Filtrage linéaire

Égalité de Parseval

Théorème : de Parseval
Le carré de la valeur efficace d'un signal $s(t)$ périodique est la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques :

$$s_{eff}^2 = A_0^2 + \sum_{p=1}^{\infty} A_{p,eff}^2 = A_0^2 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p^2}{2}$$

Schéma électronique d'un quadripôle

Définition : Quadripôle linéaire
Un quadripôle est dit ***linéaire*** si les tensions d'entrée $\underline{U}_{\text{em}}$ et de sortie $\underline{U}_{\text{sm}}$ s'expriment comme des combinaisons linéaires des intensités des courants d'entrée $\underline{I}_{\text{em}}$ et de sortie $\underline{I}_{\text{sm}}$.
Un dipôle :

actif branché en entrée est ***une source***,

passif branché en sortie est ***une charge***.

Opérateurs idéaux

Définition : Opérateurs idéaux
Dans les quadripôles fondamentaux, le signal de sortie est proportionnel au signal d'entrée. L'opérateur est dit ***idéal*** si :

- le signal fourni par la source branchée en entrée n'est pas perturbé par le quadripôle
- le signal de sortie est indépendant des caractéristiques de la charge branchée en sortie.

Amplificateurs et convertisseurs idéaux

Définition : Amplificateurs et convertisseurs idéaux
On distingue :

Amplificateur idéal de tension $\underline{U}_{\text{sm}} = \underline{k}\underline{U}_{\text{em}} : \underline{Y}_e = 0\,;\underline{Z}_s = 0$,

Convertisseur idéal tension → courant $\underline{I}_{\text{sm}} = \underline{l}\underline{U}_{\text{em}} : \underline{Y}_e = 0\,;\underline{Y}_s = 0$,

Convertisseur idéal courant → tension $\underline{U}_{\text{sm}} = \frac{1}{\underline{l}}\underline{I}_{\text{em}} : \underline{Z}_e = 0\,;\underline{Z}_s = 0$,

Amplificateur idéal de courant $\underline{I}_{\text{sm}} = \underline{k}\underline{I}_{\text{em}} : \underline{Z}_e = 0\,;\underline{Y}_s = 0$.

Quadripôle suiveur

Définition : Quadripôle suiveur
Un ***quadripôle suiveur*** est un amplificateur idéal réalisant $\underline{U}_{\text{sm}} = \underline{U}_{\text{em}}$:

- en prélevant un courant nul de la source,
- en pouvant fournir un courant arbitrairement grand à la charge.

Fonction de transfert

Définition : Fonction de transfert
On définit la ***fonction de transfert*** d'un quadripôle linéaire couplant une grandeur X_e d'entrée à une grandeur de sortie X_s en RSE à la pulsation ω le quotient : $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{X_{sm}}}{\underline{X_{em}}}$.

Fraction rationnelle

Fonction de transfert
La fonction de transfert d'un quadripole linéaire couplant X_e à X_s est une fraction rationnelle en $j\omega$:

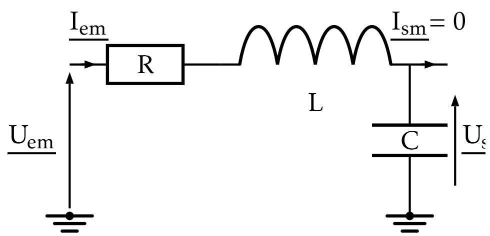
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{X_{sm}}}{\underline{X_{em}}} = \frac{\sum_{p=0}^{n_e} \alpha_p (j\omega)^p}{\sum_{p'=0}^{n_s} \alpha'_{p'} (j\omega)^{p'}}.$$

On nomme ***ordre du quadripôle*** $\underline{H}$ le maximum de (n_e, n_s)

- la réponse (sortie/entrée) ne dépend que de ω, pas de l'amplitude de l'entrée
- stable à haute fréquence pour $n_s \geqslant n_e$
- stable à basse fréquence pour $\alpha'_0 \neq 0$

Exercice : le circuit RLC série vu comme un filtre

On réalise un amplificateur de tension à l'aide d'un circuit RLC série comme représenté ci-contre dans lequel par exemple $\underline{U_{\text{em}}}$ représente l'amplitude complexe de la tension d'entrée en régime sinusoïdal permanent.



