Oscillateur harmonique

Julien Cubizolles

Lycée Louis le Grand

8 septembre 2017

- les phénomènes périodiques sont omniprésents en physique

- les phénomènes périodiques sont omniprésents en physique
- en particulier dans le domaine de la propagation des ondes (mécaniques, électromagnétiques, sonores) indispensables à la transformation d'information

- les phénomènes périodiques sont omniprésents en physique
- en particulier dans le domaine de la propagation des ondes (mécaniques, électromagnétiques, sonores) indispensables à la transformation d'information
- on les décrit en utilisant des fonctions sinusoïdales, caractérisées par leur fréquence ou leur pulsation, leur amplitude, leur phase

- les phénomènes périodiques sont omniprésents en physique
- en particulier dans le domaine de la propagation des ondes (mécaniques, électromagnétiques, sonores) indispensables à la transformation d'information
- on les décrit en utilisant des fonctions sinusoïdales, caractérisées par leur fréquence ou leur pulsation, leur amplitude, leur phase
- on introduit ces concepts sur un système physique simple : le système masse ressort, illustration du modèle fondamental de l'oscillateur harmonique

1. Loi de Hooke

2. Système dynamique

3. Considérations énergétiques

Caractéristiques physiques

- un ressort à spirales possède une longueur caractéristique ≪au repos≫ notée ℓ_0

Caractéristiques physiques

- un ressort à spirales possède une longueur caractéristique «au repos» notée ℓ_0
- on peut faire varier sa longueur ℓ, on nomme élongation ou allongement le réel $\ell - \ell_0$

Caractéristiques physiques

- un ressort à spirales possède une longueur caractéristique «au repos» notée ℓ_0
- on peut faire varier sa longueur ℓ, on nomme élongation ou allongement le réel $\ell - \ell_0$
- l'élongation est positive si le ressort est allongé, négative s'il est comprimé

Caractéristiques physiques

- un ressort à spirales possède une longueur caractéristique «au repos» notée ℓ_0
- on peut faire varier sa longueur ℓ, on nomme élongation ou allongement le réel $\ell - \ell_0$
- l'élongation est positive si le ressort est allongé, négative s'il est comprimé
- différents ressorts s'allongeront/se comprimeront différemment, ils ont des raideurs différentes

Mouvement

on suspend brutalement un objet :

Mouvement

on suspend brutalement un objet :

- il finit par atteindre une position d'équilibre, avec une élongation non nulle

Mouvement

on suspend brutalement un objet :

- il finit par atteindre une position d'équilibre, avec une élongation non nulle
- après des oscillations amorties

Mouvement

on suspend brutalement un objet :

- il finit par atteindre une position d'équilibre, avec une élongation non nulle
- après des oscillations amorties
- la position d'équilibre varie avec la masse : l'élongation croît avec la masse de l'objet suspendu

Description

- sans le ressort, l'objet chute sous l'effet d'une force, le poids $\overrightarrow{P}$

Description

- sans le ressort, l'objet chute sous l'effet d'une force, le poids $\overrightarrow{\mathrm{P}}$
- une force possède une direction, elle est représentée par un vecteur

Description

- sans le ressort, l'objet chute sous l'effet d'une force, le poids $\overrightarrow{P}$
- une force possède une direction, elle est représentée par un vecteur
- le ressort exerce une force, nommée tension, notée $\overrightarrow{T}$

Description

- sans le ressort, l'objet chute sous l'effet d'une force, le poids $\vec{P}$
- une force possède une direction, elle est représentée par un vecteur
- le ressort exerce une force, nommée tension, notée $\vec{T}$
- à l'équilibre de la masse, la force $\vec{T}$ compense la force $\vec{P}$:

$$\vec{T} + \vec{P} = \vec{0}.$$

Intensité T

- c'est la norme du vecteur $\vec{T}$

Intensité T

- c'est la norme du vecteur $\vec{\mathrm{T}}$
- elle varie avec l'élongation, on vérifie :

Intensité T

- c′est la norme du vecteur $\vec{\mathrm{T}}$
- elle varie avec l′élongation, on vérifie :
  - qu′elle croît linéairement avec l′élongation en faisant croître le poids de l′objet suspendu

