

# Filtrage linéaire

Julien Cubizolles

Lycée Louis le Grand

jeudi 11 janvier 2018

- ▶ Tout signal (électrique, sonore...) peut être altéré, déformé lors de son émission, propagation, lecture.

- ▶ Tout signal (électrique, sonore...) peut être altéré, déformé lors de son émission, propagation, lecture.
- ▶ Pour les phénomènes linéaire il s'agit d'une modification d'amplitude et de phase de chacun des harmoniques, qui ne dépend que sa pulsation  $\omega$ , et pas de son amplitude.

- ▶ Tout signal (électrique, sonore...) peut être altéré, déformé lors de son émission, propagation, lecture.
- ▶ Pour les phénomènes linéaire il s'agit d'une modification d'amplitude et de phase de chacun des harmoniques, qui ne dépend que sa pulsation  $\omega$ , et pas de son amplitude.
- ▶ Le système physique réalise un **filtrage linéaire**, caractérisé par une **fonction de transfert**

- Filtrage recherché par construction ► Le réglage graves/aigus/ (karaoke?) d'un amplificateur de hifi correspond à une amplification sélective des fréquences basses ou élevées,
- Le **circuit d'accord** d'un poste de radio permet de sélectionner par filtrage un domaine de fréquence très étroit correspondant à une seule station émettrice sans être gêné par les autres stations.

- Défauts non contrôlés
- ▶ le son est différemment atténué au cours de la traversée d'un mur : les aigus sont filtrés.
  - ▶ un haut-parleur mécanique est incapable de reproduire fidèlement des sons très aigus, tout comme l'oreille est incapable de les percevoir.

1. Transformation d'un signal
2. Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire
3. Diagramme de Bode d'un filtre
4. Filtres du 1<sup>er</sup> ordre
5. Exemples de filtres du 2<sup>e</sup> ordre

## 1. Transformation d'un signal

### 1.1 Spectre

### 1.2 Filtrage par un quadripôle

## 2. Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire

## 3. Diagramme de Bode d'un filtre

## 4. Filtres du 1<sup>er</sup> ordre

## 5. Exemples de filtres du 2<sup>e</sup> ordre



# Décomposition de Fourier : rappels

- ▶ un signal  $s(t)$  périodique **quelconque** de pulsation  $\omega$  peut s'exprimer comme la somme de sinusôides de pulsations  $p\omega$ , avec  $p$  entier :

$$s(t) = \sum_{p=0}^{\infty} A_p \cos(p\omega t + \varphi_p)$$

# Décomposition de Fourier : rappels

- ▶ un signal  $s(t)$  périodique **quelconque** de pulsation  $\omega$  peut s'exprimer comme la somme de sinusoides de pulsations  $p\omega$ , avec  $p$  entier :

$$s(t) = \sum_{p=0}^{\infty} A_p \cos(p\omega t + \varphi_p)$$

- ▶ chaque **composante de Fourier/harmonique** est caractérisé par son amplitude  $A_p$  et sa phase  $\varphi_p$  (on a  $\varphi_0 = 0$  par convention)

# Décomposition de Fourier : rappels

- ▶ un signal  $s(t)$  périodique **quelconque** de pulsation  $\omega$  peut s'exprimer comme la somme de sinusoides de pulsations  $p\omega$ , avec  $p$  entier :

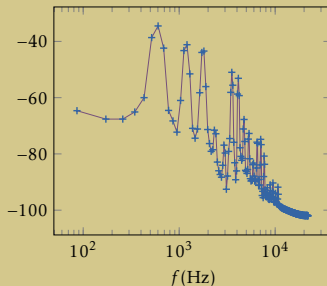
$$s(t) = \sum_{p=0}^{\infty} A_p \cos(p\omega t + \varphi_p)$$

- ▶ chaque **composante de Fourier/harmonique** est caractérisé par son amplitude  $A_p$  et sa phase  $\varphi_p$  (on a  $\varphi_0 = 0$  par convention)
- ▶  $A_0$  est la **composante continue** (stationnaire) du signal, ie sa valeur moyenne :

$$\langle s \rangle = A_0$$

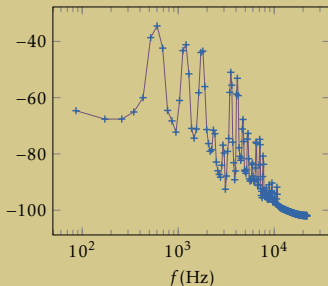
# Exemple

## Exemple (Spectre d'une corde de guitare)



# Exemple

## Exemple (Spectre d'une corde de guitare)



- ▶ Abscisse = fréquence, ordonnée = amplitude
- ▶ les pulsations vont de 0 (continu/stationnaire) à l'infini, les amplitudes  $A_p$  décroissent globalement quand  $p \rightarrow \infty$
- ▶ on obtient ce spectre avec un oscilloscope numérique ou un **analyseur de spectre**

# Égalité de Parseval

- ▶ la puissance associée à un signal  $s(t)$  est proportionnelle au carré de la valeur efficace de l'amplitude du signal :

# Égalité de Parseval

- ▶ la puissance associée à un signal  $s(t)$  est proportionnelle au carré de la valeur **efficace** de l'amplitude du signal :
  - ▶  $\langle \mathcal{P} \rangle = RI_{eff}^2 = GU_{eff}^2$

# Égalité de Parseval

- ▶ la puissance associée à un signal  $s(t)$  est proportionnelle au carré de la valeur efficace de l'amplitude du signal :
  - ▶  $\langle \mathcal{P} \rangle = RI_{eff}^2 = GU_{eff}^2$
  - ▶ idem en acoustique ou  $\mathcal{P}$  est proportionnelle au carré de la valeur efficace de la surpression



# Égalité de Parseval

- ▶ la puissance associée à un signal  $s(t)$  est proportionnelle au carré de la valeur efficace de l'amplitude du signal :
  - ▶  $\langle \mathcal{P} \rangle = RI_{eff}^2 = GU_{eff}^2$
  - ▶ idem en acoustique ou  $\mathcal{P}$  est proportionnelle au carré de la valeur efficace de la surpression
- ▶ on montre que :

# Égalité de Parseval

- ▶ la puissance associée à un signal  $s(t)$  est proportionnelle au carré de la valeur efficace de l'amplitude du signal :
  - ▶  $\langle \mathcal{P} \rangle = RI_{eff}^2 = GU_{eff}^2$
  - ▶ idem en acoustique ou  $\mathcal{P}$  est proportionnelle au carré de la valeur efficace de la surpression
- ▶ on montre que :

## Théorème (de Parseval)

*Le carré de la valeur efficace d'un signal  $s(t)$  périodique est la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques :*

$$s_{eff}^2 = A_0^2 + \sum_{p=1}^{\infty} A_{p,eff}^2 = A_0^2 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p^2}{2}$$

# Égalité de Parseval

- ▶ la puissance associée à un signal  $s(t)$  est proportionnelle au carré de la valeur efficace de l'amplitude du signal :
  - ▶  $\langle \mathcal{P} \rangle = RI_{eff}^2 = GU_{eff}^2$
  - ▶ idem en acoustique ou  $\mathcal{P}$  est proportionnelle au carré de la valeur efficace de la surpression
- ▶ on montre que :

## Théorème (de Parseval)

*Le carré de la valeur efficace d'un signal  $s(t)$  périodique est la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques :*

$$s_{eff}^2 = A_0^2 + \sum_{p=1}^{\infty} A_{p,eff}^2 = A_0^2 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p^2}{2}$$

# Égalité de Parseval

- ▶ la puissance associée à un signal  $s(t)$  est proportionnelle au carré de la valeur efficace de l'amplitude du signal :
  - ▶  $\langle \mathcal{P} \rangle = RI_{eff}^2 = GU_{eff}^2$
  - ▶ idem en acoustique ou  $\mathcal{P}$  est proportionnelle au carré de la valeur efficace de la surpression
- ▶ on montre que :

## Théorème (de Parseval)

*Le carré de la valeur efficace d'un signal  $s(t)$  périodique est la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques :*

$$s_{eff}^2 = A_0^2 + \sum_{p=1}^{\infty} A_{p,eff}^2 = A_0^2 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p^2}{2}$$

- la phase  $\varphi_p$  n'intervient pas
- ▶ la puissance d'un signal est donc la somme des puissances de chacun de ses harmoniques

## 1. Transformation d'un signal

### 1.1 Spectre

### 1.2 Filtrage par un quadripôle

## 2. Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire

## 3. Diagramme de Bode d'un filtre

## 4. Filtres du 1<sup>er</sup> ordre

## 5. Exemples de filtres du 2<sup>e</sup> ordre

On étudie des composants modifiant :

- ▶ l'amplitude
- ▶ la phase

des harmoniques pour **filtrer** le signal

# Régimes établis

On travaillera uniquement en régimes établis :

Régime stationnaire  $U = cste, I = cste$

Régime sinusoïdal établi  $\underline{U_m} = \underline{cste}, \underline{I_m} = \underline{cste}$

# Schéma électronique d'un quadripôle

- ▶ le plus souvent :  $i_A = -i_B$ , ( $i_C = -i_D$ )



# Schéma électronique d'un quadripôle

- ▶ le plus souvent :  $i_A = -i_B$ , ( $i_C = -i_D$ )
- ▶ on distingue une entrée ( $u_e, i_e$ ) et une sortie  $u_s, i_s$

# Schéma électronique d'un quadripôle

- ▶ le plus souvent :  $i_A = -i_B$ , ( $i_C = -i_D$ )
- ▶ on distingue une entrée ( $u_e, i_e$ ) et une sortie  $u_s, i_s$

# Schéma électronique d'un quadripôle

en régime établi :

## Définition (Quadripôle linéaire)

Un quadripôle est dit **linéaire** si les tensions d'entrée  $\underline{U}_{em}$  et de sortie  $\underline{U}_{sm}$  s'expriment comme des combinaisons linéaires des intensités des courants d'entrée  $\underline{I}_{em}$  et de sortie  $\underline{I}_{sm}$ .