1. (a) Quel intérêt présente l'utilisation en ***sortie ouverte***, *ie* $\underline{I_{\text{sm}}} = 0$?
   (b) L'entrée du quadripôle est-elle idéale ?
2. Déterminer l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U_{\text{sm}}}}{\underline{U_{\text{em}}}}$. On utilisera la pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et le facteur de qualité Q vérifiant $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$.
3. En déduire l'équation différentielle liant $u_s(t)$ à $u_e(t)$.

Fonctions d'un filtre

Définition : Filtrage d'un signal, bandes passante et coupée
Un quadripôle linéaire de fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ réalise un ***filtrage*** du signal d'entrée :

en l'amplifiant pour $|\underline{H}(j\omega)| > 1$,

en l'atténuant pour $|\underline{H}(j\omega)| < 1$,

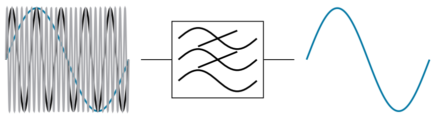
en le déphasant pour $\arg(\underline{H}(j\omega)) \neq 0[2\pi]$

en fonction de sa pulsation ω, indépendamment de son amplitude.
On nomme :

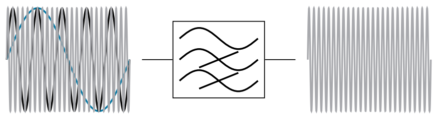
Bande passante le domaine de pulsations que le filtre doit transmettre,

Bande coupée le domaine de pulsations que le filtre doit éliminer (le reste).

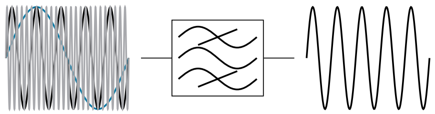
Filtres idéaux



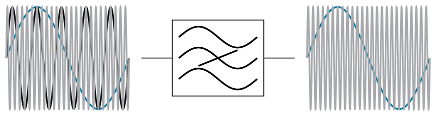
Passe bas : les moyenne et haute fréquence sont coupées



Passe haut : les moyenne et basse fréquence sont coupées



Passe bande : seules les moyennes fréquences passent



Coupe bande : seules les moyennes fréquences sont coupées

Éléments

Définition : Gain
On nomme ***gain***, noté H, d'un filtre le module de sa fonction de transfert : $H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$. Le ***gain en décibel***, noté G_{dB} est défini par $G_{dB} = 20 \log H$.

Diagramme de Bode

Définition : Diagramme de Bode
Le ***diagramme de Bode*** d'un quadripôle est constitué :

- de la représentation de son gain en décibel,
- de l'argument de sa fonction de transfert,

en fonction de $\log \omega/\omega_c$, où ω_c est une pulsation caractéristique du filtre.

Définition : Octave et décade
Une ***décade*** est un intervalle de fréquence $[\omega_1\,;\omega_2]$, avec $\omega_2 = 10\,\omega_1$, soit $\log\frac{\omega_2}{\omega_c} = \log\frac{\omega_1}{\omega_c} + 1$.
Une ***octave*** est un intervalle de fréquence $[\omega_1\,;\omega_2]$, avec $\omega_2 = 2\,\omega_1$, soit $\log\frac{\omega_2}{\omega_c} \simeq \log\frac{\omega_1}{\omega_c} + 0{,}3$.

Pulsation de coupure

Définition : Pulsation de coupure
On nomme ***pulsation de coupure à** $-3dB$* une pulsation ω_c à la frontière entre une bande passante et une bande coupée d'un filtre au-delà de laquelle le gain G_{dB} en décibel est inférieur à $G_{dB0} - 20\log\sqrt{2} \simeq G_{dB0} - 3$, avec G_{dB0} le gain en décibel en bande passante dans le diagramme asymptotique.

