

I La mesure

I.1 Grandeurs Physiques

Une grandeur physique (longueur, durée, masse par exemple) est une caractéristique d'un objet ou d'un phénomène qu'on peut *mesurer expérimentalement*. Ceci signifie qu'on peut décrire un protocole permettant de caractériser l'égalité et de déterminer le rapport des valeurs de cette grandeur dans deux objets différents.

Exemple :

La masse est une grandeur mesurable puisqu'on peut vérifier l'égalité de deux masses au moyen d'une balance à fléau et déterminer le rapport de deux masses au moyen d'une balance (romaine pour le plus simple).

La grandeur est alors dite *mesurable*. C'est le sens du signe = en sciences physiques, dont on constate ici l'origine fondamentalement expérimentale.

Effectuer une mesure de la valeur X d'une grandeur d'un objet ou phénomène c'est déterminer le rapport entre X et la valeur d'une grandeur de référence X_0 , définie elle aussi expérimentalement. Ainsi, dire que «la valeur de la masse de cette pomme est 100 g» signifie que le quotient, déterminé expérimentalement, de la valeur de la masse de la pomme par la valeur d'une masse de référence, servant à définir le gramme, vaut 100^i .

Remarque :

Jusqu'à maintenant nous avons distingué la grandeur physique (la grandeur masse par exemple), de sa valeur dans une réalisation expérimentale particulière (la masse d'un objet). Par la suite, le nom de la grandeur aura les deux sens : on dira aussi bien «la masse d'une pomme» que «la masse».

I.2 Grandeurs fondamentales

Le système international d'unités utilise cinq grandeurs fondamentales indépendantes, permettant d'exprimer toutes les grandeurs physiques par produit et quotient :

longueur (symbole L)	durée (T)	masse (M)	intensité (I)	température (t).
----------------------	-----------	-----------	---------------	------------------

Exemple :

Une vitesse, grandeur non fondamentale, s'exprime comme le quotient de deux grandeurs fondamentales : une longueur et une durée.

Conjointement, il est nécessaire de définir une unitéⁱⁱ pour chacune de ces grandeurs (la «valeur» d'un étalon), résumées dans le tableau TAB. 1. Celles-ci sont, dans le système international (noté SI), au nombre de sept. En effet les deux unités supplémentaires, la mole et la candéla font intervenir, en plus des cinq grandeurs fondamentales, des nombres sans dimension caractéristiques d'objets particuliers : un atome de carbone pour la mole, et la sensibilité humaine de l'œil pour la candélaⁱⁱⁱ.

On peut également définir des unités, non fondamentales, pour les grandeurs non fondamentales.

Exemple :

- le hertz, unité de fréquence, de symbole Hz, s'exprime en fonction des unités fondamentales selon $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$,
- la dioptrie, utilisée en optique géométrique, de symbole δ , avec $1 \delta = 1 \text{ m}^{-1}$,
- le newton, unité de force, de symbole N, avec $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

i. En pratique on compare dans le cas d'une pesée l'égalité de la masse à mesurer à celle d'un ensemble de masses mesurées au préalable.

ii. Les termes de leurs définitions légales seront expliqués le moment venu.

iii. Le Bureau International des Poids et Mesures a prévu de changer, en 2018, les définitions du kilogramme, de l'ampère, du kelvin et de la mole à des définitions numériques exactes de la constante de Planck h , de la charge élémentaire e , de la constante de Boltzmann k , de la constante d'Avogadro N_A .

Grandeur	Symbole	Unité	Définition
longueur	L	mètre (m)	Le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de $1/299\,792\,458$ seconde.
durée	T	seconde (s)	La seconde est la durée de $9\,192\,631\,770$ périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.
masse	M	kilogramme (kg)	Le kilogramme est la masse du prototype international, réalisé en platine allié à 10 pour 100 d'iridium, à 0,0001 près, conservé au Bureau International des Poids et Mesures, à Sèvres.
courant électrique	I	ampère (A)	L'ampère est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1 mètre l'un de l'autre dans le vide, produirait entre ces conducteurs une force égale à $2 \cdot 10^{-7}$ N par mètre de longueur.
température	t	kelvin (K)	Le kelvin, unité de température thermodynamique, est la fraction $1/273,16$ de la température thermodynamique du point triple de l'eau.
quantité de matière	N	mole (mol)	La mole est la quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 0,012 kilogramme de carbone 12.
intensité lumineuse	I_v	candéla (cd)	La candéla est l'intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence $540 \cdot 10^{12}$ Hz et dont l'intensité énergétique dans cette direction est $1/683$ watt par stéradian.