Un dipôle :

**actif** branché en entrée est **une source**,  
**passif** branché en sortie est **une charge**.

# Impédances d'entrée et de sortie

pour les cas qu'on rencontrera, on pourra modéliser :

- ▶ son entrée comme une impédance, dite d'**entrée**
- ▶ sa sortie comme un générateur linéaire à source commandée, d'impédance interne dite **de sortie**

# Impédances d'entrée et de sortie

pour les cas qu'on rencontrera, on pourra modéliser :

- ▶ son entrée comme une impédance, dite d'**entrée**
- ▶ sa sortie comme un générateur linéaire à source commandée, d'impédance interne dite **de sortie**

$$\underline{Z_e} = \frac{\underline{U_{em}}}{\underline{I_{em}}} \quad \underline{U_{sm}} = \underline{E_s} - \underline{Z_s} \underline{I_{sm}}$$

# Opérateurs idéaux

## Définition (Opérateurs idéaux)

Dans les quadripôles fondamentaux, le signal de sortie est **proportionnel** au signal d'entrée. L'opérateur est dit **idéal** si :

- ▶ le signal fourni par la source branchée en entrée **n'est pas perturbé par le quadripôle**,
- ▶ le signal de sortie est **indépendant** des caractéristiques de la charge branchée en sortie.

# Amplificateurs et convertisseurs idéaux

## Définition (Amplificateurs et convertisseurs idéaux)

On distingue :

Amplificateur idéal de tension  $\underline{U_{sm}} = k\underline{U_{em}} : \underline{Y_e} = 0 ; \underline{Z_s} = 0,$

Convertisseur idéal tension  $\rightarrow$  courant  $\underline{I_{sm}} = l\underline{U_{em}} : \underline{Y_e} = 0 ; \underline{Y_s} = 0,$

Convertisseur idéal courant  $\rightarrow$  tension  $\underline{U_{sm}} = \frac{1}{l}\underline{I_{em}} : \underline{Z_e} = 0 ; \underline{Z_s} = 0,$

Amplificateur idéal de courant  $\underline{I_{sm}} = k\underline{I_{em}} : \underline{Z_e} = 0 ; \underline{Y_s} = 0.$

# Amplificateurs et convertisseurs idéaux

## Définition (Amplificateurs et convertisseurs idéaux)

On distingue :

Amplificateur idéal de tension  $\underline{U_{sm}} = k\underline{U_{em}} : \underline{Y_e} = 0 ; \underline{Z_s} = 0,$

Convertisseur idéal tension  $\rightarrow$  courant  $\underline{I_{sm}} = l\underline{U_{em}} : \underline{Y_e} = 0 ; \underline{Y_s} = 0,$

Convertisseur idéal courant  $\rightarrow$  tension  $\underline{U_{sm}} = \frac{1}{l}\underline{I_{em}} : \underline{Z_e} = 0 ; \underline{Z_s} = 0,$

Amplificateur idéal de courant  $\underline{I_{sm}} = k\underline{I_{em}} : \underline{Z_e} = 0 ; \underline{Y_s} = 0.$

- la constante de proportionnalité peut être complexe, traduisant un déphasage entre l'entrée et la sortie



# Amplificateurs et convertisseurs idéaux

## Définition (Amplificateurs et convertisseurs idéaux)

On distingue :

Amplificateur idéal de tension  $\underline{U_{sm}} = k\underline{U_{em}} : \underline{Y_e} = 0 ; \underline{Z_s} = 0,$

Convertisseur idéal tension  $\rightarrow$  courant  $\underline{I_{sm}} = l\underline{U_{em}} : \underline{Y_e} = 0 ; \underline{Y_s} = 0,$

Convertisseur idéal courant  $\rightarrow$  tension  $\underline{U_{sm}} = \frac{1}{l}\underline{I_{em}} : \underline{Z_e} = 0 ; \underline{Z_s} = 0,$

Amplificateur idéal de courant  $\underline{I_{sm}} = k\underline{I_{em}} : \underline{Z_e} = 0 ; \underline{Y_s} = 0.$

- ▶ la puissance est toujours nulle en entrée ( $\underline{U_{em}} = 0$  ou  $\underline{I_{em}} = 0$ )
- ▶ la puissance en sortie est arbitrairement grande ( $\underline{U_{sm}}$  indépendant de  $\underline{Y_s}$  par exemple)
- ▶ il y a un gain en énergie (infini !) : il faut nécessairement être branché sur une alimentation qui fournit l'énergie

# Quadripôle suiveur

## Définition (Quadripôle suiveur)

Un **quadripôle suiveur** est un amplificateur idéal réalisant  $\underline{U}_{sm} = \underline{U}_{em}$  :

- ▶ en prélevant un courant nul de la source,
- ▶ en pouvant fournir un courant arbitrairement grand à la charge.

# Quadripôle suiveur

## Définition (Quadripôle suiveur)

Un **quadripôle suiveur** est un amplificateur idéal réalisant  $\underline{U}_{sm} = \underline{U}_{em}$  :

- ▶ en prélevant un courant nul de la source,
  - ▶ en pouvant fournir un courant arbitrairement grand à la charge.
- 
- ▶ c'est un cas particulier d'ampli de tension avec  $\underline{k} = 1$
  - ▶ réalisé par un composant **actif** (montage à amplificateur opérationnel)
  - ▶ utilisé par exemple pour corriger les défauts de quadripôles plus intéressants

1. Transformation d'un signal
2. Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire
3. Diagramme de Bode d'un filtre
4. Filtres du 1<sup>er</sup> ordre
5. Exemples de filtres du 2<sup>e</sup> ordre

## 1. Transformation d'un signal

## 2. Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire

### 2.1 Définition

### 2.2 Lien avec l'équation différentielle

### 2.3 Exercice : le circuit RLC série vu comme un filtre

## 3. Diagramme de Bode d'un filtre

## 4. Filtres du 1<sup>er</sup> ordre

## 5. Exemples de filtres du 2<sup>e</sup> ordre

# Fonction de transfert

## Définition (Fonction de transfert)

On définit la **fonction de transfert** d'un quadripôle linéaire couplant une grandeur  $X_e$  d'entrée à une grandeur de sortie  $X_s$  en RSE à la pulsation  $\omega$  le quotient :  $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{X}_{sm}}{\underline{X}_{em}}$ .

# Fonction de transfert

dans toute la suite, amplificateur de tension par défaut

# Théorème de superposition

- ▶ on étudie la sortie en fonction de l'entrée en RSE
- ▶ le théorème de superposition assure que pour une entrée en régime périodique **quelconque**, la sortie sera la somme des sorties correspondant à chacun des harmoniques séparément



# Fraction rationnelle

La fonction de transfert d'un quadripôle linéaire couplant  $X_e$  à  $X_s$  est une fraction rationnelle en  $j\omega$  :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{X_{sm}}}{\underline{X_{em}}} = \frac{\sum_{p=0}^{n_e} \alpha_p (j\omega)^p}{\sum_{p'=0}^{n_s} \alpha'_{p'} (j\omega)^{p'}}.$$

On nomme **ordre du quadripôle**  $\underline{H}$  le maximum de  $(n_e, n_s)$

# Fraction rationnelle

La fonction de transfert d'un quadripôle linéaire couplant  $X_e$  à  $X_s$  est une fraction rationnelle en  $j\omega$  :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{X_{sm}}}{\underline{X_{em}}} = \frac{\sum_{p=0}^{n_e} \alpha_p (j\omega)^p}{\sum_{p'=0}^{n_s} \alpha'_{p'} (j\omega)^{p'}}.$$

On nomme **ordre du quadripôle**  $\underline{H}$  le maximum de  $(n_e, n_s)$

- la réponse (sortie/entrée) ne dépend que de  $\omega$ , pas de l'amplitude de l'entrée

# Fraction rationnelle

La fonction de transfert d'un quadripôle linéaire couplant  $X_e$  à  $X_s$  est une fraction rationnelle en  $j\omega$  :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{X_{sm}}}{\underline{X_{em}}} = \frac{\sum_{p=0}^{n_e} \alpha_p (j\omega)^p}{\sum_{p'=0}^{n_s} \alpha'_{p'} (j\omega)^{p'}}.$$

On nomme **ordre du quadripôle**  $\underline{H}$  le maximum de  $(n_e, n_s)$

- ▶ la réponse (sortie/entrée) ne dépend que de  $\omega$ , pas de l'amplitude de l'entrée
- ▶ stable à haute fréquence pour  $n_s \geq n_e$