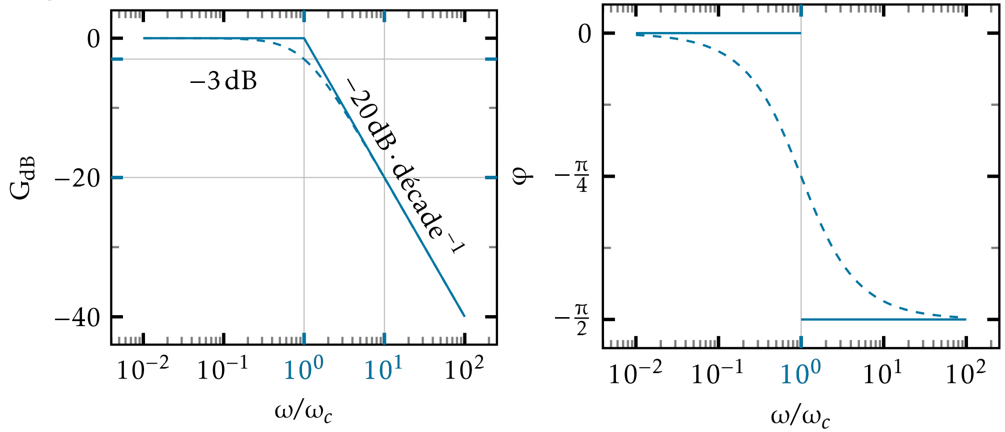
Modèle

Définition : Passe-bas du 1^er^ordre
Un filtre est un ***passe-bas du 1^er^ordre*** si sa fonction de transfert est de la forme :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}},$$

avec H_0 réel et ω_c réel positif.

Diagramme de Bode



Caractère intégrateur

Définition : Circuit intégrateur idéal
La fonction de transfert d'un filtre intégrateur idéal est : $\underline{H} = H_0\frac{\omega_c}{j\omega}$ avec H_0 réel et ω_c réel positif. Les variations de sa tension de sortie, $s(t)$, sont proportionnelles à l'intégrale de sa tension d'entrée $e(t)$: $s(t) - s(t_0) \propto \int_{t_0}^{t} e(t)\mathrm{d}t$.

Caractère pseudo-intégrateur

Pseudo-intégrateur
Un filtre passe-bas du 1^er^ordre de pulsation de coupure ω_c est un ***pseudo-intégrateur***. Il est :

- intégrateur, *ie* réalise $s(t) - s(t_0) \propto \int_{t_0}^{t} e(t)\mathrm{d}t$, pour $e(t)$ sinusoïdale de pulsation $\omega \gg \omega_c$,
- suiveur, *ie* réalise $s(t) \propto e(t)$, pour $e(t)$ sinusoïdale de pulsation $\omega \ll \omega_c$.

Modèle

Définition : Passe-haut du 1^er^ordre

Un filtre est un ***passe-haut du 1^er^ordre*** si sa fonction de transfert est de la forme :

$$\underline{H} = \frac{jH_0\frac{\omega}{\omega_c}}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}} = \frac{H_0}{1-j\frac{\omega_c}{\omega}},$$

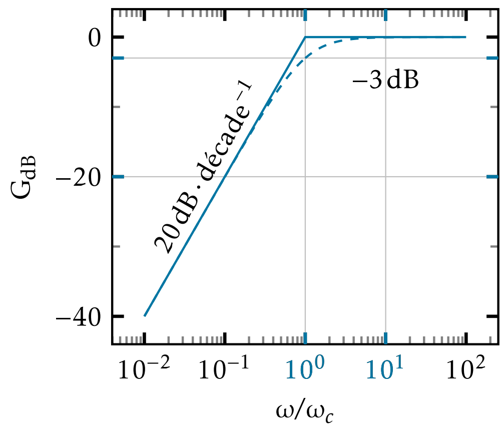
avec H_0 réel et ω_c réel positif.

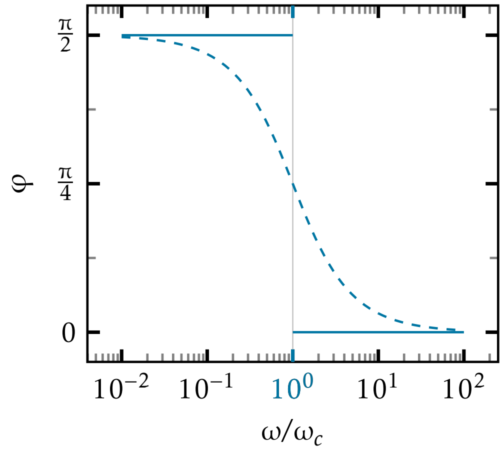
Pseudo-dérivateur

Un filtre passe-haut du premier 1^er^ordre de pulsation de coupure ω_c est un ***pseudo-dérivateur***. Il est :

- dérivateur *ie* réalise $s(t) \propto \dfrac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}$, pour $e(t)$ sinusoïdale de pulsation $\omega \ll \omega_c$,
- suiveur, *ie* réalise $s(t) \propto e(t)$, pour $e(t)$ sinusoïdale de pulsation $\omega \gg \omega_c$.