TABLE 1 – Grandeurs fondamentales et unités de base du système SI

I.3 Équations aux dimensions

Désignons par A la valeur d'une grandeur physique. La grandeur elle-même sera notée $[A]$ et on notera son expression en fonction des grandeurs fondamentales sous la forme d'une égalité. Dans le cas de la valeur d'une force désignée par F , on écrira :

$$[F] = M.L.T^{-2}$$

On exprime ainsi qu'une force a la dimension du produit d'une masse par une longueur divisée par le carré d'une durée : il s'agit bien ici d'une égalité entre grandeurs physiques^{iv}.

La nature même de l'égalité de deux grandeurs impose que les dimensions des grandeurs A et B dans l'expression $A = B$ sont nécessairement égales :

$$A = B \Rightarrow [A] = [B].$$

Cette égalité entre grandeurs, ou dimensions, est nommée *équation aux dimensions*. On dispose ainsi d'un moyen très pratique de vérifier la vraisemblance d'un résultat après calculs : les dimensions des grandeurs figurant de chaque côté du signe = doivent être les mêmes. On dit qu'on *vérifie l'homogénéité* du résultat.

La dimension d'un produit ou quotient de grandeurs est bien évidemment le produit ou le quotient des dimensions des grandeurs intervenant.

Exemple :

La deuxième loi de Newton affirme qu'un objet de masse inerte m soumis à une force \vec{F} est animé d'une accélération \vec{a} telle que :

$$\vec{F} = m \vec{a}.$$

La dimension de la masse m est M , celle d'une accélération $L.T^{-2}$, cette égalité est bien homogène (ie elle a bien un sens physique) puisque les dimensions des deux membres de l'équation sont les mêmes : $M.L.T^{-2}$.

iv. On utilisera souvent, par abus de notation bien commode, le symbole de l'unité pour désigner la grandeur : par exemple kg pour M . L'équation aux dimensions précédentes s'écrit alors : $[F] = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Remarquons au passage qu'on a ici utilisé cette équation aux dimensions sur des vecteurs : l'homogénéité impose dans ce cas que les dimensions des composantes des deux membres de l'égalité vectorielle soient égaux deux à deux.

La dimension d'une dérivée $\frac{df}{dx}$ est de même le quotient des dimensions de f et x : en effet la dérivée est définie comme la limite quand Δx tend vers 0 du taux d'accroissement $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, qui est un quotient d'une grandeur homogène à f par une grandeur homogène à x . Ce résultat se retrouve en lisant l'expression $\frac{df}{dx}$ comme le quotient de df par dx .

De la même manière, la dimension de $\int f(x)dx$ est le produit des dimensions de f et de x .

Exemple :

- pour la vitesse, on a $v = \frac{dx}{dt}$ et $[v] = L.T^{-1} = \frac{[x]}{[t]}$.
- pour le travail, on a $W = \int Fdl$, soit $[W] = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \times \text{m} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ ie $1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$
- pour la puissance, on a $\mathcal{P} = \frac{d\mathcal{E}_{\text{cin}}}{dt}$ soit $[\mathcal{P}] = [W]/T = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$, ie $1 \text{ W} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$.

⚠ On ne peut *sommer que des grandeurs ayant la même dimension* : une expression de la forme $A + B$ où A est une longueur et B une durée n'a aucun sens. Il est très important de vérifier la dimension de chaque expression : vous éviterez ainsi facilement un grand nombre d'erreurs.

