Loi du moment cinétique

Julien Cubizolles

Lycée Louis le Grand

vendredi 6 avril 2018

Loi du moment cinétique

Julien Cubizolles

Lycée Louis le Grand

vendredi 6 avril 2018

La force n'est pas toujours la description la plus utile des actions. Avec une même force musculaire on peut :

- échouer ou parvenir à desserrer un écrou selon la taille de la clef utilisée

La force n'est pas toujours la description la plus utile des actions. Avec une même force musculaire on peut :

- échouer ou parvenir à desserrer un écrou selon la taille de la clef utilisée
- échouer ou parvenir à gravir une même pente à vélo suivant le développement utilisé

La force n'est pas toujours la description la plus utile des actions. Avec une même force musculaire on peut :

- échouer ou parvenir à desserrer un écrou selon la taille de la clef utilisée
- échouer ou parvenir à gravir une même pente à vélo suivant le développement utilisé

On va définir une nouvelle grandeur dynamique, le moment d'une force, et une nouvelle grandeur cinématique le moment cinétique, permettant une écriture plus efficace du principe fondamental pour les mouvements de rotation : le théorème du moment cinétique

La force n'est pas toujours la description la plus utile des actions. Avec une même force musculaire on peut :

- échouer ou parvenir à desserrer un écrou selon la taille de la clef utilisée
- échouer ou parvenir à gravir une même pente à vélo suivant le développement utilisé

On va définir une nouvelle grandeur dynamique, le moment d'une force, et une nouvelle grandeur cinématique le moment cinétique, permettant une écriture plus efficace du principe fondamental pour les mouvements de rotation : le théorème du moment cinétique Pour une certaine catégorie de forces, dites centrales, on obtiendra une nouvelle constante du mouvement, tout comme l'énergie était constante pour les forces conservatives.

Définition

Définition (Produit vectoriel)

Dans une base orthonormée directe (orientation par la règle de la main droite ou gauche), on définit le produit vectoriel $\vec{a} \wedge \vec{b}$:

- antisymétrique : $\forall$ vecteurs $\vec{a}\,,\vec{b}$: $\quad \vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$
- bilinéaire : $\forall$ vecteurs $\vec{a}\,,\vec{b}_1\,,\vec{b}_2$ et $(\lambda\,,\mu) \in \mathbb{C}^2$: $\quad \vec{a} \wedge \left(\lambda\,\vec{b}_1 + \mu\,\vec{b}_2\right) = \lambda\,\vec{a} \wedge \vec{b}_1 + \mu\,\vec{a} \wedge \vec{b}_2$

Définition

Expression

on a aussi :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \left| \begin{array}{ccc} a_1 & & b_1 \\ a_2 & & b_2 \\ a_3 & \wedge & b_3 \\ \hline a_1 & & b_1 \\ a_2 & & b_2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{array} \right| \tag{1}$$

En particulier :

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \quad \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \quad \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2 .$$

Propriétés

- $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est orthogonal à $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Propriétés

- $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est orthogonal à $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
- $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires, l'un pouvant être nul.

Propriétés

- $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est orthogonal à $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
- $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires, l'un pouvant être nul.
- double produit vectoriel : $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\vec{c}$ (à vérifier sur les vecteurs de base)

Propriétés

- $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est orthogonal à $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
- $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires, l'un pouvant être nul.
- double produit vectoriel : $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\vec{c}$ (à vérifier sur les vecteurs de base)
- ☠ il n'est pas additif $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) \neq (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$: ne pas écrire $\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}$

Interprétations géométriques

Les normes de vecteurs construits avec des produits vectoriels ont des interprétations géométriques :

- $\left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right| = ab \left|\sin(\vec{a}, \vec{b})\right|$ est l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
- On définit le produit mixte de trois vecteurs, noté $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ comme le scalaire $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$. Sa valeur absolue $\left|\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)\right|$ est le volume du parallélépipède construit sur $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$
- il est stable par permutation circulaire :

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \wedge \vec{a}) \cdot \vec{b} = \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) \cdot \vec{a}$$

Moment cinétique par rapport à un point

Définition (Moment cinétique par rapport à un point)

Soit un point matériel de masse m de position M dans un référentiel $\mathcal{R}$, animé d'une quantité de mouvement $\vec{p}_{\mathcal{R}} = m\overrightarrow{v_{\mathcal{R}}}(M)$ par rapport à $\mathcal{R}$ et O un point de $\mathcal{R}$. On nomme moment cinétique par rapport à O dans $\mathcal{R}$, noté $\overrightarrow{\sigma_{\mathcal{R}/O}}(M)$ le vecteur :

$$\overrightarrow{\sigma_{\mathcal{R}/O}}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}_{\mathcal{R}} = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}}.$$

Moment cinétique par rapport à un point

Définition (Moment cinétique par rapport à un point)

Soit un point matériel de masse m de position M dans un référentiel $\mathcal{R}$, animé d'une quantité de mouvement $\vec{p}_{\mathcal{R}} = m\overrightarrow{v_{\mathcal{R}}}(M)$ par rapport à $\mathcal{R}$ et O un point de $\mathcal{R}$. On nomme moment cinétique par rapport à O dans $\mathcal{R}$, noté $\overrightarrow{\sigma_{\mathcal{R}/O}}(M)$ le vecteur :

$$\overrightarrow{\sigma_{\mathcal{R}/O}}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}_{\mathcal{R}} = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}}.$$

- $\overrightarrow{\sigma_{/O}}(M)$ de dimension $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$
- $\overrightarrow{\sigma_{/O}}(M)$ nul si $\vec{v}$ passe par O
- $\overrightarrow{\sigma_{/O}}(M)$ de direction orthogonale au plan du mouvement
- d'autant plus élevé qu'on est loin et et que la vitesse orthoradiale est importante
- on omettra les indices $\mathcal{R}$ tant qu'on ne change pas de référentiel

Moment cinétique par rapport à un point

Définition (Moment cinétique par rapport à un point)

Soit un point matériel de masse m de position M dans un référentiel $\mathcal{R}$, animé d'une quantité de mouvement $\vec{p}_{\mathcal{R}} = m\overrightarrow{v_{\mathcal{R}}}(M)$ par rapport à $\mathcal{R}$ et O un point de $\mathcal{R}$. On nomme moment cinétique par rapport à O dans $\mathcal{R}$, noté $\overrightarrow{\sigma_{\mathcal{R}/O}}(M)$ le vecteur :

$$\overrightarrow{\sigma_{\mathcal{R}/O}}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}_{\mathcal{R}} = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}}.$$

Cas d'un mouvement plan

Dans le cas d'un mouvement dans un plan $\mathcal{P}$ orthogonal à $\vec{e}$ dans lequel les angles sont orientés par $\vec{e}$, on a :

$$\overrightarrow{\sigma_{/O}}(M) = mr^2\dot{\theta}\vec{e}.$$

D'un point matériel par rapport à un axe orienté

Définition (Moment cinétique par rapport à un axe orienté)

Soit un point matériel de masse m de position M dans un référentiel $\mathcal{R}$, Δ un axe orienté par $\vec{e}$ unitaire et O un point quelconque de Δ. On nomme moment cinétique par rapport à l'axe Δ le scalaire $\sigma_{/\Delta}(M) = \overrightarrow{\sigma_{/O}}(M) \cdot \vec{e}$.

$\sigma_{/\Delta}(M)$ a la même dimension que $\overrightarrow{\sigma_{/O}}(M)$

Indépendance du point choisi

Le moment cinétique par rapport à l'axe Δ est indépendant du point O le long de l'axe Δ choisi pour sa définition.

