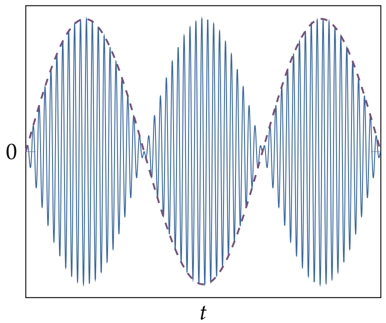
4. On a découplé les équations sur X_1 et X_2 pour obtenir des équations d'oscillateurs harmoniques sur leurs combinaisons symétrique (X_s) et antisymétrique (X_a). Ces deux grandeurs oscillent donc sinusoïdalement. On a alors $X_s=X_s^0\cos(\omega_s t+\varphi_s)$ et $X_a=X_a^0\cos(\omega_a t+\varphi_a)$. On obtient alors :
$$\begin{cases}X_2(t) &=(X_s-X_a)/2=\frac{X_s^0\cos(\omega_s t+\varphi_s)-X_a^0\cos(\omega_a t+\varphi_a)}{2}\\ X_1(t) &=(X_s+X_a)/2=\frac{X_s^0\cos(\omega_s t+\varphi_s)+X_a^0\cos(\omega_a t+\varphi_a)}{2}\end{cases}$$
Les conditions initiales sont ici $x_1=x_0$, $\dot{x}_1(0)=0$ et $x_2=0$, $\dot{x}_2(0)=0$, soit $X_s(0)=x_0$, $X_a(0)=x_0$ et $\dot{X}_s(0)=\dot{X}_a(0)=0$. Les expressions de x_1 et x_2 sont alors :
$$\begin{cases}X_1(t) &=\frac{x_0}{2}(\cos(\omega_s t)+\cos(\omega_a t))=x_0\cos(\frac{\omega_s-\omega_a}{2}t)\cos(\frac{\omega_a+\omega_s}{2}t)\\ X_2(t) &=\frac{x_0}{2}(\cos(\omega_s t)-\cos(\omega_a t))=x_0\sin(\frac{\omega_a-\omega_s}{2}t)\ \sin(\frac{\omega_a+\omega_s}{2}t)\end{cases}$$

5. (a) Dans le cas $k'\ll k$, *ie* $\alpha\ll 1$ les différences et sommes de ω_s et ω_a se simplifient, en posant $\omega_0=\omega_s$ pour donner : $\begin{cases}\omega_s+\omega_a &=\omega_0(\sqrt{1+2\alpha}+1)\simeq 2\omega_0\\ \omega_a+\omega_s &=\omega_0(\sqrt{1+2\alpha}-1)\simeq\omega_0(1+2\alpha/2-1)=\alpha\omega_0\end{cases}$

(b) Les expressions de $x_1(t)$ et $x_2(t)$ deviennent alors : $\begin{cases}x_1(t) &=x_0\cos(\omega_0 t)\ \cos\frac{\alpha\omega_0 t}{2}\\ x_2(t) &=x_0\sin(\omega_0 t)\ \sin\frac{\alpha\omega_0 t}{2}\end{cases}$.

Chacune de ces expressions fait intervenir un terme oscillant rapidement, à ω_0 dont l'amplitude est modulée, également de manière sinusoïdale mais beaucoup plus lentement, avec la pulsation $\alpha\omega_0/2$. C'est ce qu'on nomme un phénomène de *battements*. L'allure de cette fonction est représentée sur la figure ci-dessous, pour $\alpha=0,05$.





(c) L'énergie totale du système est la somme :

- de l'énergie cinétique de chacun des oscillateurs : $E_{ci}=m\dot{x}_i^2/2$,
- de l'énergie potentielle des trois ressorts : $k(x_1-l_0)^2/2+k(x_1-l_0)^2/2+k'(x_2-x_1-l_0)^2/2$.

La condition $\alpha\ll 1$ permet de faire quelques simplifications. Tout d'abord, on peut négliger l'énergie potentielle due au ressort de couplage. L'énergie potentielle totale se réécrit alors :
$$E_p=k(X_1+x_1^{eq}-l_0)^2/2+k(L-(X_2+x_2^{eq})-l_0)^2/2\simeq k(X_1^2+X_2^2)/2,$$
car les positions d'équilibre sont $x_1^{eq}=l_0$ et $x_2^{eq}=L-l_0$ pour $\alpha\to 0$.

La vitesse vaut quant à elle : $\dot{x_1}=-x_0\omega_0\left(\sin(\omega_0 t)\cos\frac{\alpha\omega_0 t}{2}+\frac{\alpha}{2}\cos(\omega_0 t)\sin\frac{\alpha\omega_0 t}{2}\right)$. On a donc :
$$Ec_1=\frac{m\omega_0^2x_0^2}{2}\left(\sin^2(\omega_0 t)\cos^2\left(\frac{\alpha\omega_0 t}{2}\right)+\alpha\sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t)\sin\left(\frac{\alpha\omega_0 t}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha\omega_0 t}{2}\right)\right)$$
$$+\frac{\alpha^2}{4}\sin^2\left(\frac{\alpha\omega_0 t}{2}\right)\cos^2(\omega_0 t)\bigg).$$

On peut ensuite prendre la moyenne de cette expression et de l'énergie potentielle sur une pseudo-période $T_0=2\pi/\omega_0$ pendant laquelle les termes oscillant à $\alpha\omega_0/2$ sont pratiquement constants. On obtient [i] alors :
$$<E_{c1}>_{T_0}(t)=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}E_{c1}(t')dt'=\frac{m\omega_0^2x_0^2}{2}\left(\frac{\cos^2(\alpha\omega_0 t/2)}{2}+\frac{\alpha^2\sin^2(\alpha\omega_0 t/2)}{8}\right)$$
$$<E_{p1}>_{T_0}(t)=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}E_{p1}(t')dt'=\frac{m\omega_0^2x_0^2}{2}\ \frac{\cos^2(\alpha\omega_0 t/2)}{2}$$
$$\to<E_{m1}>_{T_0}(t)=\frac{m\omega_0^2x_0^2}{2}\left(\cos^2(\alpha\omega_0 t/2)+\frac{\alpha^2\sin^2(\alpha\omega_0 t/2)}{8}\right)\simeq\frac{m\omega_0^2x_0^2}{2}\cos^2\left(\frac{\alpha\omega_0 t}{2}\right)$$
$$\text{et}<E_{m2}>_{T_0}(t)=\simeq\frac{m\omega_0^2x_0^2}{2}\sin^2(\alpha\omega_0 t/2)$$

L'énergie mécanique moyenne (par pseudo-période) de chaque oscillateur oscille donc à $2\alpha\omega_0/2=\alpha\omega_0$, elle se répartit successivement d'un oscillateur à l'autre. L'observation de la fréquence $\alpha\omega_0$ du battement de l'énergie donne accès à la différence des fréquences (proches) des deux oscillations qui le composent.

i. Les valeurs moyennes obtenues ici dépendent du temps car la fonction n'est que pseudo-périodique de période T_0 : il reste la dépendance lente en temps due aux termes en $\alpha\omega_0/2$.