II Incertitudes

II.1 Précision et justesse

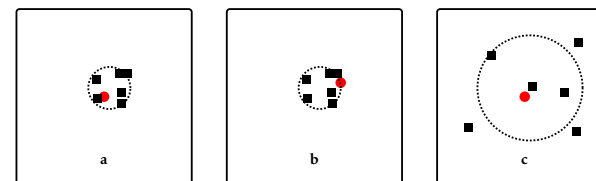
La mesure expérimentale de la grandeur (ou plutôt de la valeur de la grandeur) d'un objet est toujours entachée d'une certaine incertitude. On en distingue deux sources :

Imprécision Une mesure est dite *imprécise* si la répétition de la même mesure avec le même appareil et le même protocole ne donne pas exactement le même résultat. Par exemple la simple mesure de la longueur d'une barre à l'aide d'une règle pourra donner des résultats différents, la cause pouvant être l'épaisseur finie des traits, la difficulté de pointer précisément des longueurs entre deux graduations...

Fausseté Même si la mesure est très précise, la valeur mesurée dépendra de l'appareil de mesure : un mètre mesuré sur une règle ne sera pas exactement le mètre défini légalement (parce que la fabrication de la règle n'est pas infiniment précise, parce qu'elle a pu s'user...). On dit alors que la *justesse* de la mesure est faible.

La figure ci-dessous illustre les différences entre ces notions. On y a représenté différents résultats de mesure. Dans chaque cas, le symbole ● représente la valeur exacte (on dit aussi vraie) et les symboles ■ les valeurs mesurées. Le cercle (○) représente un intervalle de confiance estimé à partir des mesures réalisées.

Les données *a* correspondent donc à une mesure précise et juste, les données *b* à une mesure aussi précise mais peu juste, et les données *c* à une mesure juste mais peu précise.



II.2 L'erreur est inconnue

L'erreur, c'est-à-dire l'écart entre la vraie valeur et la mesure qui en est faite ne peut être connue puisque ses causes n'en sont pas maîtrisables. On peut néanmoins, et on doit, estimer l'incertitude d'une mesure.

III Traitement statistique : incertitude de type A

III.1 Erreurs systématiques et aléatoires

Les erreurs commises lors d'une mesure peuvent être de deux types :

Systématique Erreur identique commise à chaque mesure, par exemple liée à un défaut de l'appareil de mesure (un pèse-personne non horizontal indiquera toujours un poids inférieur au poids réel), ou au protocole de mesure (il vaut mieux se déshabiller pour mesurer son poids).

Aléatoire L'erreur est différente à chaque mesure. Par exemple :

- en raison des frottements, le poids indiqué par le pèse-personne pourra varier en fonction de la vitesse avec laquelle on s'y installe,
- sur des balances de précision un courant d'air peut exercer une pression ou une dépression sur le plateau et affecter la mesure du poids.

Les erreurs systématiques peuvent être corrigées, mais seulement si elles sont décelées. On peut en revanche espérer compenser les erreurs aléatoires en répétant la mesure un grand nombre de fois pour en déterminer la moyenne. Sur 100 pesées par exemple, on peut espérer que l'effet de courants d'air aléatoires se moyennera à zéro. Il est donc intéressant d'effectuer un traitement statistique des mesures.

III.2 Écart-type

On reproduit N fois la mesure d'une grandeur m et on note $m_i, i = 1..N$ les valeurs obtenues. On définit la valeur moyenne :

$$\bar{m} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m_i, \quad (1)$$

et l'écart type :

$$s = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (m_i - \bar{m})^2}, \quad (2)$$

ie la racine carrée de la moyenne des erreurs au carré. L'écart-type caractérise ainsi la précision du protocole de mesure : plus celui-ci est faible, plus la mesure est précise. On détermine ainsi ce qu'on nomme l'*incertitude de type A*.

Comme on n'effectue qu'un nombre limité de mesures, on n'obtient qu'une estimation empirique de la moyenne et de l'écart-type véritables, dont la détermination nécessiterait une infinité de mesures. On peut montrer que l'estimation précédente de l'écart-type tend à le sous-estimer. Pour cette raison, on utilisera plutôt l'écart type dit corrigé, défini par :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (m_i - \bar{m})^2}, \quad (3)$$

plus juste^v.

Vérifiez dans les fonctions statistiques de votre calculatrice comment calculer s et surtout σ .