Intensité T

- c'est la norme du vecteur $\vec{T}$
- elle varie avec l'élongation, on vérifie :
  - qu'elle croît linéairement avec l'élongation en faisant croître le poids de l'objet suspendu
  - qu'elle est nulle quand aucun objet n'est suspendu (en négligeant le poids du ressort lui-même)

Intensité T

- c'est la norme du vecteur $\vec{T}$
- elle varie avec l'élongation, on vérifie :
  - qu'elle croît linéairement avec l'élongation en faisant croître le poids de l'objet suspendu
  - qu'elle est nulle quand aucun objet n'est suspendu (en négligeant le poids du ressort lui-même)

Tension

$$T = k\,|\ell - \ell_0|$$

Direction, sens

- $\overrightarrow{\mathrm{P}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{T}}$ sont de sens opposés

on propose :

Direction, sens

- $\overrightarrow{\mathrm{P}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{T}}$ sont de sens opposés
- de même si le ressort est comprimé par le poids

on propose :

Direction, sens

- $\vec{P}$ et $\vec{T}$ sont de sens opposés
- de même si le ressort est comprimé par le poids

on propose :

Loi de Hooke

$$\vec{T} = -k\,(\ell - \ell_0)\,\vec{e}_{\rightarrow M}$$

Direction, sens

- $\vec{\mathrm{P}}$ et $\vec{\mathrm{T}}$ sont de sens opposés
- de même si le ressort est comprimé par le poids

on propose :

Loi de Hooke

$$\vec{\mathrm{T}} = -k\,(\ell - \ell_0)\,\vec{e}_{\to\mathrm{M}}$$

- k la constante de raideur, positive
- $\ell - \ell_0$ l'élongation, positive ou négative
- $\vec{e}_{\to\mathrm{M}}$ le vecteur unitaire (sans dimension) colinéaire au ressort et dirigé de l'autre extrémité vers l'extrémité sur laquelle s'exerce $\vec{\mathrm{T}}$
- on vérifie la nécessité du signe – pour le sens de la force
- cette expression est valable quelle que soit la direction du ressort
- ☠ toujours faire un schéma indiquant le sens de la force s'il est connu, et ce que représente l'élongation

Caractère vectoriel de la force

on considère une masse m immobile au bout du ressort, soumise à $\vec{g}$:

- ressort à la verticale : $\vec{T} + \vec{P} = \vec{0}$

Caractère vectoriel de la force

on considère une masse m immobile au bout du ressort, soumise à $\vec{g}$:

- ressort à la verticale : $\vec{T} + \vec{P} = \vec{0}$
- ressort à l'horizontale : $\vec{T}$ et $\vec{P}$ sont orthogonaux : la tension ne peut pas compenser le poids : le support exerce une force de réaction $\vec{R}$ telle que :

$$\vec{T} + \vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$$

Caractère vectoriel de la force

on considère une masse m immobile au bout du ressort, soumise à $\vec{g}$:

- ressort à la verticale : $\vec{T} + \vec{P} = \vec{0}$
- ressort à l'horizontale : $\vec{T}$ et $\vec{P}$ sont orthogonaux : la tension ne peut pas compenser le poids : le support exerce une force de réaction $\vec{R}$ telle que :

$$\vec{T} + \vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$$

- on traduit cette égalité sur les composantes des vecteurs selon deux directions orthogonales, par projection :

$$\vec{e}_x \cdot \left(\vec{T} + \vec{R} + \vec{P}\right) = 0 \rightarrow \ell = \ell_0 \, \vec{e}_z \cdot \left(\vec{T} + \vec{R} + \vec{P}\right) = 0 \rightarrow R_z = mg$$

Notations

- on note P_x la composante du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{P}}$ selon le vecteur unitaire $\overrightarrow{e_x}$: P_x peut être positive, négative ou nulle

Notations

- on note P_x la composante du vecteur $\overrightarrow{P}$ selon le vecteur unitaire $\overrightarrow{e_x}$: P_x peut être positive, négative ou nulle
- P désigne la norme du vecteur $\overrightarrow{P}$, toujours positive ou nulle

Forces de frottements

les oscillations sont amorties par les frottements :

Forces de frottements

les oscillations sont amorties par les frottements :

- avec l'air
- avec le support
- au sein du ressort

Généralisation

- on peut généraliser à tout objet faiblement déformé
- on considère un objet déformé sous l'effet d'une force $\vec{F}_{op}$ exercée par un opérateur
- à l'équilibre il exerce $\vec{F} = -\vec{F}_{op}$ sur son extrémité
- on observe que $\vec{F}$ varie avec la déformation.