# Fraction rationnelle

La fonction de transfert d'un quadripôle linéaire couplant  $X_e$  à  $X_s$  est une fraction rationnelle en  $j\omega$  :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{X_{sm}}}{\underline{X_{em}}} = \frac{\sum_{p=0}^{n_e} \alpha_p (j\omega)^p}{\sum_{p'=0}^{n_s} \alpha'_{p'} (j\omega)^{p'}}.$$

On nomme **ordre du quadripôle**  $\underline{H}$  le maximum de  $(n_e, n_s)$

- ▶ la réponse (sortie/entrée) ne dépend que de  $\omega$ , pas de l'amplitude de l'entrée
- ▶ stable à haute fréquence pour  $n_s \geq n_e$
- ▶ stable à basse fréquence pour  $\alpha'_0 \neq 0$

1. Transformation d'un signal
2. Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire
  - 2.1 Définition
  - 2.2 Lien avec l'équation différentielle
  - 2.3 Exercice : le circuit RLC série vu comme un filtre
3. Diagramme de Bode d'un filtre
4. Filtres du 1<sup>er</sup> ordre
5. Exemples de filtres du 2<sup>e</sup> ordre

# Technique

Lien entre le **comportement fréquentiel** (fonction de transfert) et **temporel** (équation différentielle)

- Fonction de transfert facile à établir à l'aide des impédances complexes :

$$\frac{\underline{X}_{sm}}{\underline{X}_{em}} = \frac{\sum_{p=0}^{n_e} \alpha_p (j\omega)^p}{\sum_{p'=0}^{n_s} \alpha'_{p'} (j\omega)^{p'}} = \underline{H}(j\omega)$$

# Technique

Lien entre le **comportement fréquentiel** (fonction de transfert) et **temporel** (équation différentielle)

- Fonction de transfert facile à établir à l'aide des impédances complexes :

$$\frac{\underline{X}_{sm}}{\underline{X}_{em}} = \frac{\sum_{p=0}^{n_e} \alpha_p (j\omega)^p}{\sum_{p'=0}^{n_s} \alpha'_{p'} (j\omega)^{p'}} = \underline{H}(j\omega)$$

- On retrouvera l'équation différentielle en remplaçant  $(j\omega)^n$  par  $\frac{d^n}{dt^n}$  :

$$\sum_{p=0}^{n_e} \alpha_p \frac{d^p x_e}{dt^p} = \sum_{p'=0}^{n_s} \alpha'_{p'} \frac{d^{p'} x_s}{dt^{p'}}$$

# Technique

Lien entre le **comportement fréquentiel** (fonction de transfert) et **temporel** (équation différentielle)

- Fonction de transfert facile à établir à l'aide des impédances complexes :

$$\frac{\underline{X}_{sm}}{\underline{X}_{em}} = \frac{\sum_{p=0}^{n_e} \alpha_p (j\omega)^p}{\sum_{p'=0}^{n_s} \alpha'_{p'} (j\omega)^{p'}} = \underline{H}(j\omega)$$

- On retrouvera l'équation différentielle en remplaçant  $(j\omega)^n$  par  $\frac{d^n}{dt^n}$  :

$$\sum_{p=0}^{n_e} \alpha_p \frac{d^p x_e}{dt^p} = \sum_{p'=0}^{n_s} \alpha'_{p'} \frac{d^{p'} x_s}{dt^{p'}}$$



# Technique

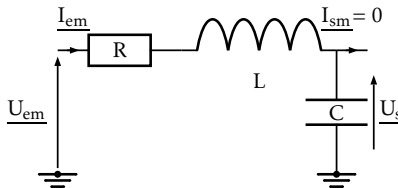
- ▶ rigoureusement valable si on recherche des solutions périodiques
- ▶ « marche » également pour des solutions non-périodiques (régime libre) si on n'a pas fait de simplifications de la forme :

$$\underline{H} = \frac{1 + j\omega/\omega_0}{1 + j\omega/\omega_0} \underline{F} = \underline{F}$$

1. Transformation d'un signal
2. Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire
  - 2.1 Définition
  - 2.2 Lien avec l'équation différentielle
  - 2.3 Exercice : le circuit RLC série vu comme un filtre
3. Diagramme de Bode d'un filtre
4. Filtres du 1<sup>er</sup> ordre
5. Exemples de filtres du 2<sup>e</sup> ordre

## Exercice : le circuit RLC série vu comme un filtre

On réalise un amplificateur de tension à l'aide d'un circuit RLC série comme représenté ci-contre dans lequel par exemple  $\underline{U}_{em}$  représente l'amplitude complexe de la tension d'entrée en régime sinusoïdal permanent.



- 1
  - a Quel intérêt présente l'utilisation en **sortie ouverte**, ie  $\underline{I}_{sm} = 0$  ?
  - b L'entrée du quadripôle est-elle idéale ?
- 2 Déterminer l'expression de la fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_{sm}}{\underline{U}_{em}}$ . On utilisera la pulsation propre  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et le facteur de qualité  $Q$  vérifiant  $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$ .
- 3 En déduire l'équation différentielle liant  $u_s(t)$  à  $u_e(t)$ .

# Correction

En sortie ouverte : diviseur de tension :

$$\frac{U_{c_m}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} U_{e_m} \rightarrow \frac{U_{s_m}}{U_{e_m}} = \frac{1}{1 + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2 + \frac{j\omega}{\omega_0 Q}}$$
$$\rightarrow u_e(t) = u_s + \frac{1}{\omega_0 Q} \frac{du_s}{dt} + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 u_s}{dt^2}$$

1. Transformation d'un signal
2. Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire
3. Diagramme de Bode d'un filtre
4. Filtres du 1<sup>er</sup> ordre
5. Exemples de filtres du 2<sup>e</sup> ordre

1. Transformation d'un signal
2. Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire
3. Diagramme de Bode d'un filtre
  - 3.1 Fonctions d'un filtre
  - 3.2 Représentation
4. Filtres du 1<sup>er</sup> ordre
5. Exemples de filtres du 2<sup>e</sup> ordre

# Fonctions d'un filtre

## Définition (Filtrage d'un signal, bandes passante et coupée)

Un quadripôle linéaire de fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega)$  réalise un **filtrage** du signal d'entrée :

en l'**amplifiant** pour  $|\underline{H}(j\omega)| > 1$ ,

en l'**atténuant** pour  $|\underline{H}(j\omega)| < 1$ ,

en le **déphasant** pour  $\arg(\underline{H}(j\omega)) \neq 0[2\pi]$

en fonction de sa pulsation  $\omega$ , indépendamment de son amplitude.

On nomme :

**Bande passante** le domaine de pulsations que le filtre doit transmettre,

**Bande coupée** le domaine de pulsations que le filtre doit éliminer (le reste).

# Fonctions d'un filtre

## Définition (Filtrage d'un signal, bandes passante et coupée)

Un quadripôle linéaire de fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega)$  réalise un **filtrage** du signal d'entrée :

en l'**amplifiant** pour  $|\underline{H}(j\omega)| > 1$ ,

en l'**atténuant** pour  $|\underline{H}(j\omega)| < 1$ ,

en le **déphasant** pour  $\arg(\underline{H}(j\omega)) \neq 0[2\pi]$

en fonction de sa pulsation  $\omega$ , indépendamment de son amplitude.

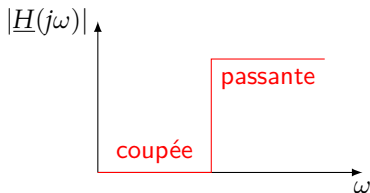
On nomme :

**Bande passante** le domaine de pulsations que le filtre doit transmettre,

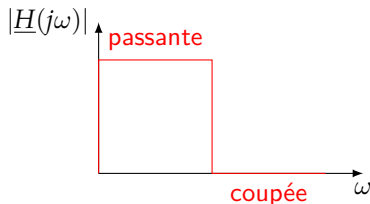
**Bande coupée** le domaine de pulsations que le filtre doit éliminer (le reste).

le spectre de la sortie est alors différent du spectre en entrée

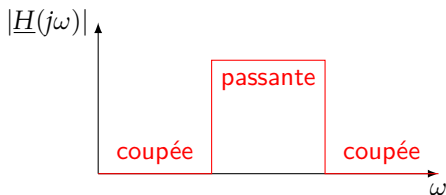




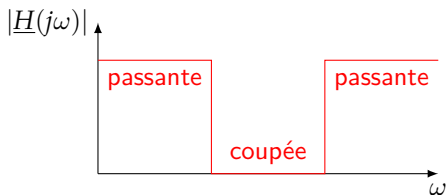
Filtre passe-haut



Filtre passe-bas

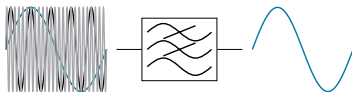


Filtre passe-bande

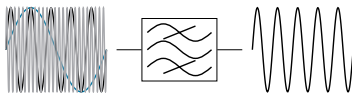


Filtre coupe (réjecteur de) bande

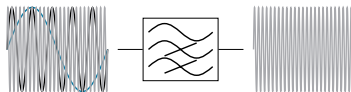
# Filtres idéaux



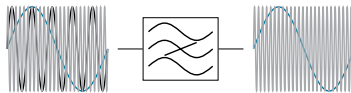
Passes bas : les moyennes et hautes fréquences sont coupées



Passes bande : seules les moyennes fréquences passent



Passes haut : les moyennes et basses fréquences sont coupées



Coupe bande : seules les moyennes fréquences sont coupées

1. Transformation d'un signal
2. Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire
3. Diagramme de Bode d'un filtre
  - 3.1 Fonctions d'un filtre
  - 3.2 Représentation
4. Filtres du 1<sup>er</sup> ordre
5. Exemples de filtres du 2<sup>e</sup> ordre

# Éléments

## Définition (Gain)

On nomme **gain**, noté  $H$ , d'un filtre le module de sa fonction de transfert :  $H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$ . Le **gain en décibel**, noté  $G_{dB}$  est défini par  $G_{dB} = 20 \log H$ .