Cas d'un mouvement plan

autres expressions, pour un mouvement dans un plan orthogonal à $\overrightarrow{e_z}$:

Cas d'un mouvement plan

Coordonnées cylindriques

On peut écrire :

$$\sigma_{/\Delta}(M) = mr^2\dot{\theta}.$$

Cas d'un mouvement plan

Coordonnées cylindriques

On peut écrire :

$$\sigma_{/\Delta}(M) = mr^2\dot{\theta}.$$

Purement géométrique : paramètre d'impact

La valeur absolue de $\sigma_{/\Delta}(M)$ peut s'écrire :

$$\left|\sigma_{/\Delta}(M)\right| = mvb,$$

avec v le module de la vitesse et b le paramètre d'impact, c'est-à-dire la distance à laquelle M passerait de l'axe Δ, si sa trajectoire était rectiligne dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}(M)$.

Cas d'un mouvement plan

Coordonnées cylindriques

On peut écrire :

$$\sigma_{/\Delta}(M) = mr^2\dot{\theta}.$$

Purement géométrique : paramètre d'impact

La valeur absolue de $\sigma_{/\Delta}(M)$ peut s'écrire :

$$\left|\sigma_{/\Delta}(M)\right| = mvb,$$

avec v le module de la vitesse et b le paramètre d'impact, c'est-à-dire la distance à laquelle M passerait de l'axe Δ, si sa trajectoire était rectiligne dirigée par le vecteur $\vec{v}(M)$.

Ces expressions sont valables à chaque instant du mouvement

- $mr^2\dot{\theta}$ utile pour une comète proche du soleil
- mbv utile pour une comète loin du soleil (en MRU)

Moment cinétique d'un système

on définit naturellement :

Définition (Moment cinétique d'un système)

On définit le moment cinétique par rapport à un point d'un système de points matériels comme la somme des moments cinétiques de chacun des points matériels qui le constituent.

$$\overrightarrow{\sigma_{\mathcal{R}/O}}(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{\sigma_{\mathcal{R}/O}}(M_i) = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OM_i} \wedge \overrightarrow{p_{\mathcal{R}}}(M_i).$$

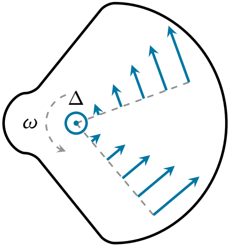
Moment cinétique d'un système

Déterminer le moment cinétique par rapport à un axe orienté Δ d'un ensemble de trois points matériels M_1, M_2 :

- M_1 décrivant un mouvement circulaire uniforme de rayon R_1 à la vitesse v_1 dans le sens direct autour de Δ dans un plan orthogonal à Δ noté $\mathcal{P}$,
- M_2 décrivant un mouvement circulaire uniforme de rayon R_2 à la vitesse v_2 dans le sens indirect autour de Δ dans le même plan $\mathcal{P}$,
- M_3 décrivant un mouvement rectiligne uniforme de vitesse v_3 dans le même plan $\mathcal{P}$, la distance entre la droite de sa trajectoire et Δ étant R_3.

Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe fixe

chacun des points d'un solide est animé d'un mouvement circulaire de rayon r_i constant, à la même vitesse angulaire ω



Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe fixe

Définition (Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe fixe)

Soit un solide $\mathcal{S}$ en rotation dans un référentiel $\mathcal{R}$ à la vitesse angulaire $\overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}}} = \omega_{\mathcal{R}} \overrightarrow{e}$ autour d'un axe Δ fixe dans $\mathcal{R}$, orienté par un vecteur unitaire $\overrightarrow{e}$. Le moment cinétique par rapport à l'axe Δ est proportionnel à $\omega_{\mathcal{R}}$ et on nomme *moment d'inertie par rapport à l'axe* Δ, notée J_{Δ}, la constante telle que :

$$\sigma_{\mathcal{R}/\Delta}(\mathcal{S}) = J_{\Delta}\omega_{\mathcal{R}}.$$

Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe fixe

Définition (Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe fixe)

Soit un solide $\mathcal{S}$ en rotation dans un référentiel $\mathcal{R}$ à la vitesse angulaire $\overrightarrow{\omega_\mathcal{R}} = \omega_\mathcal{R} \vec{e}$ autour d'un axe Δ fixe dans $\mathcal{R}$, orienté par un vecteur unitaire $\vec{e}$. Le moment cinétique par rapport à l'axe Δ est proportionnel à $\omega_\mathcal{R}$ et on nomme *moment d'inertie par rapport à l'axe* Δ, notée J_Δ, la constante telle que :

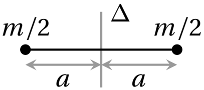
$$\sigma_{\mathcal{R}/\Delta}(\mathcal{S}) = J_\Delta \omega_\mathcal{R}.$$

- J_Δ, constante positive décrivant la répartition des masses par rapport à l'axe
- J_Δ caractérise l'inertie des variations de ω, analogue de la masse pour la loi de la qdm
- d'autant plus grand qu'il y a beaucoup de masse loin de l'axe

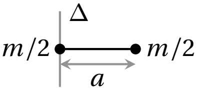
Exemples de moments d'inertie

- calcul de J par une intégrale continue de volume, HP
- on compare quelques exemples pour des objets de même masse totale m

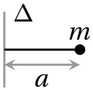
Exemples de moments d'inertie



$J_\Delta = ma^2$

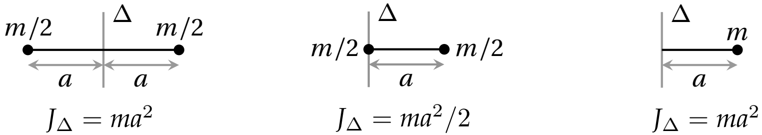


$J_\Delta = ma^2/2$



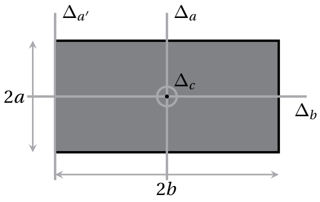
$J_\Delta = ma^2$

Exemples de moments d'inertie



- $J = ma^2$ si toutes les masses sont à a (symétrique ou non)
- $J \leqslant ma^2$ si toutes les masses sont entre 0 et a
- une masse sur l'axe ne contribue pas à J

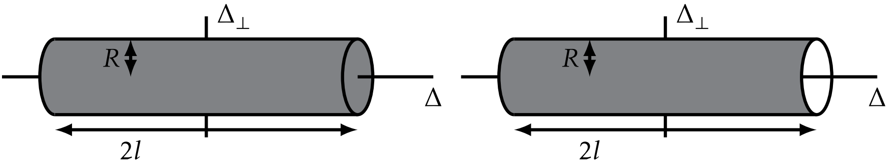
Exemples de moments d'inertie



parallélépipède rectangle
$2a \times 2b \times 2c$, uniforme

-
  - $J_{\Delta_a} = m(b^2 + c^2)/3$
  - $J_{\Delta_{a'}} = m(4b^2 + c^2)/3$
  - $J_{\Delta_b} = m(a^2 + c^2)/3$
  - $J_{\Delta_c} = m(a^2 + b^2)/3$
- J_{Δ_x} maximal quand les masses s'éloignent le plus de Δ_x
- J_{Δ_x} ne fait pas intervenir la dimension selon Δ_x

Exemples de moments d'inertie



cylindre plein uniforme

$$J_\Delta = \frac{1}{2}mR^2 \quad J_\perp = \frac{mR^2}{4} + \frac{ml^2}{3}$$

cylindre creux uniforme

$$J_\Delta = mR^2 \quad J_\perp = \frac{1}{2}mR^2 + \frac{ml^2}{3}$$

Définition

Définition (Moment d'une force par rapport à un point)

Soit un point matériel de position M, soumis à une force $\overrightarrow{F}$ et O un point quelconque. On nomme moment par rapport à O de la force $\overrightarrow{F}$ le vecteur $\overrightarrow{\mathcal{M}_{/O}}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}$.