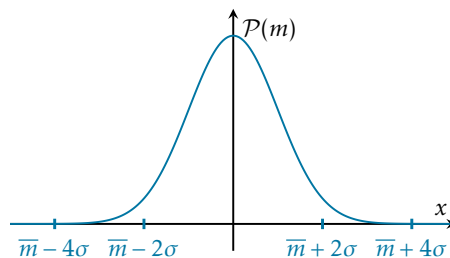
Dans toute la suite, on confondra implicitement le véritable écart-type et son estimation par l'écart-type corrigé. On le notera σ .

III.3 Intervalle de confiance

On définit également un *intervalle de confiance* Δm , en indiquant que, par exemple, 95% des résultats obtenus le seront dans un intervalle $[\bar{m} - \Delta m_{95}, \bar{m} + \Delta m_{95}]$. Cet intervalle de confiance sera relié à l'écart-type.

Pour illustrer cette relation, supposons que la répartition des erreurs soit connue^a. Pour des résultats prenant des valeurs continues, cette répartition doit être décrite par une *densité de probabilité* $\mathcal{P}(m)$ telle que la probabilité d'obtenir un résultat dans un petit intervalle dm autour de m soit $\mathcal{P}(m)dm$. Prenons l'exemple d'une fonction de répartition dite *gaussienne*, fondamentale en probabilités :

$$\mathcal{P}(m) = \frac{1}{\sigma_m \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(m - \bar{m})^2}{2\sigma_m^2}\right),$$



^a. Bien sûr, ce ne sera jamais le cas pour des erreurs expérimentales aléatoires.

On peut dans ce cas montrer que 95% des résultats obtenus le seront dans l'intervalle $[\bar{m} - 2\sigma_m, \bar{m} + 2\sigma_m]$. De la même manière on peut définir un intervalle de confiance, à 95% ou à une autre valeur, pour toute fonction statistique de répartition des erreurs.

III.4 Intérêt de la Gaussienne

Il existe un moyen de réduire arbitrairement l'écart type des résultats de mesure. Il suffit pour cela de calculer la moyenne m_N de N mesures, et étudier la répartition des valeurs m_N obtenues pour chaque série de N mesures (bien évidemment, la moyenne \bar{m}_N est la même que la moyenne de mesures individuelles \bar{m}).

On montre alors (théorème de la limite centrale en mathématiques) que quelle que soit la fonction (suffisamment régulière) de répartition des erreurs des mesures individuelles $\mathcal{P}(m)$, d'écart-type σ :

- La fonction de répartition $\mathcal{P}(m_N)$ des moyennes m_N de N mesures tend, quand la taille N des échantillons tend vers l'infini vers une gaussienne,

^v. Il présente également l'avantage de ne pas être défini pour $N = 1$, contrairement à σ . Il serait en effet gênant de pouvoir estimer la précision statistique d'un protocole en n'utilisant qu'une seule mesure...

- dont l'écart-type σ_N est réduit d'un facteur \sqrt{N} :

$$\sigma_N = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

En effectuant des moyennes de 100 mesures, on obtiendra donc un écart-type réduit d'un facteur 10, et donc une précision 10 fois plus grande.

De la même manière si les imprécisions d'une mesure résultent de plusieurs causes indépendantes, la répartition des erreurs globales suivra une distribution gaussienne quelles que soient les distributions des causes individuelles pour peu qu'elles soient assez nombreuses. En pratique, dès qu'on combine trois ou quatre sources d'erreurs, on constate que la distribution globale diffère peu d'une gaussienne.

Ce théorème confère de plus un rôle prépondérant à la fonction gaussienne en statistiques : c'est pour cette raison qu'on raisonne le plus souvent comme si la répartition des erreurs était gaussienne, bien qu'elle soit inconnue^{vi}.

IV Comment présenter un résultat en Sciences Physiques ?