# Éléments

## Définition (Gain)

On nomme **gain**, noté  $H$ , d'un filtre le module de sa fonction de transfert :  $H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$ . Le **gain en décibel**, noté  $G_{dB}$  est défini par  $G_{dB} = 20 \log H$ .

- Origine du dB : unité de rapport de puissance. Pour des tensions efficaces  $\underline{U}_{e(eff)}$  et  $\underline{U}_{s(eff)}$  branchées sur le même dipôle de conductance  $g$ , les puissances actives reçues par le dipôle sont

$$P_e = gU_{e(eff)}^2 \text{ et } P_s = gU_{s(eff)}^2, \text{ de rapport } P_s/P_e = \left( \frac{U_{s(eff)}}{U_{e(eff)}} \right)^2.$$

# Éléments

## Définition (Gain)

On nomme **gain**, noté  $H$ , d'un filtre le module de sa fonction de transfert :  $H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$ . Le **gain en décibel**, noté  $G_{dB}$  est défini par  $G_{dB} = 20 \log H$ .

- ▶ Origine du dB : unité de rapport de puissance. Pour des tensions efficaces  $\underline{U}_{e(eff)}$  et  $\underline{U}_{s(eff)}$  branchées sur le même dipôle de conductance  $g$ , les puissances actives reçues par le dipôle sont  $P_e = gU_{e(eff)}^2$  et  $P_s = gU_{s(eff)}^2$ , de rapport  $P_s/P_e = \left(\frac{U_{s(eff)}}{U_{e(eff)}}\right)^2$ .
- ▶ Gain en Bel en puissance  $\log P_s/P_e$ , gain en décibel  $10 \log P_s/P_e = 20 \log \frac{U_{s(eff)}}{U_{e(eff)}} = G_{dB}$  en tension.

# Éléments

## Définition (Gain)

On nomme **gain**, noté  $H$ , d'un filtre le module de sa fonction de transfert :  $H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$ . Le **gain en décibel**, noté  $G_{dB}$  est défini par  $G_{dB} = 20 \log H$ .

- ▶ Origine du dB : unité de rapport de puissance. Pour des tensions efficaces  $\underline{U}_{e(eff)}$  et  $\underline{U}_{s(eff)}$  branchées sur le même dipôle de conductance  $g$ , les puissances actives reçues par le dipôle sont  $P_e = gU_{e(eff)}^2$  et  $P_s = gU_{s(eff)}^2$ , de rapport  $P_s/P_e = \left(\frac{U_{s(eff)}}{U_{e(eff)}}\right)^2$ .
- ▶ Gain en Bel en puissance  $\log P_s/P_e$ , gain en décibel  $10 \log P_s/P_e = 20 \log \frac{U_{s(eff)}}{U_{e(eff)}} = G_{dB}$  en tension.
- ▶ Intérêt : oreille et œil ont des sensibilité logarithmiques, et les lois de puissance donnent des droites en échelle logarithmique (cf. cinétique chimique)

# Diagramme de Bode<sup>1</sup>

## Définition (Diagramme de Bode)

Le **diagramme de Bode** d'un quadripôle est constitué :

- ▶ de la représentation de son gain en décibel,
- ▶ de l'argument de sa fonction de transfert,

en fonction de  $\log \omega / \omega_c$ , où  $\omega_c$  est une pulsation caractéristique du filtre.

1. H.W. Bode (1905–1982), ingénieur et chercheur américain.



# Diagramme de Bode<sup>1</sup>

## Définition (Diagramme de Bode)

Le **diagramme de Bode** d'un quadripôle est constitué :

- ▶ de la représentation de son gain en décibel,
- ▶ de l'argument de sa fonction de transfert,

en fonction de  $\log \omega / \omega_c$ , où  $\omega_c$  est une pulsation caractéristique du filtre.

## Définition (Octave et décade)

Une **décade** est un intervalle de fréquence  $[\omega_1 ; \omega_2]$ , avec  $\omega_2 = 10 \omega_1$ , soit  $\log \frac{\omega_2}{\omega_c} = \log \frac{\omega_1}{\omega_c} + 1$ .

Une **octave** est un intervalle de fréquence  $[\omega_1 ; \omega_2]$ , avec  $\omega_2 = 2 \omega_1$ , soit  $\log \frac{\omega_2}{\omega_c} \simeq \log \frac{\omega_1}{\omega_c} + 0,3$ .

1. H.W. Bode (1905–1982), ingénieur et chercheur américain.

# Diagramme de Bode asymptotique

- ▶ on déterminera des équivalents de  $\underline{H}(j\omega)$  dans les régimes limites  $\omega \rightarrow \infty$  et  $\omega \rightarrow 0$  à l'aide des équivalents des condensateurs et bobines

# Diagramme de Bode asymptotique

- ▶ on déterminera des équivalents de  $\underline{H}(j\omega)$  dans les régimes limites  $\omega \rightarrow \infty$  et  $\omega \rightarrow 0$  à l'aide des équivalents des condensateurs et bobines
- ▶ on obtiendra des segments de pente  $k \times 20\text{dB}$  par décade ( $k \in \mathbb{Z}$ )

# Diagramme de Bode asymptotique

- ▶ on déterminera des équivalents de  $\underline{H}(j\omega)$  dans les régimes limites  $\omega \rightarrow \infty$  et  $\omega \rightarrow 0$  à l'aide des équivalents des condensateurs et bobines
- ▶ on obtiendra des segments de pente  $k \times 20\text{dB}$  par décade ( $k \in \mathbb{Z}$ )

# Diagramme de Bode asymptotique

- ▶ on déterminera des équivalents de  $\underline{H}(j\omega)$  dans les régimes limites  $\omega \rightarrow \infty$  et  $\omega \rightarrow 0$  à l'aide des équivalents des condensateurs et bobines
- ▶ on obtiendra des segments de pente  $k \times 20\text{dB}$  par décade ( $k \in \mathbb{Z}$ )

# Pulsation de coupure

pour un filtre réel, le gain en bande coupée n'est jamais strictement nul

# Pulsation de coupure

pour un filtre réel, le gain en bande coupée n'est jamais strictement nul

## Définition (Pulsation de coupure)

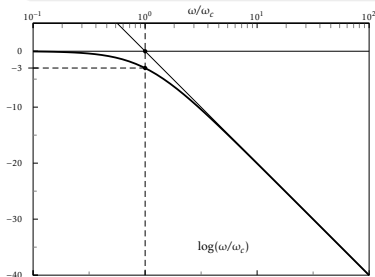
On nomme **pulsation de coupure à  $-3dB$**  une pulsation  $\omega_c$  à la frontière entre une bande passante et une bande coupée d'un filtre au-delà de laquelle le gain  $G_{dB}$  en décibel est inférieur à  $G_{dB0} - 20 \log \sqrt{2} \simeq G_{dB0} - 3$ , avec  $G_{dB0}$  le gain en décibel en bande passante dans le diagramme asymptotique.

# Pulsation de coupure

pour un filtre réel, le gain en bande coupée n'est jamais strictement nul

## Définition (Pulsation de coupure)

On nomme **pulsation de coupure à  $-3dB$**  une pulsation  $\omega_c$  à la frontière entre une bande passante et une bande coupée d'un filtre au-delà de laquelle le gain  $G_{dB}$  en décibel est inférieur à  $G_{dB0} - 20 \log \sqrt{2} \simeq G_{dB0} - 3$ , avec  $G_{dB0}$  le gain en décibel en bande passante dans le diagramme asymptotique.



- ▶  $G_{dB0} \rightarrow G_{dB0} - 20 \log \sqrt{2}$   
correspond à diviser **exactement** la puissance par 2
- ▶  $G_{dB0} - 3$  est une **approximation**



1. Transformation d'un signal
2. Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire
3. Diagramme de Bode d'un filtre
4. Filtres du 1<sup>er</sup> ordre
5. Exemples de filtres du 2<sup>e</sup> ordre

1. Transformation d'un signal
2. Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire
3. Diagramme de Bode d'un filtre
4. Filtres du 1<sup>er</sup> ordre
  - 4.1 Filtre passe-bas
  - 4.2 Exemple d'utilisation du diagramme de Bode
  - 4.3 Filtre passe-haut
5. Exemples de filtres du 2<sup>e</sup> ordre

# Exemple d'un passe-bas passif

On veut :

►  $u_s = u_e$  pour  $\omega \ll \omega_c$  et  $u_s \ll u_e$  pour  $\omega \gg \omega_c$

## Exemple d'un passe-bas passif

On veut :

- ▶  $u_s = u_e$  pour  $\omega \ll \omega_c$  et  $u_s \ll u_e$  pour  $\omega \gg \omega_c$
- ▶ on cherche à réaliser des court-circuits et des interrupteurs ouverts dans ces deux limites

## Exemple d'un passe-bas passif

On veut :

- ▶  $u_s = u_e$  pour  $\omega \ll \omega_c$  et  $u_s \ll u_e$  pour  $\omega \gg \omega_c$
- ▶ on cherche à réaliser des court-circuits et des interrupteurs ouverts dans ces deux limites
- ▶ on se place en sortie ouverte

## Exemple d'un passe-bas passif

On veut :

- ▶  $u_s = u_e$  pour  $\omega \ll \omega_c$  et  $u_s \ll u_e$  pour  $\omega \gg \omega_c$
- ▶ on cherche à réaliser des court-circuits et des interrupteurs ouverts dans ces deux limites
- ▶ on se place en sortie ouverte
- ▶ fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

# Modèle

## Définition (Passe-bas du 1<sup>er</sup> ordre)

Un filtre est un **passe-bas du 1<sup>er</sup> ordre** si sa fonction de transfert est de la forme :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}},$$

avec  $H_0$  réel et  $\omega_c$  réel positif.