Diagramme de Bode





Mise en cascade

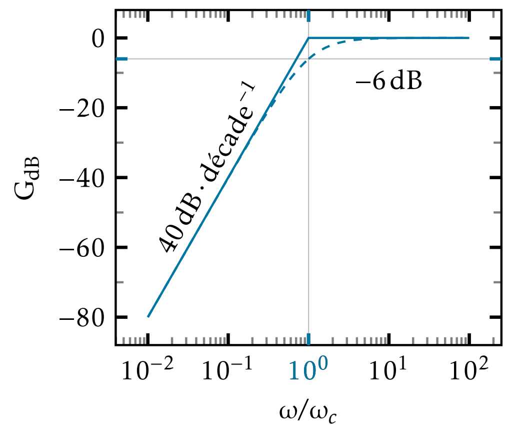
Si chacun des filtres d'une cascade de filtres est idéal en sortie, la fonction de transfert de l'ensemble est le produit des fonctions de transfert de chaque filtre. On a alors $G_{dB} = \sum G_{i,dB}$ et $\varphi = \sum_i \varphi_i$.

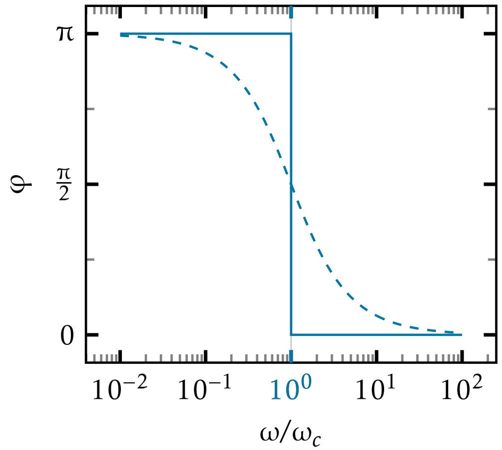
Caractère dérivateur et pseudo-dérivateur

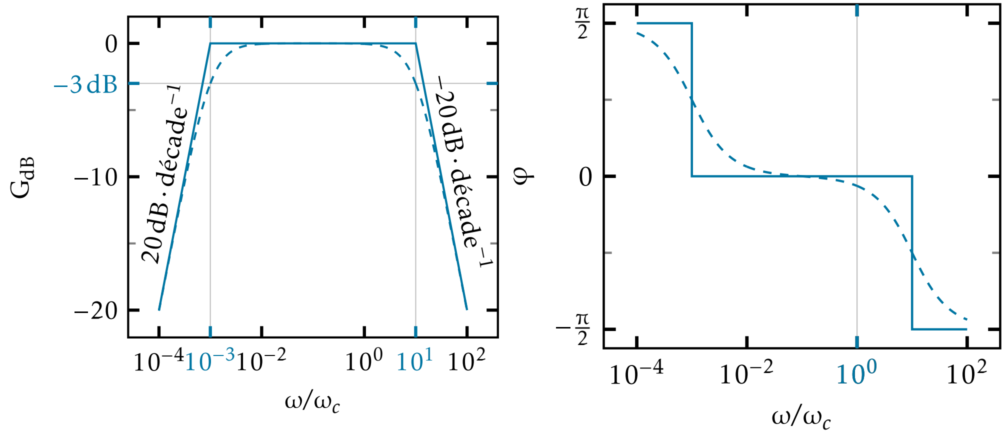
Définition : Circuit dérivateur idéal

La fonction de transfert d'un filtre dérivateur idéal est : $\underline{H} = H_0\frac{j\omega}{\omega_c}$. Sa tension de sortie est proportionnelle à la dérivée de sa tension d'entrée : $s(t) \propto \dfrac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}$.