Généralisation

- on peut généraliser à tout objet faiblement déformé
- on considère un objet déformé sous l'effet d'une force $\vec{F}_{op}$ exercée par un opérateur
- à l'équilibre il exerce $\vec{F} = -\vec{F}_{op}$ sur son extrémité
- on observe que $\vec{F}$ varie avec la déformation.

Loi de Hooke (1635-1703)

On considère un objet matériel déformé d'un *vecteur déformation* (ou élongation) $\overrightarrow{\Delta l}$. Les faibles déformations sont dites élastiques et la force exercée $\vec{F}_e$, par l'objet déformé sur une extrémité obéit à la loi de Hooke :

$$\vec{F}_e = -k\overrightarrow{\Delta l} \quad \text{avec } k > 0 \text{ nommé constante de raideur..}$$

$\vec{F}_e$ est dite force de rappel élastique.

Généralisation

- on peut généraliser à tout objet faiblement déformé
- on considère un objet déformé sous l'effet d'une force $\vec{F}_{op}$ exercée par un opérateur
- à l'équilibre il exerce $\vec{F} = -\vec{F}_{op}$ sur son extrémité
- on observe que $\vec{F}$ varie avec la déformation.

Loi de Hooke (1635-1703)

On considère un objet matériel déformé d'un *vecteur déformation* (ou élongation) $\overrightarrow{\Delta l}$. Les faibles déformations sont dites élastiques et la force exercée $\vec{F}_e$, par l'objet déformé sur une extrémité obéit à la loi de Hooke :

$$\vec{F}_e = -k\overrightarrow{\Delta l} \quad \text{avec } k > 0 \text{ nommé constante de raideur..}$$

$\vec{F}_e$ est dite force de rappel élastique.

on retrouve $\vec{F}_e = \vec{T}$ dans le cas d'un ressort idéal

Généralisation

- on peut généraliser à tout objet faiblement déformé
- on considère un objet déformé sous l'effet d'une force $\vec{F}_{op}$ exercée par un opérateur
- à l'équilibre il exerce $\vec{F} = -\vec{F}_{op}$ sur son extrémité
- on observe que $\vec{F}$ varie avec la déformation.

Loi de Hooke (1635-1703)

On considère un objet matériel déformé d'un *vecteur déformation* (ou élongation) $\overrightarrow{\Delta l}$. Les faibles déformations sont dites élastiques et la force exercée $\vec{F}_e$, par l'objet déformé sur une extrémité obéit à la loi de Hooke :

$$\vec{F}_e = -k\overrightarrow{\Delta l} \quad \text{avec } k > 0 \text{ nommé constante de raideur..}$$

$\vec{F}_e$ est dite force de rappel élastique.

on retrouve $\vec{F}_e = \vec{T}$ dans le cas d'un ressort idéal

Cadre

le plus simple possible

- ressort horizontal idéal (sans masse entre autres)

Cadre

le plus simple possible

- ressort horizontal idéal (sans masse entre autres)
- on fixe une masse m à son extrémité

Cadre

le plus simple possible

- ressort horizontal idéal (sans masse entre autres)
- on fixe une masse m à son extrémité
- l'autre extrémité est fixe

Cadre

le plus simple possible

- ressort horizontal idéal (sans masse entre autres)
- on fixe une masse m à son extrémité
- l'autre extrémité est fixe
- frottements négligés

Loi de la quantité de mouvement

(ou 2e loi de Newton/principe fondamentale de la dynamique) on note :

- M la position de l'extrémité mobile
- m la masse qui y est fixée
- k la raideur du ressort

Loi de la quantité de mouvement

(ou 2e loi de Newton/principe fondamentale de la dynamique) on note :

- M la position de l'extrémité mobile
- m la masse qui y est fixée
- k la raideur du ressort

la masse est soumise à :

- son poids $\vec{\mathrm{P}}$
- la réaction du support $\vec{\mathrm{R}}$
- la force de tension du ressort $\vec{\mathrm{T}}$

à tout instant :