# Modèle

## Définition (Passe-bas du 1<sup>er</sup> ordre)

Un filtre est un **passe-bas du 1<sup>er</sup> ordre** si sa fonction de transfert est de la forme :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}},$$

avec  $H_0$  réel et  $\omega_c$  réel positif.

Dans le cas du RC précédent :  $H_0 = 1$  et  $\omega_c = 1/(RC)$



# Diagramme de Bode

- ▶  $\underline{H}(j\omega) \rightarrow H_0$  pour  $\omega \ll 1/RC$  :  $G_{dB0} \simeq 20 \log H_0$  et  $\varphi = 0$

# Diagramme de Bode

- ▶  $\underline{H}(j\omega) \rightarrow H_0$  pour  $\omega \ll 1/RC$  :  $G_{dB0} \simeq 20 \log H_0$  et  $\varphi = 0$
- ▶  $\underline{H}(j\omega) \rightarrow -j \frac{\omega_c H_0}{\omega}$  pour  $\omega \gg \omega_c$  :  $G_{dB} = 20 \log H_0 - 20 \log \frac{\omega}{\omega_c}$  et  $\varphi \rightarrow -\pi/2$

# Diagramme de Bode

- ▶  $\underline{H}(j\omega) \rightarrow H_0$  pour  $\omega \ll 1/RC$  :  $G_{dB0} \simeq 20 \log H_0$  et  $\varphi = 0$
- ▶  $\underline{H}(j\omega) \rightarrow -j \frac{\omega_c H_0}{\omega}$  pour  $\omega \gg \omega_c$  :  $G_{dB} = 20 \log H_0 - 20 \log \frac{\omega}{\omega_c}$  et  $\varphi \rightarrow -\pi/2$
- ▶  $H = H_0/\sqrt{2}$  pour  $\omega = \omega_c$  où  $\varphi = -\pi/4$  qui est donc la pulsation de coupure

# Diagramme de Bode

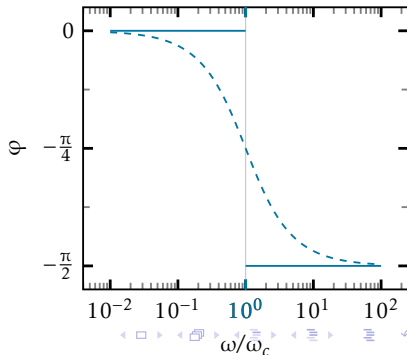
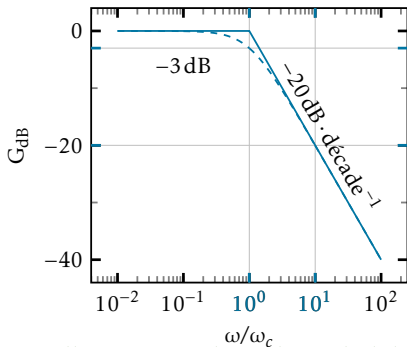
- ▶  $\underline{H}(j\omega) \rightarrow H_0$  pour  $\omega \ll 1/RC$  :  $G_{dB0} \simeq 20 \log H_0$  et  $\varphi = 0$
- ▶  $\underline{H}(j\omega) \rightarrow -j \frac{\omega_c H_0}{\omega}$  pour  $\omega \gg \omega_c$  :  $G_{dB} = 20 \log H_0 - 20 \log \frac{\omega}{\omega_c}$  et  $\varphi \rightarrow -\pi/2$
- ▶  $H = H_0/\sqrt{2}$  pour  $\omega = \omega_c$  où  $\varphi = -\pi/4$  qui est donc la pulsation de coupure
- ▶  $G_{dB}$  est toujours en dessous de ses asymptotes

# Diagramme de Bode

- ▶  $\underline{H}(j\omega) \rightarrow H_0$  pour  $\omega \ll 1/RC$  :  $G_{dB0} \simeq 20 \log H_0$  et  $\varphi = 0$
- ▶  $\underline{H}(j\omega) \rightarrow -j \frac{\omega_c H_0}{\omega}$  pour  $\omega \gg \omega_c$  :  $G_{dB} = 20 \log H_0 - 20 \log \frac{\omega}{\omega_c}$  et  $\varphi \rightarrow -\pi/2$
- ▶  $H = H_0/\sqrt{2}$  pour  $\omega = \omega_c$  où  $\varphi = -\pi/4$  qui est donc la pulsation de coupure
- ▶  $G_{dB}$  est toujours en dessous de ses asymptotes

# Diagramme de Bode

- ▶  $\underline{H}(j\omega) \rightarrow H_0$  pour  $\omega \ll 1/RC$  :  $G_{dB0} \simeq 20 \log H_0$  et  $\varphi = 0$
- ▶  $\underline{H}(j\omega) \rightarrow -j \frac{\omega_c H_0}{\omega}$  pour  $\omega \gg \omega_c$  :  $G_{dB} = 20 \log H_0 - 20 \log \frac{\omega}{\omega_c}$  et  $\varphi \rightarrow -\pi/2$
- ▶  $H = H_0/\sqrt{2}$  pour  $\omega = \omega_c$  où  $\varphi = -\pi/4$  qui est donc la pulsation de coupure
- ▶  $G_{dB}$  est toujours en dessous de ses asymptotes



1. Transformation d'un signal
2. Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire
3. Diagramme de Bode d'un filtre
- 4. Filtres du 1<sup>er</sup> ordre**
  - 4.1 Filtre passe-bas
  - 4.2 Exemple d'utilisation du diagramme de Bode**
  - 4.3 Filtre passe-haut
5. Exemples de filtres du 2<sup>e</sup> ordre

- ▶ passe-bas d'ordre 1 et de pulsation de coupure  $\omega_c$
- ▶ exemple : entrée

$$u_e(t) = E_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + E_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + E_3 \cos(\omega_3 t + \varphi_3)$$

avec  $\omega_1/\omega_c = 1/100$ ,  $\omega_2 = \omega_c$ ,  $\omega_3 = 100\omega_c$

- ▶ on « superpose » le spectre et le diagramme de Bode
- ▶ sortie :

$$u_s(t) \simeq E_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{E_2}{\sqrt{2}} \cos(\omega_2 t + \varphi_2 - \pi/4)$$



# Caractère intégrateur

## Définition (Circuit intégrateur idéal)

La fonction de transfert d'un filtre intégrateur idéal est :  $\underline{H} = H_0 \frac{\omega_c}{j\omega}$  avec  $H_0$  réel et  $\omega_c$  réel positif. Les variations de sa tension de sortie,  $s(t)$ , sont proportionnelles à l'intégrale de sa tension d'entrée  $e(t)$  :

$$s(t) - s(t_0) \propto \int_{t_0}^t e(t) dt.$$

# Caractère intégrateur

## Définition (Circuit intégrateur idéal)

La fonction de transfert d'un filtre intégrateur idéal est :  $\underline{H} = H_0 \frac{\omega_c}{j\omega}$  avec  $H_0$  réel et  $\omega_c$  réel positif. Les variations de sa tension de sortie,  $s(t)$ , sont proportionnelles à l'intégrale de sa tension d'entrée  $e(t)$  :

$$s(t) - s(t_0) \propto \int_{t_0}^t e(t) dt.$$

défaut : diverge à basse fréquence !

# Caractère pseudo-intégrateur

passé-bas du 1<sup>er</sup> ordre :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

- ▶  $\underline{H}(j\omega) \simeq 1$  pour  $\omega RC \ll 1$  : plus de divergence

# Caractère pseudo-intégrateur

passé-bas du 1<sup>er</sup> ordre :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

- ▶  $\underline{H}(j\omega) \simeq 1$  pour  $\omega RC \ll 1$  : plus de divergence
- ▶  $\underline{H}(j\omega)$  d'un intégrateur pour  $\omega RC \gg 1$

# Caractère pseudo-intégrateur

passé-bas du 1<sup>er</sup> ordre :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

- ▶  $\underline{H}(j\omega) \simeq 1$  pour  $\omega RC \ll 1$  : plus de divergence
- ▶  $\underline{H}(j\omega)$  d'un intégrateur pour  $\omega RC \gg 1$

# Caractère pseudo-intégrateur

passé-bas du 1<sup>er</sup> ordre :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

- ▶  $\underline{H}(j\omega) \simeq 1$  pour  $\omega RC \ll 1$  : plus de divergence
- ▶  $\underline{H}(j\omega)$  d'un intégrateur pour  $\omega RC \gg 1$

## Pseudo-intégrateur

Un filtre passe-bas du 1<sup>er</sup> ordre de pulsation de coupure  $\omega_c$  est un **pseudo-intégrateur**. Il est :

- ▶ intégrateur, ie réalise  $s(t) - s(t_0) \propto \int_{t_0}^t e(t) dt$ , pour  $e(t)$  sinusoïdale de pulsation  $\omega \gg \omega_c$ ,
- ▶ suiveur, ie réalise  $s(t) \propto e(t)$ , pour  $e(t)$  sinusoïdale de pulsation  $\omega \ll \omega_c$ .