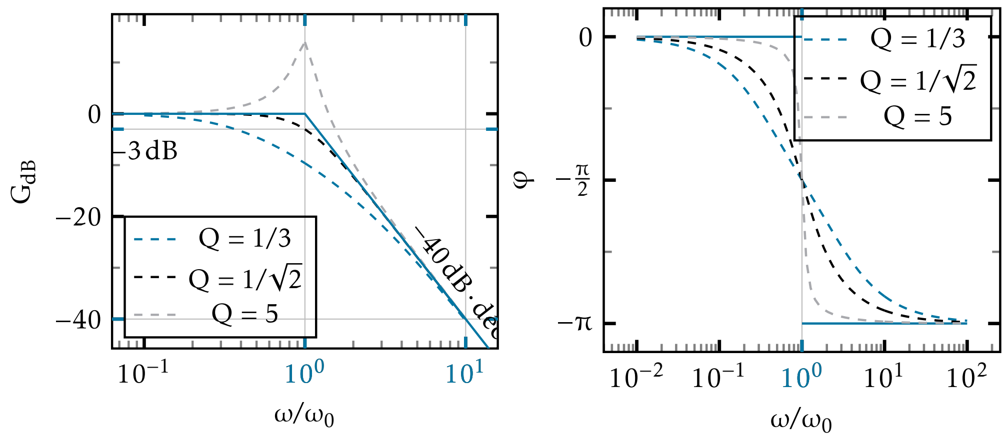
Diagrammes de Bode asymptotiques

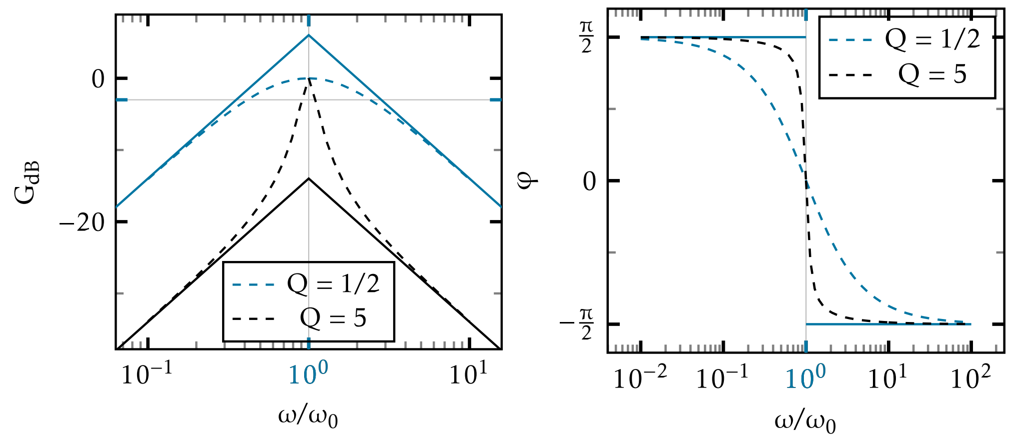






RLC série en passe-bas d'ordre 2





Finesse d'une résonance

Définition : Finesse
On note ω_0 la pulsation telle que $G_{dB}(\omega_0) = G_{dB,max}$ est maximal, ω_1 (resp. ω_2 avec $\omega_1 < \omega_2$) les deux pulsations telles que $G_{dB}(\omega) = G_{dB,max} - 20\log(\sqrt{2}) \simeq G_{dB,max} - 3$. La ***finesse*** de la résonance est :

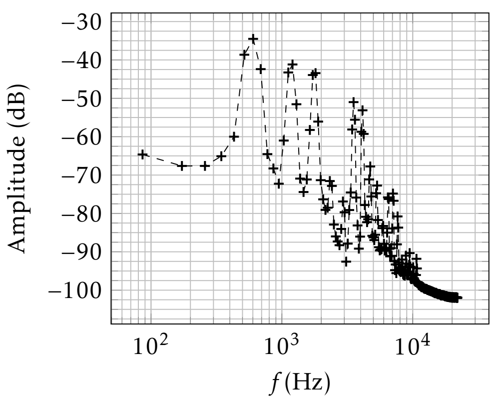
$$\mathcal{F} = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}.$$

Finesse d'un passe-bande d'ordre 2
La finesse d'un passe-bande d'ordre 2 est égale à son facteur de qualité :

$$\mathcal{F} = Q$$

Exercice : effets d'un filtre sur un spectre

On considère le spectre d'un ré4 (de jolie fréquence 587,5 Hz) de guitare donné ci-contre.



1. Déterminer l'allure du spectre du signal obtenu quand on applique un passe-bas d'ordre 1 de fréquence de coupure 500 Hz.

2 Comment choisir la fréquence de résonance et le facteur de qualité d'un filtre passe-bande d'ordre 2 pour obtenir un signal quasi sinusoïdal correspondant au ré5 ?

Indispensable

- principe et éléments d'un diagramme de Bode
- diagrammes asymptotiques
- filtres d'ordre 1
- composition de filtres