Définition

Définition (Moment d'une force par rapport à un point)

Soit un point matériel de position M, soumis à une force $\vec{F}$ et O un point quelconque. On nomme moment par rapport à O de la force $\vec{F}$ le vecteur $\overrightarrow{\mathcal{M}_{/O}}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$.

- dimension d'une force par une longueur : $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}$, *ie* $[\overrightarrow{\sigma_{/O}}(M)]/T$

Définition

Définition (Moment d'une force par rapport à un point)

Soit un point matériel de position M, soumis à une force $\vec{F}$ et O un point quelconque. On nomme moment par rapport à O de la force $\vec{F}$ le vecteur $\overrightarrow{\mathcal{M}_{/O}}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$.

- dimension d'une force par une longueur : $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}$, *ie* $[\overrightarrow{\sigma_{/O}}(M)]/T$
- $\overrightarrow{\mathcal{M}_{/O}}(\vec{F})$ nul pour $\vec{F} // \overrightarrow{OM}$, *ie* quand la force « passe » par le point O.

Définition

Définition (Moment d'une force par rapport à un point)

Soit un point matériel de position M, soumis à une force $\vec{F}$ et O un point quelconque. On nomme moment par rapport à O de la force $\vec{F}$ le vecteur $\overrightarrow{\mathcal{M}_{/O}}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$.

- dimension d'une force par une longueur : $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}$, *ie* $[\overrightarrow{\sigma_{/O}}(M)]/T$
- $\overrightarrow{\mathcal{M}_{/O}}(\vec{F})$ nul pour $\vec{F} // \overrightarrow{OM}$, *ie* quand la force « passe » par le point O.
- $\overrightarrow{\mathcal{M}_{/O}}(\vec{F})$ est orthogonal au plan engendré par $\vec{F}$ et $\overrightarrow{OM}$

Définition

$\overrightarrow{\mathcal{M}_{/O}}(\vec{F})$ est vectoriel, utile pour l'étude de mouvements dans l'espace.
Pour un mouvement de rotation plan, à un seul degré de liberté, on n'a besoin que d'une grandeur scalaire :

Définition

Définition (Moment d'une force par rapport à un axe orienté)

Soient :

- Δ un axe orienté par un vecteur $\vec{e}$,
- un point matériel de position M, soumis à une force $\vec{F}$,
- et O un point quelconque de Δ.

On nomme moment de la force $\vec{F}$ par rapport à Δ le scalaire $\mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}) = \overrightarrow{\mathcal{M}_{/O}}(\vec{F}) \cdot \vec{e}$

Définition

Définition (Moment d'une force par rapport à un axe orienté)

Soient :

- Δ un axe orienté par un vecteur $\vec{e}$,
- un point matériel de position M, soumis à une force $\vec{F}$,
- et O un point quelconque de Δ.

On nomme moment de la force $\vec{F}$ par rapport à Δ le scalaire $\mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}) = \overrightarrow{\mathcal{M}_{/O}}(\vec{F}) \cdot \vec{e}$

- $\mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F})$ a la même dimension que $\overrightarrow{\mathcal{M}_{/O}}(\vec{F})$
- $\vec{e}$ définit une orientation des angles dans les plans perpendiculaires à Δ

Définition

Définition (Moment d'une force par rapport à un axe orienté)

Soient :

- Δ un axe orienté par un vecteur $\vec{e}$,
- un point matériel de position M, soumis à une force $\vec{F}$,
- et O un point quelconque de Δ.

On nomme moment de la force $\vec{F}$ par rapport à Δ le scalaire
$\mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}) = \overrightarrow{\mathcal{M}_{/O}}(\vec{F}) \cdot \vec{e}$

Indépendance du point de calcul

Le moment de la force $\vec{F}$ par rapport à l'axe Δ est indépendant du point O le long de l'axe Δ choisi pour sa définition.

Bras de levier

L'expression précédente de $\mathcal{M}_{/\Delta}(\overrightarrow{F})$ est peu commode puisqu'elle fait appel à $\overrightarrow{\mathcal{M}_{/O}}(\overrightarrow{F})$, dont on veut se passer...

Bras de levier

Définition (Bras de levier)

Soit $\vec{F}$ une force et Δ un axe orienté. On définit $\vec{F}_\perp$ la composante de $\vec{F}$ orthogonale à Δ.
On nomme bras de levierpar rapport à un axe Δ d'une force $\vec{F}$ exercée sur un point matériel de position M la distance $d = HH'$ entre

- l'axe Δ,
- et la droite $D = (M, \vec{F}_\perp)$

On a alors :

$$\mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}) = \begin{cases} +F_\perp d & \text{si } \vec{F} \text{ tend à faire tourner le PM autour de } \Delta \text{ dans le sens positif défini par } \vec{e} \\ -F_\perp d & \text{si } \vec{F} \text{ tend à faire tourner le PM autour de } \Delta \text{ dans le sens négatif} \end{cases}.$$

Interprétation

Interprétation

- $\vec{F}$ parallèle à Δ : $\mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}) = 0$

Interprétation

- $\vec{F}$ parallèle à Δ : $\mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}) = 0$
- $\vec{F}$ orthogonale à Δ : $|\mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F})| = |F|d$

Interprétation

- $\vec{F}$ parallèle à Δ : $\mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}) = 0$
- $\vec{F}$ orthogonale à Δ : $|\mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F})| = |F|d$
- $\vec{F}$ passe par Δ : $d = 0 \Rightarrow \mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}) = 0.$

Interprétation

- $\vec{F}$ parallèle à Δ : $\mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}) = 0$
- $\vec{F}$ orthogonale à Δ : $|\mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F})| = |F|d$
- $\vec{F}$ passe par Δ : $d = 0 \Rightarrow \mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}) = 0.$

Disposer d'un grand bras de levier permet de mettre plus facilement en rotation, à intensité de force constante, on « multiplie » l'effet de la force sur la rotation :

Interprétation

- $\vec{F}$ parallèle à Δ : $\mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}) = 0$
- $\vec{F}$ orthogonale à Δ : $|\mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F})| = |F|d$
- $\vec{F}$ passe par Δ : $d = 0 \Rightarrow \mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}) = 0$.

Disposer d'un grand bras de levier permet de mettre plus facilement en rotation, à intensité de force constante, on « multiplie » l'effet de la force sur la rotation :

- Archimède : « Πα βω και χαριστιωνι ταν γαν κινησω πασαν »

Interprétation

- $\vec{F}$ parallèle à Δ : $\mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}) = 0$
- $\vec{F}$ orthogonale à Δ : $|\mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F})| = |F|d$
- $\vec{F}$ passe par Δ : $d = 0 \Rightarrow \mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}) = 0.$

Disposer d'un grand bras de levier permet de mettre plus facilement en rotation, à intensité de force constante, on « multiplie » l'effet de la force sur la rotation :

- Archimède : « Πα βω και χαριστιωνι ταν γαν κινησω πασαν »
- pieds de biche, clefs mécaniques

Interprétation

- $\vec{F}$ parallèle à Δ : $\mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}) = 0$
- $\vec{F}$ orthogonale à Δ : $|\mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F})| = |F|d$
- $\vec{F}$ passe par Δ : $d = 0 \Rightarrow \mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}) = 0.$

Disposer d'un grand bras de levier permet de mettre plus facilement en rotation, à intensité de force constante, on « multiplie » l'effet de la force sur la rotation :

- Archimède : « Πα βω και χαριστιωνι ταν γαν κινησω πασαν »
- pieds de biche, clefs mécaniques
- pignons de vélo

Exercice

1. On place une masse m sur une brouette, à la distance d de l'axe des roues. On cherche à soulever la brouette en exerçant une force F sur l'extrémité des poignées situées à la distance D de ce même axe. Comparer les moments du poids de la masse m et de la force F et commenter.
2. Justifier la position des poignées de porte, sur le côté opposé à l'axe de rotation.