1. Transformation d'un signal
2. Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire
3. Diagramme de Bode d'un filtre
4. Filtres du 1<sup>er</sup> ordre
  - 4.1 Filtre passe-bas
  - 4.2 Exemple d'utilisation du diagramme de Bode
  - 4.3 Filtre passe-haut
5. Exemples de filtres du 2<sup>e</sup> ordre

## Exemple d'un passe-haut passif

- ▶ on inverse condensateur et résistor (ou on remplace le condensateur par une bobine), toujours en sortie ouverte



## Exemple d'un passe-haut passif

- ▶ on inverse condensateur et résistor (ou on remplace le condensateur par une bobine), toujours en sortie ouverte
- ▶ pour  $\omega \ll \frac{1}{RC}$ , on a  $i = 0 \rightarrow u_s = Ri = 0$  : bande coupée

## Exemple d'un passe-haut passif

- ▶ on inverse condensateur et résistor (ou on remplace le condensateur par une bobine), toujours en sortie ouverte
- ▶ pour  $\omega \ll \frac{1}{RC}$ , on a  $i = 0 \rightarrow u_s = Ri = 0$  : bande coupée
- ▶ pour  $\omega \gg \frac{1}{RC}$ , on a  $u_s = u_e$  : bande passante

## Exemple d'un passe-haut passif

- ▶ on inverse condensateur et résistor (ou on remplace le condensateur par une bobine), toujours en sortie ouverte
- ▶ pour  $\omega \ll \frac{1}{RC}$ , on a  $i = 0 \rightarrow u_s = Ri = 0$  : bande coupée
- ▶ pour  $\omega \gg \frac{1}{RC}$ , on a  $u_s = u_e$  : bande passante
- ▶ fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 - \frac{j}{RC\omega}}$$

# Modèle

## Définition (Passe-haut du 1<sup>er</sup> ordre)

Un filtre est un **passe-haut du 1<sup>er</sup> ordre** si sa fonction de transfert est de la forme :

$$\underline{H} = \frac{jH_0 \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} = \frac{H_0}{1 - j \frac{\omega_c}{\omega}},$$

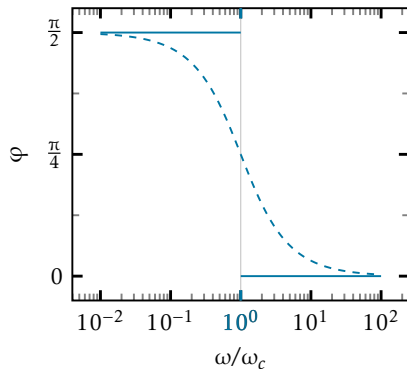
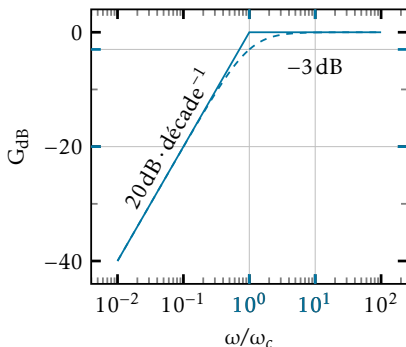
avec  $H_0$  réel et  $\omega_c$  réel positif.

# Diagramme de Bode

Reprendre l'étude comme précédemment

# Diagramme de Bode

Reprendre l'étude comme précédemment



# Caractère dérivateur et pseudo-dérivateur

## Définition (Circuit dérivateur idéal)

La fonction de transfert d'un filtre dérivateur idéal est :  $\underline{H} = H_0 \frac{j\omega}{\omega_c}$ . Sa tension de sortie est proportionnelle à la dérivée de sa tension d'entrée :

$$s(t) \propto \frac{de(t)}{dt}.$$

# Caractère dérivateur et pseudo-dérivateur

## Définition (Circuit dérivateur idéal)

La fonction de transfert d'un filtre dérivateur idéal est :  $\underline{H} = H_0 \frac{j\omega}{\omega_c}$ . Sa tension de sortie est proportionnelle à la dérivée de sa tension d'entrée :

$$s(t) \propto \frac{de(t)}{dt}.$$

défaut : être instable à haute fréquence  $\omega \gg 1/(RC)$



- Fonction de transfert  $\underline{H} = \frac{H_0}{1-j\frac{\omega_c}{\omega}}$  : passe-haut du premier ordre

- ▶ Fonction de transfert  $\underline{H} = \frac{H_0}{1-j\frac{\omega_c}{\omega}}$  : passe-haut du premier ordre
- ▶ pour  $\omega \ll \omega_c$ , on a  $\underline{H} = jH_0 \frac{\omega}{\omega_c}$ , on retrouve un dérivateur

- ▶ Fonction de transfert  $\underline{H} = \frac{H_0}{1-j\frac{\omega_c}{\omega}}$  : passe-haut du premier ordre
- ▶ pour  $\omega \ll \omega_c$ , on a  $\underline{H} = jH_0 \frac{\omega}{\omega_c}$ , on retrouve un dérivateur
- ▶ pour  $\omega \gg \omega_c$   $\underline{H} = H_0$ , plus de saturation

- ▶ Fonction de transfert  $\underline{H} = \frac{H_0}{1-j\frac{\omega_c}{\omega}}$  : passe-haut du premier ordre
- ▶ pour  $\omega \ll \omega_c$ , on a  $\underline{H} = jH_0 \frac{\omega}{\omega_c}$ , on retrouve un dérivateur
- ▶ pour  $\omega \gg \omega_c$   $\underline{H} = H_0$ , plus de saturation

- ▶ Fonction de transfert  $\underline{H} = \frac{H_0}{1-j\frac{\omega_c}{\omega}}$  : passe-haut du premier ordre
- ▶ pour  $\omega \ll \omega_c$ , on a  $\underline{H} = jH_0 \frac{\omega}{\omega_c}$ , on retrouve un dérivateur
- ▶ pour  $\omega \gg \omega_c$   $\underline{H} = H_0$ , plus de saturation

## Pseudo-dérivateur

Un filtre passe-haut du premier 1<sup>er</sup> ordre de pulsation de coupure  $\omega_c$  est un **pseudo-dérivateur**. Il est :

- ▶ dérivateur *ie* réalise  $s(t) \propto \frac{de(t)}{dt}$ , pour  $e(t)$  sinusoïdale de pulsation  $\omega \ll \omega_c$ ,
- ▶ suiveur, *ie* réalise  $s(t) \propto e(t)$ , pour  $e(t)$  sinusoïdale de pulsation  $\omega \gg \omega_c$ .

1. Transformation d'un signal
2. Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire
3. Diagramme de Bode d'un filtre
4. Filtres du 1<sup>er</sup> ordre
5. Exemples de filtres du 2<sup>e</sup> ordre

L'étude systématique n'est pas au programme, on se contentera d'exemples

1. Transformation d'un signal
2. Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire
3. Diagramme de Bode d'un filtre
4. Filtres du 1<sup>er</sup> ordre
5. Exemples de filtres du 2<sup>e</sup> ordre
  - 5.1 Mise en cascade de deux filtres
  - 5.2 Passe-bas d'ordre 2 :  $u_C$  d'un RLC série
  - 5.3 Passe-bande d'ordre 2 :  $u_R$  d'un RLC série



## Mise en cascade

Si chacun des filtres d'une cascade de filtres est idéal en sortie, la fonction de transfert de l'ensemble est le produit des fonctions de transfert de chaque filtre. On a alors  $G_{dB} = \sum G_{i,dB}$  et  $\varphi = \sum_i \varphi_i$ .

## Mise en cascade

Si chacun des filtres d'une cascade de filtres est idéal en sortie, la fonction de transfert de l'ensemble est le produit des fonctions de transfert de chaque filtre. On a alors  $G_{dB} = \sum G_{i,dB}$  et  $\varphi = \sum_i \varphi_i$ .

S'ils ne sont pas idéaux en sortie, on les utilise en sortie ouverte ( $i_s = 0$ ) au besoin en branchant leur sortie sur un quadripôle suiveur

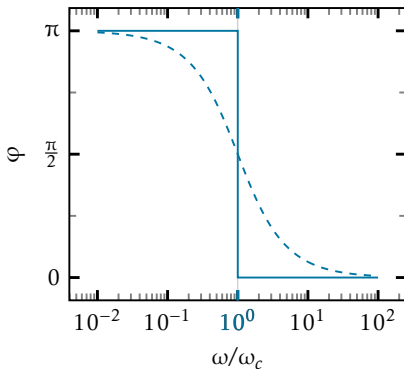
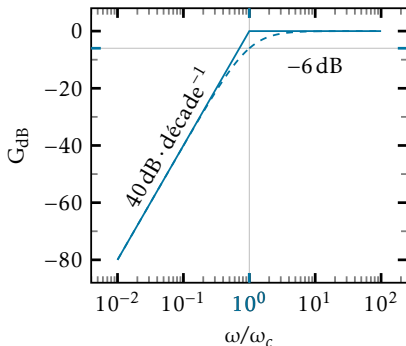
# Diagrammes de Bode asymptotiques

On l'obtient en « sommant » les diagrammes de Bode asymptotiques de chacun des filtres.