IV.1 Estimer l'incertitude avec une seule mesure : incertitude de type B

Vous aurez rarement le temps de répéter un grand nombre de fois la même mesure puis de traiter statistiquement les résultats obtenus pour déterminer l'incertitude de type A. Vous ne pourrez donc pas définir un intervalle de confiance statistique. Néanmoins vous devrez estimer l'incertitude sur les mesures que vous réaliserez, en considérant entre autres la précision de l'appareil et la fiabilité de votre technique de mesure. Par exemple, le pointé d'une position sur une règle vous assurera une incertitude de l'ordre de la demi-graduation. Cette estimation est nommée *incertitude de type B*.

Pour la mesure d'une grandeur X , vous estimerez (on indiquera de quelle manière le moment venu) l'incertitude, qu'on notera traditionnellement ΔX . On définira également l'*incertitude relative*, sans dimension :

$$\left| \frac{\Delta X}{X} \right|,$$


qu'on exprimera le plus souvent comme un pourcentage. On dira par exemple qu'une masse est connue à 10% près, si l'incertitude sur sa masse m est $0,1 m$.

IV.2 Propagation des erreurs : méthode analytique

IV.2.a Somme ou différence de deux grandeurs

Supposons qu'on mesure les positions d_1 et d_2 pour en déduire la distance $D = d_2 - d_1$. Dans le cas très fréquent où les erreurs sur d_1 et d_2 (notées Δd_1 et Δd_2) ne sont pas corrélées, elle contribueront indépendamment à l'incertitude globale sur D . Une bonne estimation de l'incertitude de cette différence est :

$$\Delta D = \sqrt{\Delta d_1^2 + \Delta d_2^2}.$$

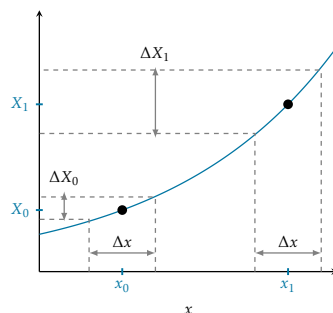
 : Les erreurs sont des grandeurs positives, qui doivent toujours s'ajouter, qu'on calcule la somme ou la différence de d_1 et d_2 puisqu'il n'y a aucune raison que l'erreur sur d_2 compense celle sur d_1 . Dans le cas où X ne dépend que d'une seule mesure x , $X = f(x)$, c'est la dérivée $\frac{df}{dx}$ qui reliera les incertitudes sur X et

^{vi}. Seul un nombre infini de mesures permettrait de la déterminer

x , selon :

$$\Delta X = \left| \frac{df}{dx} \right| \Delta x.$$

En effet, comme on l'illustre ci-contre, une variation de $\pm \Delta x$ autour d'un point x_0 induira une variation $\pm \Delta X_0$ autour de $X_0 = f(x_0)$, estimée par cette formule quand Δx est petit. On vérifie également que, sur le schéma ci-contre, l'incertitude ΔX_1 sur $X_1(x_1)$ est supérieure à celle en $X_0(x_0)$ bien que l'incertitude sur x soit la même car la dérivée $f'(x)$ prend une plus grande valeur au point x_1 qu'au point x_0 .



IV.2.b Autres fonctions de plusieurs grandeurs

Dans le cas où X dépend de plusieurs variables, on fait appel à la notion de *dérivée partielle*. Considérons la fonction $X = F(x_1, x_2)$ donnant le résultat final X en fonction des résultats de mesure x_1, x_2 . On peut dériver cette fonction F séparément par rapport à x_1 (resp. x_2), en considérant x_2 (resp. x_1) constante. On effectue ainsi la dérivée partielle de F , par rapport à x_1 (ou x_2), notée :

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}, \text{ lu « d rond F sur d rond } x_1 \text{ ».}$$

Exemple :

Dans le cas du TP «focométrie», la distance focale f' recherchée dépend de deux longueurs D et d , selon : $f' = \frac{D^2 - d^2}{4D}$, on a alors :

$$\frac{\partial f'}{\partial D} = \frac{1}{4} + \frac{d^2}{4D^2} \quad \frac{\partial f'}{\partial d} = -\frac{d}{2D}.$$

Le calcul de l'incertitude sur F à partir de celles sur x_1 et x_2 est souvent très compliqué, on se contentera donc d'une estimation, valable quand les erreurs sur les différents x_i sont indépendantes et faibles en valeur relative. On « propage » alors pour cela les incertitudes de la même manière^{vii} que précédemment selon :

$$\Delta X = \sqrt{\sum_i \left| \frac{\partial F}{\partial x_i} \Delta x_i \right|^2} = \sqrt{\left| \frac{\partial F}{\partial D} \Delta D \right|^2 + \left| \frac{\partial F}{\partial d} \Delta d \right|^2}.$$

Remarque :

À nouveau, on rencontrera parfois l'expression : $\Delta X = \sum_i \left| \frac{\partial F}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$.

vii. Le cas précédent de la somme n'est qu'un cas particulier de celui-ci.