Loi de la quantité de mouvement

(ou 2e loi de Newton/principe fondamentale de la dynamique)
la masse est soumise à :

- son poids $\vec{P}$
- la réaction du support $\vec{R}$
- la force de tension du ressort $\vec{T}$

à tout instant :

Loi de la quantité de mouvement

(ou 2e loi de Newton/principe fondamentale de la dynamique)
la masse est soumise à :

- son poids $\vec{P}$
- la réaction du support $\vec{R}$
- la force de tension du ressort $\vec{T}$

à tout instant :

$$m\vec{a}(M) = \vec{P} + \vec{T} + \vec{R}$$

Position d'équilibre

on la recherche en écrivant que M est toujours immobile :

- $\vec{a}(\mathrm{M}) = \vec{0}$

Position d'équilibre

on la recherche en écrivant que M est toujours immobile :

- $\vec{a}(\mathrm{M}) = \vec{0}$
- donc $\mathrm{P}_x + \mathrm{R}_x + \mathrm{T}_x = 0$ et $\mathrm{P}_z + \mathrm{R}_z + \mathrm{T}_z = 0$

Position d'équilibre

on la recherche en écrivant que M est toujours immobile :

- $\vec{a}(M) = \vec{0}$
- donc $P_x + R_x + T_x = 0$ et $P_z + R_z + T_z = 0$
- soit $R_z = mg$ et $\ell = \ell_0$

Position d'équilibre

on la recherche en écrivant que M est toujours immobile :

- $\vec{a}(\mathrm{M}) = \vec{0}$
- donc $\mathrm{P}_x + \mathrm{R}_x + \mathrm{T}_x = 0$ et $\mathrm{P}_z + \mathrm{R}_z + \mathrm{T}_z = 0$
- soit $\mathrm{R}_z = mg$ et $\ell = \ell_0$

Caractérisation

L'élongation d'un ressort idéal horizontal est nulle à l'équilibre.

Position d'équilibre

on la recherche en écrivant que M est toujours immobile :

- $\vec{a}(\mathrm{M}) = \vec{0}$
- donc $\mathrm{P}_x + \mathrm{R}_x + \mathrm{T}_x = 0$ et $\mathrm{P}_z + \mathrm{R}_z + \mathrm{T}_z = 0$
- soit $\mathrm{R}_z = mg$ et $\ell = \ell_0$

Caractérisation

L'élongation d'un ressort idéal horizontal est nulle à l'équilibre.

- ☠ ce sera différent pour un ressort vertical
- ☠ ce n'est pas parce que l'élongation est nulle à un instant que le ressort va demeurer immobile

Équation différentielle d'évolution de l'élongation

cas général : M peut être en mouvement

Équation différentielle d'évolution de l'élongation

cas général : M peut être en mouvement

- on oriente $\overrightarrow{e_x}$ dans le sens du ressort

Équation différentielle d'évolution de l'élongation

cas général : M peut être en mouvement

- on oriente $\overrightarrow{e_x}$ dans le sens du ressort
- on choisit l'origine $x = 0$ quand $l = l_0$: soit $x = \ell - \ell_0$

Équation différentielle d'évolution de l'élongation

cas général : M peut être en mouvement

- on oriente $\overrightarrow{e_x}$ dans le sens du ressort
- on choisit l'origine $x = 0$ quand $l = l_0$: soit $x = \ell - \ell_0$
- le support impose $a_z = 0$: on a toujours $\mathrm{R}_z = mg$

Équation différentielle d'évolution de l'élongation

cas général : M peut être en mouvement

- on oriente $\overrightarrow{e_x}$ dans le sens du ressort
- on choisit l'origine $x = 0$ quand $l = l_0$: soit $x = \ell - \ell_0$
- le support impose $a_z = 0$: on a toujours $\mathrm{R}_z = mg$
- on a maintenant :

Équation différentielle d'évolution de l'élongation

Équation fondamentale

$$m a_x = -k(\ell - \ell_0) = -kx = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \longrightarrow \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Résolution d'une équation différentielle ?

- c'est une équation vérifiée par la fonction $x(t)$
- elle fait intervenir $x(t)$ et ses dérivées
- une même équation différentielle aura souvent une infinité de solutions ayant la même forme

Résolution d'une équation différentielle ?