# Diagrammes de Bode asymptotiques

Passe-haut du 2<sup>e</sup> ordre à partir de 2 passe-haut du 1<sup>er</sup> ordre identiques :

$$H(j\omega) = \left( \frac{j\omega/\omega_c}{1+j\omega/\omega_c} \right)^2$$

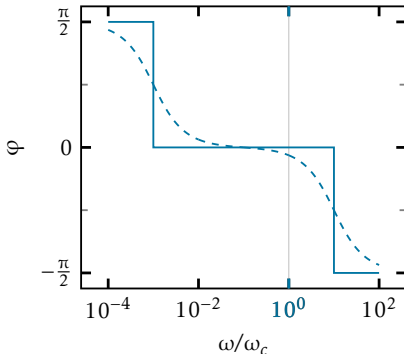
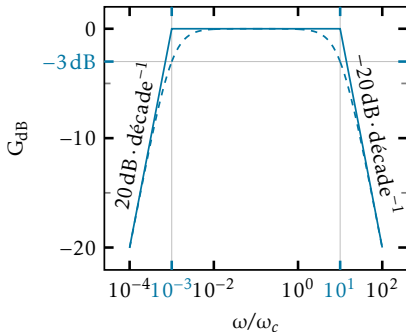


Pente à 40dB par décade : meilleure atténuation en bande coupée

# Diagrammes de Bode asymptotiques

Passe-bande du 2<sup>e</sup> ordre à l'aide d'un passe-haut et d'un passe bas du 1<sup>er</sup> ordre :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1-j\frac{\omega_{c1}}{\omega}} \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_{c2}}}, \quad \omega_{c2} = 10^4 \omega_{c1}$$



Pentes à  $\pm 20\text{dB}$  par décade

1. Transformation d'un signal
2. Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire
3. Diagramme de Bode d'un filtre
4. Filtres du 1<sup>er</sup> ordre
5. Exemples de filtres du 2<sup>e</sup> ordre
  - 5.1 Mise en cascade de deux filtres
  - 5.2 Passe-bas d'ordre 2 :  $u_C$  d'un RLC série
  - 5.3 Passe-bande d'ordre 2 :  $u_R$  d'un RLC série

► comportements asymptotiques :

- ▶ comportements asymptotiques :
  - ▶ pour  $\omega \ll 1/\sqrt{LC} \equiv \omega_0$  :  $\underline{U_{sm}} = \underline{U_{em}}$



- ▶ comportements asymptotiques :
  - ▶ pour  $\omega \ll 1/\sqrt{LC} \equiv \omega_0$  :  $\underline{U_{sm}} = \underline{U_{em}}$
  - ▶ pour  $\omega \gg \omega_0$  :  $\underline{U_{sm}} = 0$

- ▶ comportements asymptotiques :
  - ▶ pour  $\omega \ll 1/\sqrt{LC} \equiv \omega_0$  :  $\underline{U_{sm}} = \underline{U_{em}}$
  - ▶ pour  $\omega \gg \omega_0$  :  $\underline{U_{sm}} = 0$
- ▶ fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2 + \frac{j\omega}{\omega_0 Q}} :$$

- ▶ comportements asymptotiques :
  - ▶ pour  $\omega \ll 1/\sqrt{LC} \equiv \omega_0$  :  $\underline{U_{sm}} = \underline{U_{em}}$
  - ▶ pour  $\omega \gg \omega_0$  :  $\underline{U_{sm}} = 0$
- ▶ fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2 + \frac{j\omega}{\omega_0 Q}} :$$

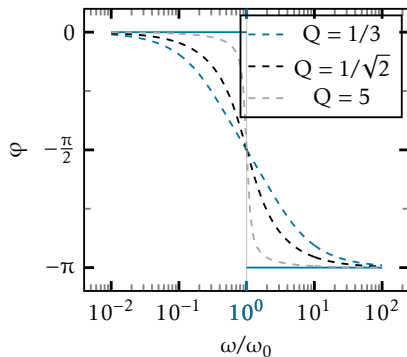
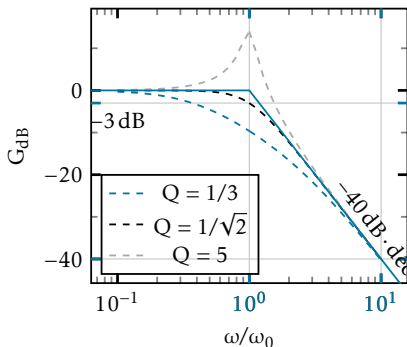
- ▶ pour  $\omega \ll \omega_0$  :  $\underline{H}(j\omega) = 1$ , soit  $G_{dB} = 0$  et  $\varphi = 0$

- ▶ comportements asymptotiques :
  - ▶ pour  $\omega \ll 1/\sqrt{LC} \equiv \omega_0$  :  $\underline{U_{sm}} = \underline{U_{em}}$
  - ▶ pour  $\omega \gg \omega_0$  :  $\underline{U_{sm}} = 0$
- ▶ fonction de transfert :

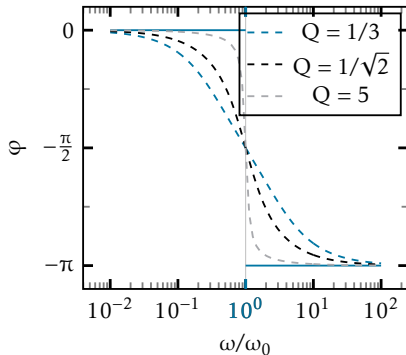
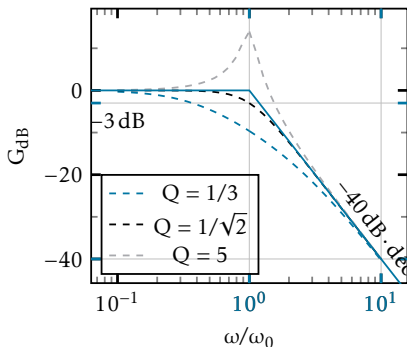
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2 + \frac{j\omega}{\omega_0 Q}} :$$

- ▶ pour  $\omega \ll \omega_0$  :  $\underline{H}(j\omega) = 1$ , soit  $G_{dB} = 0$  et  $\varphi = 0$
- ▶ pour  $\omega \gg \omega_0$  :  $\underline{H}(j\omega) \simeq \frac{-\omega_0^2}{\omega^2}$ , soit  $G_{dB} = -40 \log \omega/\omega_0$  et  $\varphi = -\pi$

## RLC série en passe-bas d'ordre 2



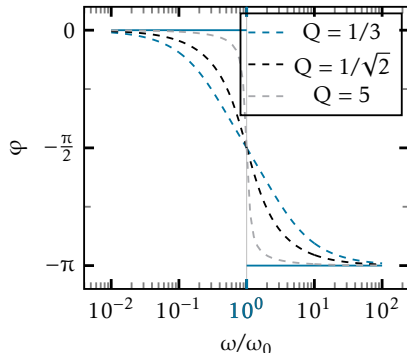
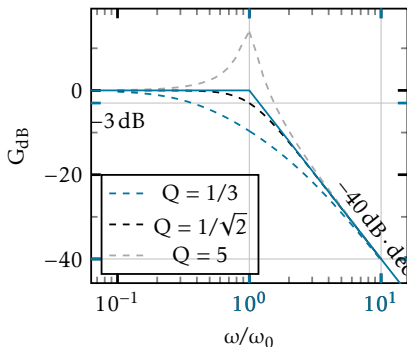
## RLC série en passe-bas d'ordre 2



Au voisinage de  $\omega_0$  :

- ▶ en  $\omega = \omega_0$ ,  $\underline{H} = Q/j$  croissant avec  $Q$  alors que les asymptotes sont indépendantes de  $Q$  : résonance pour  $Q \geq 1/\sqrt{2}$ ; différent de deux passe-bas d'ordre 1 en cascade

## RLC série en passe-bas d'ordre 2



Au voisinage de  $\omega_0$  :

- ▶ en  $\omega = \omega_0$ ,  $\underline{H} = Q/j$  croissant avec  $Q$  alors que les asymptotes sont indépendantes de  $Q$  : résonance pour  $Q \geq 1/\sqrt{2}$  ; différent de deux passe-bas d'ordre 1 en cascade
- ▶ pour  $Q \leq 1/\sqrt{2}$  : on peut factoriser  $\underline{H}(j\omega)$  comme produit de deux passe-bas d'ordre 1 de pulsations de coupures différentes

1. Transformation d'un signal
2. Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire
3. Diagramme de Bode d'un filtre
4. Filtres du 1<sup>er</sup> ordre
5. Exemples de filtres du 2<sup>e</sup> ordre
  - 5.1 Mise en cascade de deux filtres
  - 5.2 Passe-bas d'ordre 2 :  $u_C$  d'un RLC série
  - 5.3 Passe-bande d'ordre 2 :  $u_R$  d'un RLC série