IV.2.c Erreur relative : cas particulier fondamental

Si la fonction X s'exprime uniquement comme un produit ou quotient de puissances des valeurs x_i : $X = \prod_i x_i^{\alpha_i}$, l'erreur relative $\frac{\Delta X}{X}$ s'exprime simplement en fonction des erreurs relatives $\frac{\Delta x_i}{x_i}$. On peut en effet vérifier immédiatement que dans ce cas $\frac{\Delta X}{X} = \Delta \ln(X)$. Comme $\ln(X) = \sum_i \alpha_i \ln(x_i)$, on obtient :

$$\frac{\Delta X}{X} = \sqrt{\sum_i \left| \alpha_i \frac{\Delta x_i}{x_i} \right|^2}.$$

Exemple :

Considérons la dilution d'une masse m , connue à 1% près, d'un composé de masse molaire M connue à 5% dans un volume V connu à 0,1%. La concentration de la solution obtenue est $c = \frac{m}{MV}$, et sa précision relative sera simplement $\sqrt{10^{-4} + (5 \cdot 10^{-2})^2 + 10^{-6}} \approx 5,1\%$.

IV.3 Utilisation du logiciel Gum_MC

Pour éviter des calculs parfois fastidieux, on pourra utiliser un logiciel donnant l'incertitude ΔX en fonction des incertitudes de type A ou B sur chacune des grandeurs mesurées. Le logiciel Gum_mc (librement disponible à l'adresse http://jeanmarie.biansan.free.fr/gum_mc.html) permet de choisir pour chacune de ces grandeurs un modèle différent de répartition des valeurs : gaussien (nommé «normal»), rectangulaire (adapté pour la lecture sur une graduation)...

Le logiciel guide l'utilisateur à chaque étape et donne l'incertitude sur la valeur X selon deux méthodes différentes :

- en effectuant le calcul analytique de la propagation des incertitudes,
- en utilisant des tirages aléatoires de valeurs mesurées (méthode dite Monte-Carlo).

IV.4 Présentation

Une fois estimée l'incertitude ΔX comme précédemment, on peut présenter le résultat sous la forme :

$$X \pm \Delta X.$$

On préférera cependant utiliser l'incertitude relative p définie par $p \equiv \frac{\Delta X}{X}$ en écrivant :

$$X \pm p\%.$$

Exemple :

Considérons la détermination de l'intensité I d'un courant par la mesure de la différence de potentiel U aux bornes d'une résistance R . Le voltmètre indique 1,4361224 V. Dans ces conditions, le fabricant indique que l'incertitude relative est d'environ 10^{-4} . En revanche, la valeur de la résistance $R = 1,0 \Omega$ n'est le plus souvent précise qu'à 1% près. Le simple calcul de l'intensité du courant donne $I = U/R = 1,4361224$. On estime ensuite son incertitude relative selon : $\frac{\Delta I}{I} = \sqrt{\left| \frac{\Delta U}{U} \right|^2 + \left| \frac{\Delta R}{R} \right|^2} \approx \sqrt{10^{-17} + 10^{-4}} \approx 10^{-2}$. On écrira alors :

$$I = 1,4 \pm 1\% \text{ A} \quad \text{ou} \quad I = 1,44(1) \text{ A},$$

en arrondissant le résultat au dernier chiffre de l'ordre de grandeur de l'incertitude et en n'oubliant surtout pas de préciser l'unité.

Remarque :

On constate ici que l'incertitude est pratiquement égale à celle sur la résistance puisque cette dernière est beaucoup plus grande que celle sur la tension.