Moment résultant des forces

un objet non ponctuel pourra être soumis à plusieurs forces s'appliquant en des points différents

Moment résultant des forces

Définition (Moment résultant d'un systèmes de forces)

Le *moment résultant d'un système de* N *forces* $\left\{\vec{F}_i\right\}_{i=1..N}$ appliquées en différents points $\{P_i\}_{i=1..N}$ d'un objet est la somme des moments des différentes forces.

On notera $\overrightarrow{\mathcal{M}_{/O}}$ un moment par rapport à un point :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{/O}} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{\mathcal{M}_{/O}}(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OP_i} \wedge \vec{F}_i.$$

On notera $\mathcal{M}_{/\Delta}$ un moment par rapport à un axe orienté Δ de vecteur unitaire directeur $\vec{e}$:

$$\mathcal{M}_{/\Delta} = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}_i) = \vec{e} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{O_\Delta P_i} \wedge \vec{F}_i\right),$$

avec O_Δ un point quelconque de l'axe Δ.

Couple

cas particulier quand on cherche à faire tourner un objet, sans agir sur sa quantité de mouvement :

Couple

cas particulier quand on cherche à faire tourner un objet, sans agir sur sa quantité de mouvement :

Définition (Couple d'un système de forces)

On nomme couple un système de forces dont la force résultante est nulle mais dont le moment résultant en un point O quelconque, noté $\vec{\mathcal{C}}$, est non nul.

Couple

cas particulier quand on cherche à faire tourner un objet, sans agir sur sa quantité de mouvement :

Définition (Couple d'un système de forces)

On nomme couple un système de forces dont la force résultante est nulle mais dont le moment résultant en un point O quelconque, noté $\vec{\mathcal{C}}$, est non nul.

cas d'un volant de voiture tenu en « 9h15 »

Couple

cas particulier quand on cherche à faire tourner un objet, sans agir sur sa quantité de mouvement :

Définition (Couple d'un système de forces)

On nomme couple un système de forces dont la force résultante est nulle mais dont le moment résultant en un point O quelconque, noté $\vec{\mathcal{C}}$, est non nul.

Indépendance du point de calcul

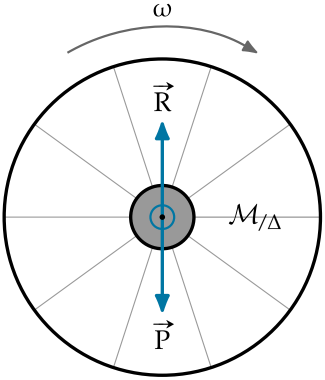
Le moment d'un couple est indépendant du point par rapport auquel on le calcule.

Actions sur un solide

on admet qu'on pourra décrire toutes les actions sur un solide comme :

Actions sur un solide

on admet qu'on pourra décrire toutes les actions sur un solide comme :



Roue avant d'un vélo retourné sur sa selle

- forces s'exerçant en un point de l'objet : $\vec{R}$ sur l'axe, $\vec{P}$ au centre d'inertie (on le montrera plus loin)
- moment $\mathcal{M}_{/\Delta}$ par rapport à l'axe modélisant les frottements solides
- $\vec{R}$ et $\mathcal{M}_{/\Delta}$ représentent l'ensemble des actions de contact entre l'axe et la fourche

Liaison pivot

Définition (Liaison pivot)

Une liaison pivot est un dispositif mécanique permettant la rotation d'un objet autour d'un axe fixe tout en empêchant la translation selon ce même axe.

- charnière d'un placard, hayon de coffre, axe de rotation d'une chaise de bureau...
- seule la rotation est possible
- bon moyen d'avoir un solide en rotation autour d'un axe fixe

Par rapport à un point

- la force gouverne l'évolution temporelle de la quantité de mouvement : de même le moment de la force gouverne l'évolution temporelle d'une nouvelle grandeur cinématique.
- expression du principe fondamental de la dynamique adaptée pour les mouvements de rotation, il s'agit donc d'un théorème

Par rapport à un point

Théorème (du moment cinétique par rapport à un point de vitesse nulle)

Soit un point matériel de masse m de position M dans un référentiel $\mathcal{R}_g$ galiléen et O un point de vitesse nulle de $\mathcal{R}_g$.
La dérivée par rapport au temps dans $\mathcal{R}_g$ du moment cinétique en O du point matériel est égale au moment en O de la résultante $\vec{F}$ des forces qui lui sont appliquées :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma_{/O}}(M)}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_g} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{/O}}(\vec{F})$$

Par rapport à un point

Théorème (du moment cinétique par rapport à un point de vitesse nulle)

Soit un point matériel de masse m de position M dans un référentiel $\mathcal{R}_g$ galiléen et O un point de vitesse nulle de $\mathcal{R}_g$.
La dérivée par rapport au temps dans $\mathcal{R}_g$ du moment cinétique en O du point matériel est égale au moment en O de la résultante $\vec{F}$ des forces qui lui sont appliquées :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma_{/O}}(M)}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_g} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{/O}}(\vec{F})$$

- même structure que la loi de la qdm : $m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}(G)}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{F_{ext}}$
- une force exercée en un point ne modifiera pas $\overrightarrow{\sigma_{/O}}(M)$, si elle « passe » par O

Par rapport à un axe fixe

Théorème (du moment cinétique (axe de vitesse nulle))

Soit un point matériel de masse m de position M dans un référentiel $\mathcal{R}_g$ galiléen et Δ un axe de vitesse nulle de $\mathcal{R}_g$.
La dérivée par rapport au temps dans $\mathcal{R}_g$ du moment cinétique par rapport à Δ du point matériel est égale au moment en Δ de la résultante $\overrightarrow{F}$ des forces qui lui sont appliquées :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma_{/\Delta}(M)}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_g} = \mathcal{M}_{/\Delta}(\overrightarrow{F}).$$

une force ne modifiera pas $\sigma_{/\Delta}(M)$ si son bras de levier est nul, *ie* si elle est parallèle à Δ ou « passe » par Δ

Actions intérieures et extérieures

Actions intérieures et extérieures

- les forces intérieures n'influent pas sur le mouvement de G

Actions intérieures et extérieures

- les forces intérieures n'influent pas sur le mouvement de G
- on constate expérimentalement qu'il en est de même pour la rotation d'un système : son moment cinétique se conserve s'il est isolé

Actions intérieures et extérieures

- les forces intérieures n'influent pas sur le mouvement de G
- on constate expérimentalement qu'il en est de même pour la rotation d'un système : son moment cinétique se conserve s'il est isolé

Loi du moment cinétique par rapport à un point fixe

Soit $\mathcal{S}$ un système non ponctuel fermé et O un point fixe d'un référentiel $\mathcal{R}_g$ galiléen.
La dérivée par rapport au temps dans $\mathcal{R}_g$ du moment cinétique par rapport à O dans $\mathcal{R}_g$ du système est égale au moment résultant par rapport à O des seules forces extérieures qui lui sont appliquées :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma_{\mathcal{R}_g/O}}(\mathcal{S})}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_g} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{\mathrm{ext}/O}}.$$

Actions intérieures et extérieures

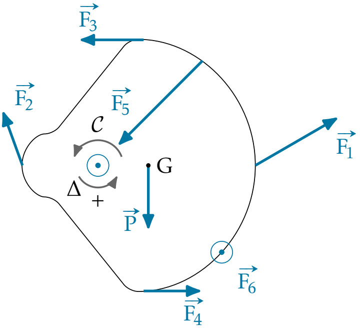
Loi du moment cinétique par rapport à un point fixe

Soit $\mathcal{S}$ un système non ponctuel fermé et O un point fixe d'un référentiel $\mathcal{R}_g$ galiléen.
La dérivée par rapport au temps dans $\mathcal{R}_g$ du moment cinétique par rapport à O dans $\mathcal{R}_g$ du système est égale au moment résultant par rapport à O des seules forces extérieures qui lui sont appliquées :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma_{\mathcal{R}_g/O}}(\mathcal{S})}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_g} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{\text{ext}/O}}.$$

- il s'agit d'une loi : on ne démontre pas
- pour un système de 2 points matériels, cela implique que $\overrightarrow{F}_{1\to 2}$ est colinéaire à $\overrightarrow{e}_{1\to 2}$.