- c'est une équation vérifiée par la fonction $x(t)$
- elle fait intervenir $x(t)$ et ses dérivées
- une même équation différentielle aura souvent une infinité de solutions ayant la même forme

Méthode

- reconnaître une équation différentielle connue
- chercher parmi toutes ses solutions celle qui correspond aux conditions initiales du phénomène physique, valeurs de $x(t_0)$ et $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_0)$ à l'instant t_0 par exemple

Solution générale

Théorème (Solution canonique)

Les solutions de l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 X = 0$$

sont les fonctions sinusoïdales de pulsation ω :

$$X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Un système régit par cette équation différentielle est un oscillateur harmonique. La pulsation d'un système masse-ressort est $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Solution générale

Théorème (Solution canonique)

Les solutions de l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 X = 0$$

sont les fonctions sinusoïdales de pulsation ω :

$$X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Un système régit par cette équation différentielle est un oscillateur harmonique. La pulsation d'un système masse-ressort est $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

- ici $X = x - \ell_{eq}$ décrit l'écart à la position d'équilibre

Solution générale

Théorème (Solution canonique)

Les solutions de l'équation différentielle

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \omega^2 X = 0$$

sont les fonctions sinusoïdales de pulsation ω *:*

$$X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Un système régit par cette équation différentielle est un oscillateur harmonique. La pulsation d'un système masse-ressort est $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

- ici $X = x - \ell_{eq}$ décrit l'écart à la position d'équilibre
- $\omega = 2\pi f$ ou $2\pi\nu$ avec f ou ν la fréquence de l'oscillation

Solution générale

Théorème (Solution canonique)

Les solutions de l'équation différentielle

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \omega^2 X = 0$$

sont les fonctions sinusoïdales de pulsation ω :

$$X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Un système régit par cette équation différentielle est un oscillateur harmonique. La pulsation d'un système masse-ressort est $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

- ici $X = x - \ell_{eq}$ décrit l'écart à la position d'équilibre
- $\omega = 2\pi f$ ou $2\pi\nu$ avec f ou ν la fréquence de l'oscillation
- ω est caractéristique du système physique : il faut changer le ressort ou la masse pour la modifier

Solution générale

Théorème (Solution canonique)

Les solutions de l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 X = 0$$

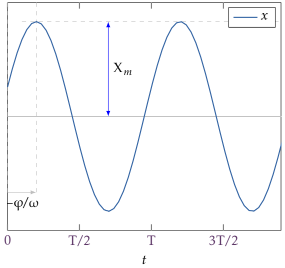
sont les fonctions sinusoïdales de pulsation ω :

$$X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Un système régit par cette équation différentielle est un oscillateur harmonique. La pulsation d'un système masse-ressort est $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

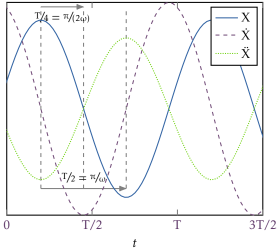
- ici $X = x - \ell_{\mathrm{eq}}$ décrit l'écart à la position d'équilibre
- $\omega = 2\pi f$ ou $2\pi\nu$ avec f ou ν la fréquence de l'oscillation
- ω est caractéristique du système physique : il faut changer le ressort ou la masse pour la modifier
- en revanche, l'élongation maximale, les instants où elle est atteinte

Courbe



- x_m est l'amplitude *ie* l'élongation maximale atteinte au cours du mouvement
- la phase φ caractérise le décalage entre l'instant $t = 0$ et l'instant du premier passage par 0
- φ représente l'avance du signal par rapport à un signal de phase nulle

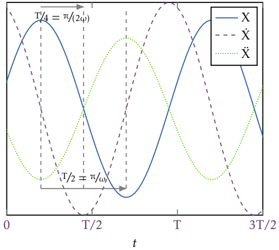
Déphasages



phases remarquables

- $\varphi = 0$: signaux en phase

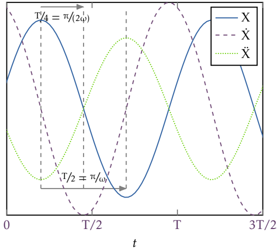
Déphasages



phases remarquables

- $\varphi = 0$: signaux en phase
- $\varphi = \pi/2$: signal en quadrature avance (vitesse / position)