► comportements asymptotiques :

- ▶ comportements asymptotiques :
  - ▶ pour  $\omega \ll 1/\sqrt{LC} \equiv \omega_0$  :  $\underline{U}_{sm} = 0$

- ▶ comportements asymptotiques :
  - ▶ pour  $\omega \ll 1/\sqrt{LC} \equiv \omega_0$  :  $\underline{U_{sm}} = 0$
  - ▶ pour  $\omega \gg \omega_0$  :  $\underline{U_{sm}} = 0$

- ▶ comportements asymptotiques :
  - ▶ pour  $\omega \ll 1/\sqrt{LC} \equiv \omega_0$  :  $\underline{U_{sm}} = 0$
  - ▶ pour  $\omega \gg \omega_0$  :  $\underline{U_{sm}} = 0$
- ▶ fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} :$$

- ▶ comportements asymptotiques :
  - ▶ pour  $\omega \ll 1/\sqrt{LC} \equiv \omega_0$  :  $\underline{U}_{sm} = 0$
  - ▶ pour  $\omega \gg \omega_0$  :  $\underline{U}_{sm} = 0$
- ▶ fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} :$$

- ▶ pour  $\omega \ll \omega_0$  :  $\underline{H}(j\omega) \simeq \frac{j\omega}{Q\omega_0}$ , soit  $G_{dB} = 20 \log \frac{\omega}{\omega_0} - 20 \log Q$  et  $\varphi = \pi/2$

- ▶ comportements asymptotiques :
  - ▶ pour  $\omega \ll 1/\sqrt{LC} \equiv \omega_0$  :  $\underline{U}_{sm} = 0$
  - ▶ pour  $\omega \gg \omega_0$  :  $\underline{U}_{sm} = 0$
- ▶ fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} :$$

- ▶ pour  $\omega \ll \omega_0$  :  $\underline{H}(j\omega) \simeq \frac{j\omega}{Q\omega_0}$ , soit  $G_{dB} = 20 \log \frac{\omega}{\omega_0} - 20 \log Q$  et  $\varphi = \pi/2$
- ▶ pour  $\omega \gg \omega_0$  :  $\underline{H}(j\omega) \simeq \frac{-j\omega_0}{Q\omega}$ , soit  $G_{dB} = -20 \log \frac{\omega}{\omega_0} - 20 \log Q$  et  $\varphi = -\pi/2$

- ▶ comportements asymptotiques :
  - ▶ pour  $\omega \ll 1/\sqrt{LC} \equiv \omega_0$  :  $\underline{U}_{sm} = 0$
  - ▶ pour  $\omega \gg \omega_0$  :  $\underline{U}_{sm} = 0$
- ▶ fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} :$$

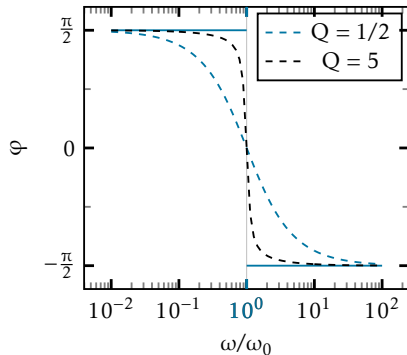
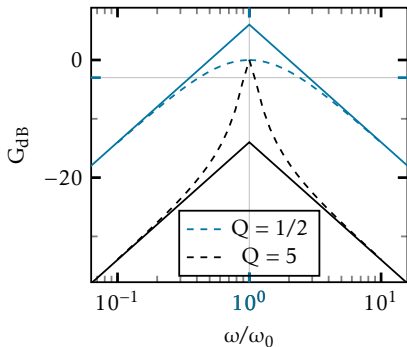
- ▶ pour  $\omega \ll \omega_0$  :  $\underline{H}(j\omega) \simeq \frac{j\omega}{Q\omega_0}$ , soit  $G_{dB} = 20 \log \frac{\omega}{\omega_0} - 20 \log Q$  et  $\varphi = \pi/2$
- ▶ pour  $\omega \gg \omega_0$  :  $\underline{H}(j\omega) \simeq \frac{-j\omega_0}{Q\omega}$ , soit  $G_{dB} = -20 \log \frac{\omega}{\omega_0} - 20 \log Q$  et  $\varphi = -\pi/2$
- ▶ l'intersection des asymptotes en  $-20 \log Q$  dépend du facteur de qualité alors que  $G_{db0} = 0$  n'en dépend pas

- ▶ comportements asymptotiques :
  - ▶ pour  $\omega \ll 1/\sqrt{LC} \equiv \omega_0$  :  $\underline{U}_{sm} = 0$
  - ▶ pour  $\omega \gg \omega_0$  :  $\underline{U}_{sm} = 0$
- ▶ fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} :$$

- ▶ pour  $\omega \ll \omega_0$  :  $\underline{H}(j\omega) \simeq \frac{j\omega}{Q\omega_0}$ , soit  $G_{dB} = 20 \log \frac{\omega}{\omega_0} - 20 \log Q$  et  $\varphi = \pi/2$
- ▶ pour  $\omega \gg \omega_0$  :  $\underline{H}(j\omega) \simeq \frac{-j\omega_0}{Q\omega}$ , soit  $G_{dB} = -20 \log \frac{\omega}{\omega_0} - 20 \log Q$  et  $\varphi = -\pi/2$
- ▶ l'intersection des asymptotes en  $-20 \log Q$  dépend du facteur de qualité alors que  $G_{db0} = 0$  n'en dépend pas
- ▶ courbe symétrique en échelle log, on peut vérifier que  $\omega_2/\omega_0 = \omega_0/\omega_1$  avec  $\omega_1$  et  $\omega_2$  définissant la bande passante





## Finesse d'une résonance

pour un filtre présentant une résonance (passe bande d'ordre 2, passe bas/haut d'ordre 2 de facteur de qualité suffisant)

### Définition (Finesse)

On note  $\omega_0$  la pulsation telle que  $G_{dB}(\omega_0) = G_{dB,max}$  est maximal,  $\omega_1$  (resp.  $\omega_2$  avec  $\omega_1 < \omega_2$ ) les deux pulsations telles que  $G_{dB}(\omega) = G_{dB,max} - 20 \log(\sqrt{2}) \simeq G_{dB,max} - 3$ . La **finesse** de la résonance est :

$$\mathcal{F} = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}.$$

# Finesse d'une résonance

pour un filtre présentant une résonance (passe bande d'ordre 2, passe bas/haut d'ordre 2 de facteur de qualité suffisant)

## Définition (Finesse)

On note  $\omega_0$  la pulsation telle que  $G_{dB}(\omega_0) = G_{dB,max}$  est maximal,  $\omega_1$  (resp.  $\omega_2$  avec  $\omega_1 < \omega_2$ ) les deux pulsations telles que  $G_{dB}(\omega) = G_{dB,max} - 20 \log(\sqrt{2}) \simeq G_{dB,max} - 3$ . La **finesse** de la résonance est :

$$\mathcal{F} = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}.$$

## Finesse d'un passe-bande d'ordre 2

La finesse d'un passe-bande d'ordre 2 est égale à son facteur de qualité :

$$\mathcal{F} = Q$$

# Finesse d'une résonance

pour un filtre présentant une résonance (passe bande d'ordre 2, passe bas/haut d'ordre 2 de facteur de qualité suffisant)

## Définition (Finesse)

On note  $\omega_0$  la pulsation telle que  $G_{dB}(\omega_0) = G_{dB,max}$  est maximal,  $\omega_1$  (resp.  $\omega_2$  avec  $\omega_1 < \omega_2$ ) les deux pulsations telles que  $G_{dB}(\omega) = G_{dB,max} - 20 \log(\sqrt{2}) \simeq G_{dB,max} - 3$ . La **finesse** de la résonance est :

$$\mathcal{F} = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}.$$

## Finesse d'un passe-bande d'ordre 2

La finesse d'un passe-bande d'ordre 2 est égale à son facteur de qualité :

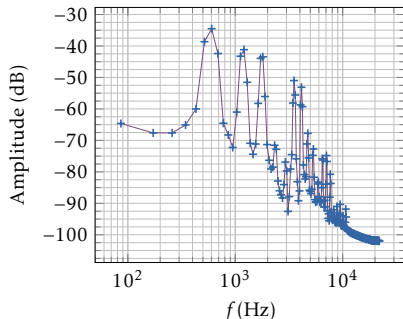
$$\mathcal{F} = Q$$

plus  $Q$  est élevé, plus la résonance est fine, qualitativement valable également pour tout filtre d'ordre 2.

## Exercice : effets d'un filtre sur un spectre

On considère le spectre d'un ré4 (de fréquence 587,5 Hz) de guitare donné ci-contre.

- 1 Déterminer l'allure du spectre du signal obtenu quand on applique un passe-bas d'ordre 1 de fréquence de coupure 500 Hz.



- 2 Comment choisir la fréquence de résonance et le facteur de qualité d'un filtre passe-bande d'ordre 2 pour obtenir un signal quasi sinusoïdal correspondant au ré5 ?

# Indispensable

- ▶ principe et éléments d'un diagramme de Bode
- ▶ effet d'un filtre sur un spectre
- ▶ diagrammes asymptotiques
- ▶ filtres d'ordre 1
- ▶ composition de filtres