Exercice



1. Déterminer graphiquement les bras de leviers par rapport à l'axe Δ des différentes forces appliquées sur le solide en rotation ci-contre.
2. En déduire l'expression du moment résultant qui lui est appliqué.
3. Que peut-on dire de l'action des forces $\overrightarrow{F_3}$ et $\overrightarrow{F_4}$.

Solide en rotation autour d'un axe fixe

expression scalaire très simple :

Solide en rotation autour d'un axe fixe

Théorème (du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe)

Soit $\mathcal{S}$ un solide en rotation autour d'un axe orienté Δ fixe dans un référentiel $\mathcal{R}_g$ galiléen, J_Δ le moment d'inertie de $\mathcal{S}$ par rapport à l'axe Δ et $\omega_{\mathcal{R}_g}$ la vitesse de rotation autour de Δ dans $\mathcal{R}_g$.
Le produit de J_Δ et de la dérivée temporelle de $\omega_{\mathcal{R}_g}$ est égal au moment résultant par rapport à l'axe Δ des seules forces extérieures :

$$J_\Delta \left(\frac{\mathrm{d}\omega_{\mathcal{R}_g}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_g} = \mathcal{M}_{ext/\Delta}.$$

Modèle

- pendule simple = point matériel au bout d'un dispositif sans masse
- pendule pesant = objet étendu, et on prend en compte toutes les masses (tige)

Modèle

- pendule simple = point matériel au bout d'un dispositif sans masse
- pendule pesant = objet étendu, et on prend en compte toutes les masses (tige)

Définition (Pendule pesant)

Un pendule pesant est un solide en rotation sous l'effet de son poids autour d'un axe fixe.

Modèle

Définition (Pendule pesant)

Un pendule pesant est un solide en rotation sous l'effet de son poids autour d'un axe fixe.

le mouvement est nécessairement plan, tous les vecteurs vitesse étant orthogonaux à l'axe Δ de rotation

Actions exercées

- poids de résultante $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{e_z}$;
- les actions de contact sur l'axe, de résultante notée $\overrightarrow{R}$ et de moment par rapport à l'axe noté $\mathcal{M}_{/\Delta}$;
- les forces de frottement avec l'air.

Actions exercées

- poids de résultante $\vec{P} = -mg\vec{e_z}$;
- les actions de contact sur l'axe, de résultante notée $\vec{R}$ et de moment par rapport à l'axe noté $\mathcal{M}_{/\Delta}$;
- les forces de frottement avec l'air.

Moment du poids

L'action de la pesanteur sur un système $\mathcal{S}$ de masse m peut être décrite comme une force $\vec{P} = m\vec{g}$ appliquée au centre d'inertie G du système, c'est-à-dire telle que son moment résultant par rapport à un point O quelconque est $\overrightarrow{\mathcal{M}_{/O}}(\vec{P}) = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{P}$.

Actions exercées

- poids de résultante $\vec{P} = -mg\vec{e_z}$;
- les actions de contact sur l'axe, de résultante notée $\vec{R}$ et de moment par rapport à l'axe noté $\mathcal{M}_{/\Delta}$;
- les forces de frottement avec l'air.

Moment du poids

L'action de la pesanteur sur un système $\mathcal{S}$ de masse m peut être décrite comme une force $\vec{P} = m\vec{g}$ appliquée au centre d'inertie G du système, c'est-à-dire telle que son moment résultant par rapport à un point O quelconque est $\overrightarrow{\mathcal{M}_{/O}}(\vec{P}) = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{P}$.

- on le montre dans le cas d'un système de deux masses ponctuelles liées ($\vec{g}$ uniforme)

+☠ on ne peut pas déterminer a priori un point d'application pour les forces de frottement

Actions exercées

Moment du poids

L'action de la pesanteur sur un système $\mathcal{S}$ de masse m peut être décrite comme une force $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$ appliquée au centre d'inertie G du système, c'est-à-dire telle que son moment résultant par rapport à un point O quelconque est $\overrightarrow{\mathcal{M}_{/O}}(\overrightarrow{P}) = \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{P}$.

Travail et énergie potentielle du poids d'un solide

Le travail élémentaire des forces de pesanteur exercées sur un solide de masse m, dont l'altitude z du centre d'inertie varie de $\mathrm{d}z$, est $\delta W = -mg\,\mathrm{d}z$. On peut donc leur associer l'énergie potentielle de pesanteur :

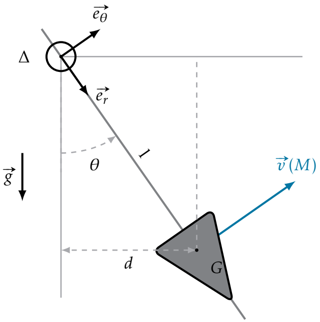
$$\mathcal{E}_{\text{pot}} = mgz + \text{cste}.$$

Équation différentielle d'évolution

- le bras de levier du poids est $d = l\sin(\theta)$
- on néglige les frottements pour l'instant

Équation différentielle d'évolution

- le bras de levier du poids est $d = l\sin(\theta)$
- on néglige les frottements pour l'instant



$$J_\Delta \ddot{\theta} = \mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{P}) = -mgl\sin(\theta),$$

soit : $$\ddot{\theta} + \frac{mgl}{J_\Delta}\sin(\theta) = 0$$

ou : $$\ddot{\theta} + \Omega^2 \sin(\theta) = 0,$$

avec $\Omega = \sqrt{mgl/J_\Delta}$

Lien avec le pendule simple

- pendule simple de longueur l et masse m = pendule pesant de moment d'inertie $J = ml^2$

Lien avec le pendule simple

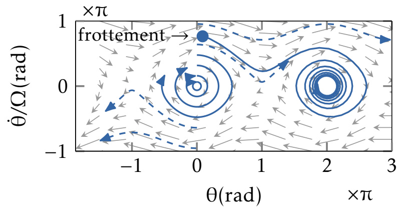
- pendule simple de longueur l et masse m = pendule pesant de moment d'inertie $J = ml^2$
- la loi du moment cinétique redonne bien la même équation différentielle d'évolution que celles de la qdm, de l'énergie mécanique

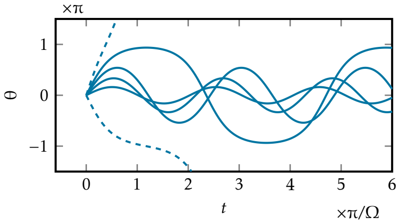
Lien avec le pendule simple

- pendule simple de longueur l et masse m = pendule pesant de moment d'inertie $J = ml^2$
- la loi du moment cinétique redonne bien la même équation différentielle d'évolution que celles de la qdm, de l'énergie mécanique
- la loi du moment cinétique évite de prendre en compte certaines actions de contact de moment nul ($\overrightarrow{R}$)