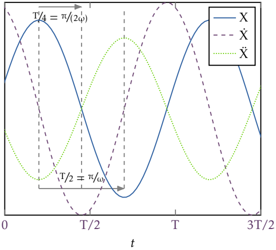
Déphasages



phases remarquables

- $\varphi = 0$: signaux en phase
- $\varphi = \pi/2$: signal en quadrature avance (vitesse / position)
- $\varphi = -\pi/2$: signal en quadrature retard

Déphasages



phases remarquables

- $\varphi = 0$: signaux en phase
- $\varphi = \pi/2$: signal en quadrature avance (vitesse / position)
- $\varphi = -\pi/2$: signal en quadrature retard
- $\varphi = \pm\pi$: signal en opposition de phase (accélération / position)

Validation du modèle

on vérifie que le mouvement est bien sinusoïdal, en particulier

- la vitesse est bien en quadrature avance par rapport à la position

Validation du modèle

on vérifie que le mouvement est bien sinusoïdal, en particulier

- la vitesse est bien en quadrature avance par rapport à la position
- l'accélération est bien en opposition de phase

Illustration

animation [1]

1. http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/oscillateur_horizontal.php

Conditions initiales

pour un même système (*ie* une même pulsation), il existe une infinité de solutions de même pulsation, elles diffèrent par :

Conditions initiales

pour un même système (*ie* une même pulsation), il existe une infinité de solutions de même pulsation, elles diffèrent par :

- leur amplitude $|X_m|$ (on choisira $X_m > 0$)

Conditions initiales

pour un même système (*ie* une même pulsation), il existe une infinité de solutions de même pulsation, elles diffèrent par :

- leur amplitude $|X_m|$ (on choisira $X_m > 0$)
- leur phase φ

Conditions initiales

pour un même système (*ie* une même pulsation), il existe une infinité de solutions de même pulsation, elles diffèrent par :

- leur amplitude $|X_m|$ (on choisira $X_m > 0$)
- leur phase φ
- ces paramètres peuvent être quelconques, ils dépendent des conditions initiales $x(t_0)$ et $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_0)$, aussi notée $\dot{x}(t_0)$

Conditions initiales

on prend $t_0 = 0$ pour simplifier :

Conditions initiales

on prend $t_0 = 0$ pour simplifier :

- on détermine X_m et φ à l'aide de $x(0)$ et $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)$

Conditions initiales

on prend $t_0 = 0$ pour simplifier :

- on détermine X_m et φ à l'aide de $x(0)$ et $\dfrac{dx}{dt}(0)$
- cas simples :

Conditions initiales

on prend $t_0 = 0$ pour simplifier :

- on détermine X_m et φ à l'aide de $x(0)$ et $\frac{dx}{dt}(0)$
- cas simples :
  - $X(0) = u_0 \neq 0$ et $\frac{dX}{dt}(0) = 0$

Conditions initiales

on prend $t_0 = 0$ pour simplifier :

- on détermine X_m et φ à l'aide de $x(0)$ et $\frac{dx}{dt}(0)$
- cas simples :
  - $X(0) = u_0 \neq 0$ et $\frac{dX}{dt}(0) = 0$
  - $X(0) = 0$ et $\frac{dX}{dt}(0) = v_0 \neq 0$

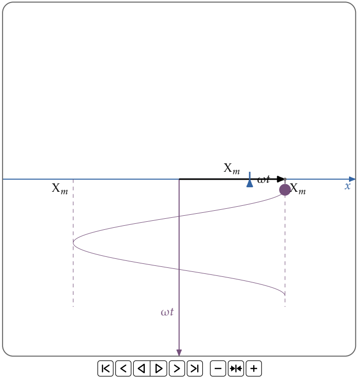
Autre expression

on peut écrire la solution générale sous une autre forme :

$$X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) = X_1 \cos(\omega t) + X_2 \sin(\omega t)$$

- les constantes X_1 et X_2 s'expriment en fonction de X_0 et φ
- elles sont plus difficiles à interpréter : $X_m = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$, $\tan(\varphi) = -X_2/X_1$ (à établir avec la construction de Fresnel)
- mais elles sont facilement reliées à $x(0)$ et $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)$