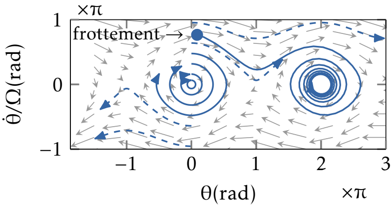
Synthèse

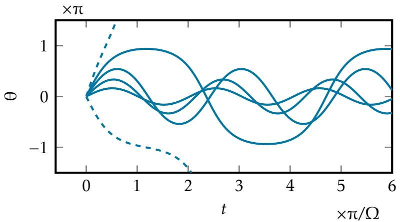
Synthèse





Synthèse





- bifurcation entre mouvement pendulaire et mouvement révolutif quand l'énergie cinétique maximale atteint $2mgl$
- oscillations de faible amplitude isochrones
- période croissante avec l'amplitude sinon

Équilibre d'un solide en rotation

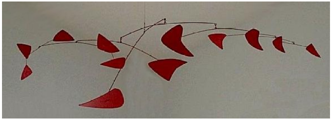
Équilibre d'un solide en rotation

Les positions d'équilibre d'un solide $\mathcal{S}$ en rotation autour d'un axe fixe Δ sont celles où le moment résultant en Δ des forces extérieures qui lui sont appliquées est nul.
Dans le cas d'un pendule pesant sans frottement, le centre d'inertie G est à l'aplomb de l'axe Δ quand $\mathcal{S}$ est à l'équilibre. La position d'équilibre est stable si G est « au-dessous » de l'axe Δ.

Équilibre d'un solide en rotation

Équilibre d'un solide en rotation

Les positions d'équilibre d'un solide $\mathcal{S}$ en rotation autour d'un axe fixe Δ sont celles où le moment résultant en Δ des forces extérieures qui lui sont appliquées est nul.
Dans le cas d'un pendule pesant sans frottement, le centre d'inertie G est à l'aplomb de l'axe Δ quand $\mathcal{S}$ est à l'équilibre. La position d'équilibre est stable si G est « au-dessous » de l'axe Δ.



le centre d'inertie de chaque « sous-mobile » est à l'aplomb de la ficelle qui le soutient

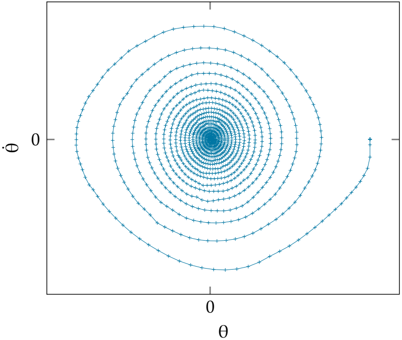
Effet des frottements

- frottements solides sur l'axe de moment $\mathcal{M}_{/\Delta}$
- frottements fluides avec l'air de moment $\propto -\dot{\theta}^2$

Effet des frottements

- frottements solides sur l'axe de moment $\mathcal{M}_{/\Delta}$
- frottements fluides avec l'air de moment $\propto -\dot{\theta}^2$

- diminution de l'amplitude et de la vitesse (énergie) à chaque oscillation
- quasi périodique pour les faibles amplitudes car :
  - les frottements fluides décroissent car $\dot{\theta}^2$ est faible
  - les frottements solides sont faibles car la liaison pivot est de bonne qualité



enregistrement expérimental

Dispositif

- solide $\mathcal{S}$ (« équipage mobile ») suspendu par un fil/ruban vertical de torsion
- l'extrémité supérieure du fil est fixée, l'inférieure tourne avec $\mathcal{S}$

Dispositif

- solide $\mathcal{S}$ (« équipage mobile ») suspendu par un fil/ruban vertical de torsion
- l'extrémité supérieure du fil est fixée, l'inférieure tourne avec $\mathcal{S}$

Fil de torsion idéal

On considère un fil de torsion tendu d'extrémités O et A, le vecteur unitaire $\vec{e}$ dirigé de O vers A et on fixe un solide $\mathcal{S}$ en O.
Quand le solide $\mathcal{S}$ a tourné d'un angle θ autour de l'axe $\Delta = (OA)$ orienté par $\vec{e}$ par rapport au fil non tordu, le fil exerce sur $\mathcal{S}$ un couple de rappel $\mathcal{C}_\Delta$.
Le fil est dit idéal s'il existe une constante positive K, dite de torsion, telle que :

$$\mathcal{C}_\Delta = -K\theta,$$

Dispositif

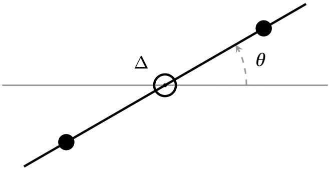
Fil de torsion idéal

On considère un fil de torsion tendu d'extrémités O et A, le vecteur unitaire $\vec{e}$ dirigé de O vers A et on fixe un solide $\mathcal{S}$ en O.
Quand le solide $\mathcal{S}$ a tourné d'un angle θ autour de l'axe $\Delta = (OA)$ orienté par $\vec{e}$ par rapport au fil non tordu, le fil exerce sur $\mathcal{S}$ un couple de rappel $\mathcal{C}_\Delta$.
Le fil est dit idéal s'il existe une constante positive K, dite de torsion, telle que :

$$\mathcal{C}_\Delta = -K\theta,$$

- K est l'analogue de la constante de raideur reliant la force à la déformation
- K a la dimension d'une force
- souvent très bonne linéarité du dispositif : $\mathcal{C}_\Delta \propto \theta$ pour plusieurs dizaines de degrés
- souvent très bonne sensibilité : on peut mesurer la force de gravitation entre deux objets à taille humaine ($\simeq 1 \cdot 10^{-7}$ N)

Équation différentielle d'évolution



on néglige les frottements :

- on équilibre avec G en O pour que $\mathcal{S}$ reste horizontal
- $\mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{P}) = 0$ car $\vec{P}$ colinéaire à Δ
- moment du fil $\mathcal{C} = -K\theta$

Équation canonique harmonique

$$J_\Delta \ddot{\theta} + K\theta = 0.$$

mouvement harmonique, de pulsation $\Omega = \sqrt{K/J}$.

Force centrale

Cas particulier fondamental car les interactions fondamentales (électrostatiques, gravitationnelles) sont centrales

Force centrale

Définition (Définition)

La force $\overrightarrow{F}$ à laquelle est soumis un point matériel situé au point M d'un référentiel $\mathcal{R}$ est dite centrale s'il existe un point O fixe de $\mathcal{R}$ tel que $\overrightarrow{F}$ reste toujours colinéaire à $\overrightarrow{OM}$ au cours du mouvement de M.

Force centrale

gravitation autour d'un astre sphérique, force de coulomb...

Conservation du moment cinétique et planéité

Théorème (Conservation du moment cinétique et planéité)

Soit un point matériel soumis à une force centrale de centre O fixe dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$.

- *Le moment cinétique en O, $\overrightarrow{\sigma_{/O}}(M) = \sigma_O \vec{e_z}$, est conservé.*
- *La trajectoire est inscrite dans le plan orthogonal à $\overrightarrow{\sigma_{/O}}(M)$ passant par O, ie le plan défini par la position et la vitesse initiales. On a donc :*

$$\overrightarrow{\sigma_{/O}}(M) = m\vec{r}_0 \wedge \vec{v}_0 = mr^2\dot{\theta}\vec{e_z}.$$

Conservation du moment cinétique et planéité

Théorème (Conservation du moment cinétique et planéité)

Soit un point matériel soumis à une force centrale de centre O fixe dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$.

- *Le moment cinétique en O, $\overrightarrow{\sigma_{/O}}(M) = \sigma_O \vec{e_z}$, est conservé.*
- *La trajectoire est inscrite dans le plan orthogonal à $\overrightarrow{\sigma_{/O}}(M)$ passant par O, ie le plan défini par la position et la vitesse initiales. On a donc :*

$$\overrightarrow{\sigma_{/O}}(M) = m\vec{r}_0 \wedge \vec{v}_0 = mr^2\dot{\theta}\vec{e_z}.$$

- on pourra choisir l'orientation de $\vec{e_z}$ pour avoir $\sigma_O > 0$
- cas particulier : le mouvement sera rectiligne selon une droite passant par O si $\overrightarrow{OM}//\vec{v}$, *ie* $\overrightarrow{\sigma_{/O}}(M) = \vec{0}$
- cas principal d'utilisation du théorème du moment cinétique pour un point matériel : on obtient dans ce cas une nouvelle grandeur constante (utile comme l'énergie pour un mouvement conservatif)

Constante des aires

r et $\dot{\theta}$ sont liés : plus on est près de O, plus on tourne vite autour de O

Constante des aires

r et $\dot{\theta}$ sont liés : plus on est près de O, plus on tourne vite autour de O

Définition (Vitesse aréolaire)

Soit un point M animé d'un mouvement plan repéré en coordonnées polaires $(r\,,\theta)$ de centre O. On définit la vitesse aréolaire v_A comme la dérivée par rapport au temps de l'aire A balayée par le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$, $v_A = \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$.

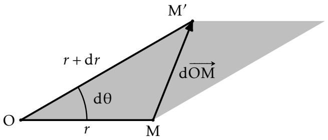
Constante des aires

Théorème (Constante des aires)

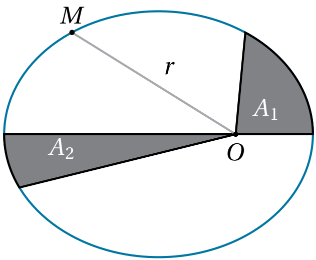
On a $v_A = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \sigma_O/(2m)$. Dans un mouvement à force centrale la vitesse aréolaire est donc une constante, nommée constante des aires :

- *l'aire balayée pendant une durée Δt par le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ est proportionnelle à Δt,*
- *en particulier, le mouvement de M autour de O s'effectue toujours dans le même sens.*

Illustration



dA est la moitié de l'aire du losange



Les aires A_1 et A_2 balayées pendant un même intervalle de temps sont égales.

- on a déjà traité le pendule simple sans frottement à l'aide de l'énergie mécanique, on pourra traiter de la même manière le pendule pesant

- on a déjà traité le pendule simple sans frottement à l'aide de l'énergie mécanique, on pourra traiter de la même manière le pendule pesant
- un solide en rotation autour d'un axe fixe possède un seul degré de liberté : la loi du moment cinétique est équivalente au théorème de l'énergie cinétique

Énergie cinétique

$\mathcal{E}_c$ d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Soit un solide $\mathcal{S}$ en rotation à la vitesse angulaire $\omega_{\mathcal{R}}$ par rapport à un axe Δ fixe dans un référentiel $\mathcal{R}$ et J_Δ le moment d'inertie de $\mathcal{S}$ par rapport à l'axe Δ.
L'énergie cinétique $\mathcal{E}_{c\mathcal{R}}$ de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{R}$ est :

$$\mathcal{E}_{c\mathcal{R}} = \frac{1}{2} J_\Delta \omega_\Delta^2.$$

Énergie cinétique

$\mathcal{E}_c$ d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Soit un solide $\mathcal{S}$ en rotation à la vitesse angulaire $\omega_{\mathcal{R}}$ par rapport à un axe Δ fixe dans un référentiel $\mathcal{R}$ et J_Δ le moment d'inertie de $\mathcal{S}$ par rapport à l'axe Δ.
L'énergie cinétique $\mathcal{E}_{c\mathcal{R}}$ de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{R}$ est :

$$\mathcal{E}_{c\mathcal{R}} = \frac{1}{2} J_\Delta \omega_\Delta^2.$$

L'expression serait plus compliquée si le solide pouvait également être en translation : on aurait alors 3 degrés de liberté en plus

il y a en fait équivalence théorème de l'énergie cinétique et loi du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe

Théorème (de l'énergie de l'$\mathcal{E}_c$ pour un solide en rotation autour d'un axe fixe)

La dérivée temporelle de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_{c\mathcal{R}_g}(\mathcal{S})$ d'un solide *en rotation à la vitesse angulaire $\omega_{\mathcal{R}_g}$ autour d'un axe orienté Δ* fixe *dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$ est égale à la seule puissance des* actions extérieures. *En notant $\mathcal{M}_{ext/\Delta}$ leur moment résultant par rapport à l'axe Δ, on a :*

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{c\mathcal{R}_g}(\mathcal{S})}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_g} = \mathcal{M}_{ext/\Delta}\omega_{\mathcal{R}_g}.$$

De même, la variation d'énergie cinétique du solide entre deux instants t_1 et t_2 est égale au seul travail des actions extérieures *:*

$$\Delta\mathcal{E}_{c\mathcal{R}_g}(\mathcal{S}) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{M}_{ext/\Delta}\omega_{\mathcal{R}_g}\,\mathrm{d}t.$$

Actions

- le moment résultant $\mathcal{M}_{\text{ext}/\Delta}$ fera intervenir :

Actions

- le moment résultant $\mathcal{M}_{\text{ext}/\Delta}$ fera intervenir :
  - des termes en $\pm F_\perp d$ pour des forces exercées sur des points (poids, force de liaison)

Actions

- le moment résultant $\mathcal{M}_{\text{ext}/\Delta}$ fera intervenir :
  - des termes en $\pm F_{\perp} d$ pour des forces exercées sur des points (poids, force de liaison)
  - des termes en $\mathcal{C}$ pour des frottements sur l'axe, un couple de torsion...

Actions

- le moment résultant $\mathcal{M}_{\text{ext}/\Delta}$ fera intervenir :
  - des termes en $\pm F_{\perp} d$ pour des forces exercées sur des points (poids, force de liaison)
  - des termes en $\mathcal{C}$ pour des frottements sur l'axe, un couple de torsion...
- si le solide est aussi en translation, on devra prendre en compte le travail de la résultante des forces extérieures

Actions

- le moment résultant $\mathcal{M}_{\text{ext}/\Delta}$ fera intervenir :
  - des termes en $\pm F_{\perp} d$ pour des forces exercées sur des points (poids, force de liaison)
  - des termes en $\mathcal{C}$ pour des frottements sur l'axe, un couple de torsion...
- si le solide est aussi en translation, on devra prendre en compte le travail de la résultante des forces extérieures
- ☠ pour un système déformable, le travail des forces intérieures interviendra aussi

Puissance et travail des actions

on en déduit la puissance et le travail d'un moment sur un solide :

Puissance et travail des actions

on en déduit la puissance et le travail d'un moment sur un solide :

Puissance et travail d'un moment sur un solide en rotation

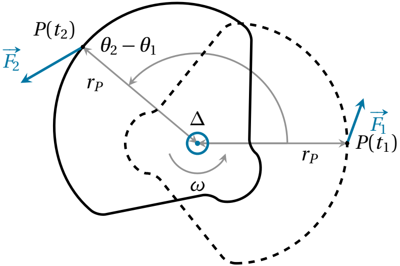
Soit un solide $\mathcal{S}$ en rotation autour d'un axe Δ orienté fixe dans un référentiel $\mathcal{R}$ à la vitesse angulaire $\omega_{\mathcal{R}}$ soumis à un moment $\mathcal{M}_{/\Delta}$ par rapport à l'axe Δ.
La puissance du moment $\mathcal{M}_{/\Delta}$ est :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}_{/\Delta}) = \mathcal{M}_{/\Delta}\omega_{\mathcal{R}}.$$

Son travail, quand le solide effectue une rotation de l'angle θ_1 à l'angle θ_2 entre deux instants t_1 et t_2 est :

$$\underset{\theta_1 \underset{\mathcal{C}}{\longrightarrow} \theta_2}{W_{\mathcal{R}}}(\mathcal{M}_{/\Delta}) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{M}_{/\Delta}\omega_{\mathcal{R}}\,\mathrm{d}t.$$

Illustration



- illustré ci-contre pour une force appliquée en un point
- c'est valable également pour l'ensemble des actions de contact sur un axe modélisé par un couple de frottement

Moment conservatif

on a un critère simple pour tester le caractère conservatif d'un moment exercé sur un solide

Moment conservatif

on a un critère simple pour tester le caractère conservatif d'un moment exercé sur un solide

Moment conservatif

Un moment $\mathcal{M}_\Delta$ par rapport à un axe Δ orienté subi par un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ est conservatif si et seulement si $\mathcal{M}_\Delta$ ne dépend que de l'angle θ autour de l'axe Δ dans un référentiel $\mathcal{R}$ et est en particulier indépendant du temps et de la vitesse de rotation $\omega_\mathcal{R}$ autour de l'axe Δ.