Principe



- on a une oscillation $x = X_m \cos(\omega t)$
- on lui associe un complexe de module X_m et d'argument ωt : $\underline{x} = X_m \exp(i\omega t)$: c'est sa représentation de Fresnel
- l'évolution temporelle de x correspond à une rotation du vecteur d'affixe $\underline{x}$ dans le plan complexe
- on a à chaque instant $x = \mathrm{Re}(\underline{x})$, x est l'abscisse du complexe $\underline{x}$
- si $x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$, $\underline{x} = X_m \exp(i(\omega t + \varphi))$: le vecteur d'affixe $\underline{x}$ est tourné de φ

Changement d'origine

choisir une autre origine pour x rajoute une constante dans l'expression : la position d'équilibre x_e dans les nouvelles coordonnées :

$$x(t) = x_e + X_0 \cos(\omega t + \varphi) \text{avec} x_e = l_0$$

l'élongation est toujours nulle à l'équilibre pour un ressort horizontal

Ressort vertical

pour un ressort vertical, l'élongation à l'équilibre est non nulle

$$y(t) = y_e + Y_m \cos(\omega t + \varphi)$$

avec $l_e = l_0 + \frac{mg}{k}$

Ressort vertical

pour un ressort vertical, l'élongation à l'équilibre est non nulle

$$y(t) = y_e + Y_m \cos(\omega t + \varphi)$$

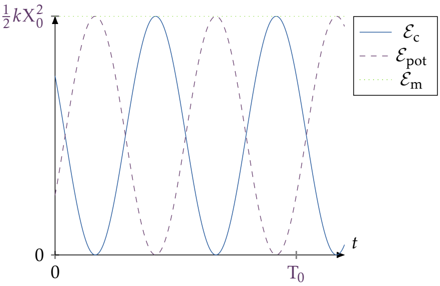
avec $l_e = l_0 + \frac{mg}{k}$ la pulsation est indépendante de $\vec{g}$ (mais pas de m)

1. Loi de Hooke

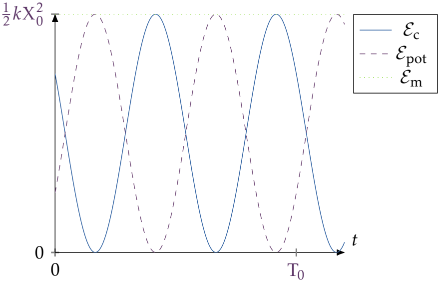
2. Système dynamique

3. Considérations énergétiques

- énergie cinétique : $\mathcal{E}_\mathrm{c} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$, associée à la vitesse
- énergie potentielle élastique : $\mathcal{E}_\mathrm{pot} = \frac{1}{2} k x^2$, associée à l'élongation du ressort
- définitions générales, qu'on retrouvera plus tard



- $\mathcal{E}_c$ et $\mathcal{E}_{pot}$ oscillent à 2ω, avec la même amplitude
- elles sont en opposition de phase : l'une est maximale quand l'autre est minimale



- $\mathcal{E}_\mathrm{c}$ et $\mathcal{E}_\mathrm{pot}$ oscillent à 2ω, avec la même amplitude
- elles sont en opposition de phase : l'une est maximale quand l'autre est minimale

- il y a équipartition de l'énergie totale entre ces deux formes, caractéristique des oscillateurs harmoniques
- leur somme est constante : l'énergie mécanique $\mathcal{E}_\mathrm{m}$ est conservée, tant qu'on peut négliger les frottements
- l'énergie est alternativement sous formes cinétique et potentielle
- on peut écrire $\mathcal{E}_\mathrm{m} = \frac{1}{2}kX_m^2$ ou $\mathcal{E}_\mathrm{m} = \frac{1}{2}mv_\mathrm{max}^2$

Capacité exigibles

- Établir et reconnaître l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique. La résoudre compte tenu des conditions initiales.
- Caractériser le mouvement en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation.
- Contrôler la cohérence de la solution obtenue avec la conservation de l'énergie mécanique, l'expression de l'énergie potentielle élastique étant ici affirmée.

Indispensable

- établir l'équation différentielle, en déduire la pulsation
- déterminer amplitude et phase à l'aide des conditions initiales ou par lecture graphique
- tracer les évolutions temporelles de la position, de la vitesse, de l'accélération
- connaître les expressions et savoir tracer les évolutions temporelles des énergies potentielle et cinétique