Moment conservatif

Moment conservatif

Un moment $\mathcal{M}_\Delta$ par rapport à un axe Δ orienté subi par un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ est conservatif si et seulement si $\mathcal{M}_\Delta$ ne dépend que de l'angle θ autour de l'axe Δ dans un référentiel $\mathcal{R}$ et est en particulier indépendant du temps et de la vitesse de rotation $\omega_\mathcal{R}$ autour de l'axe Δ.

Énergie potentielle d'un pendule de torsion

Le couple d'un pendule de torsion est conservatif, d'énergie potentielle associée :

$$\mathcal{E}_{\text{pot}} = \frac{1}{2}K\theta^2,$$

avec K la constante de torsion et θ l'angle de torsion par rapport au repos.

Énergie mécanique

on associe aux moments conservatifs des énergies potentielles, qu'on ajoute à l'$\mathcal{E}_\mathrm{c}$ dans l'$\mathcal{E}_\mathrm{m}$

Énergie mécanique

on associe aux moments conservatifs des énergies potentielles, qu'on ajoute à l'$\mathcal{E}_\mathrm{c}$ dans l'$\mathcal{E}_\mathrm{m}$

Énergie mécanique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

On définit l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{\mathrm{m}\mathcal{R}}$ d'un solide en rotation, dans un référentiel $\mathcal{R}$, autour d'un axe Δ fixe :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{m}\mathcal{R}} = \mathcal{E}_{\mathrm{c}\mathcal{R}} + \mathcal{E}_{\mathrm{pot}}(\theta) = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2 + \mathcal{E}_{\mathrm{pot}}(\theta).$$

Théorème

Théorème (de l'$\mathcal{E}_\mathrm{m}$ pour un solide en rotation autour d'un axe fixe)

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$, la variation de l'énergie mécanique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe est égale au seul travail des forces extérieures non conservatives.
En notant $\mathcal{P}_{ext,nc}$ leur puissance, on a à chaque instant :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{m\mathcal{R}_g}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_g} = \mathcal{P}_{ext,nc}.$$

Théorème

Théorème (de l'$\mathcal{E}_\mathrm{m}$ pour un solide en rotation autour d'un axe fixe)

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$, la variation de l'énergie mécanique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe est égale au seul travail des forces extérieures non conservatives.

En notant $\mathcal{P}_{ext,nc}$ leur puissance, on a à chaque instant :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{m\mathcal{R}_g}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_g} = \mathcal{P}_{ext,nc}.$$

Théorème

Théorème (de l'$\mathcal{E}_{\mathrm{m}}$ pour un solide en rotation autour d'un axe fixe)

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$, la variation de l'énergie mécanique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe est égale au seul travail des forces extérieures non conservatives.
En notant $\mathcal{P}_{ext,nc}$ leur puissance, on a à chaque instant :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{m\mathcal{R}_g}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_g} = \mathcal{P}_{ext,nc}.$$

- en particulier $\mathcal{E}_{\mathrm{m}}$ sera conservée si toutes les actions extérieures sont conservatives

Théorème

Théorème (de l'$\mathcal{E}_\mathrm{m}$ pour un solide en rotation autour d'un axe fixe)

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$, la variation de l'énergie mécanique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe est égale au seul travail des forces extérieures non conservatives.
En notant $\mathcal{P}_{ext,nc}$ leur puissance, on a à chaque instant :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{m\mathcal{R}_g}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_g} = \mathcal{P}_{ext,nc}.$$

- en particulier $\mathcal{E}_\mathrm{m}$ sera conservée si toutes les actions extérieures sont conservatives
- $\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} = 0$ redonne la loi du moment cinétique

Pendule pesant

Intégrale première du mouvement

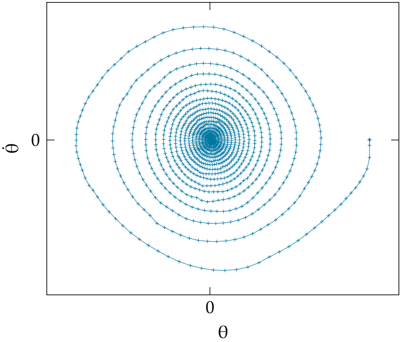
$$\mathcal{E}_{\mathrm{m}} = \mathcal{E}_{\mathrm{c}} + \mathcal{E}_{\mathrm{pot}} = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega^2 + mgl\left(1 - \cos\left(\theta\right)\right).$$

Pendule pesant

Intégrale première du mouvement

$$\mathcal{E}_{\mathrm{m}} = \mathcal{E}_{\mathrm{c}} + \mathcal{E}_{\mathrm{pot}} = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega^2 + mgl\left(1 - \cos\left(\theta\right)\right).$$

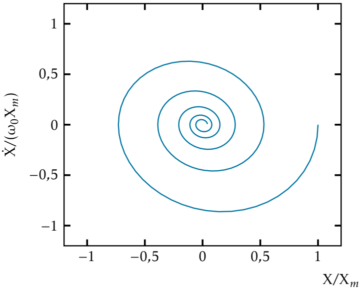
- $\mathcal{E}_{\mathrm{m}} = cste$ sans frottements
- avec frottements : $\Delta \mathcal{E}_{\mathrm{m}} \leqslant 0$ sur une oscillation lisible sur le portrait de phase



Pendule de torsion

on a immédiatement :

- $\mathcal{E}_\mathrm{m} = cste$ sans frottement
- avec frottements : $\Delta\mathcal{E}_\mathrm{m} \leqslant 0$ sur une oscillation lisible sur le portrait de phase



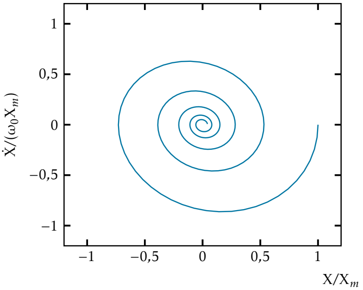
Pendule de torsion

on a immédiatement :

Intégrale première du mouvement

$$\mathcal{E}_{\mathrm{m}} = \mathcal{E}_{\mathrm{c}} + \mathcal{E}_{\mathrm{pot}} = \mathrm{cste} = \frac{1}{2}J_{\Delta}\omega^2 + \frac{1}{2}K\theta^2.$$

- $\mathcal{E}_{\mathrm{m}} = cste$ sans frottement
- avec frottements : $\Delta\mathcal{E}_{\mathrm{m}} \leqslant 0$ sur une oscillation lisible sur le portrait de phase



Indispensable

- définition des moments (cinétique et d'une force), bras de levier, paramètre d'impact
- expression du moment cinétique par rapport à un axe à l'aide du moment d'inertie pour un solide
- propriétés générales du moment d'inertie
- théorèmes du moment cinétique pour un point matériel, loi pour un solide
- théorèmes de l'énergie cinétique/mécanique pour un solide
- intégrales premières du pendule pesant et du pendule de torsion