

Oscillateur amorti

Julien Cubizolles

Lycée Louis le Grand

lundi 11 décembre 2017

Oscillateur amorti

Julien Cubizolles

Lycée Louis le Grand

lundi 11 décembre 2017

- ▶ une seule évolution pour un système du premier ordre : on va voir qu'un oscillateur harmonique peut présenter **2 (3)** types de régimes transitoires, selon l'intensité des phénomènes dissipatifs

- ▶ une seule évolution pour un système du premier ordre : on va voir qu'un oscillateur harmonique peut présenter **2 (3)** types de régimes transitoires, selon l'intensité des phénomènes dissipatifs
- ▶ que se passe-t-il en **régime établi**, *i.e.* avec une excitation extérieure dépendante du temps ?

- ▶ une seule évolution pour un système du premier ordre : on va voir qu'un oscillateur harmonique peut présenter **2 (3)** types de régimes transitoires, selon l'intensité des phénomènes dissipatifs
- ▶ que se passe-t-il en **régime établi**, *ie* avec une excitation extérieure dépendante du temps ?
- ▶ on va se limiter au cas d'un régime **sinusoïdal** établi pour lequel on pourra observer, dans certains le phénomène de **résonance** : l'amplitude de l'oscillateur devient bien supérieure à celle de l'excitation

- ▶ une seule évolution pour un système du premier ordre : on va voir qu'un oscillateur harmonique peut présenter **2 (3)** types de régimes transitoires, selon l'intensité des phénomènes dissipatifs
- ▶ que se passe-t-il en **régime établi**, *ie* avec une excitation extérieure dépendante du temps ?
- ▶ on va se limiter au cas d'un régime **sinusoïdal** établi pour lequel on pourra observer, dans certains le phénomène de **résonance** : l'amplitude de l'oscillateur devient bien supérieure à celle de l'excitation
- ▶ la transformation de Fourier assure qu'on pourra ainsi décrire la réponse à n'importe quelle excitation

Exemples

on retrouve ce modèle dans de nombreux domaines :

- ▶ excitation de suspensions de voitures par une route accidentée

Exemples

on retrouve ce modèle dans de nombreux domaines :

- ▶ excitation de suspensions de voitures par une route accidentée
- ▶ excitation des électrons d'un atome par le champ électromagnétique (bleu du ciel, laser)

Exemples

on retrouve ce modèle dans de nombreux domaines :

- ▶ excitation de suspensions de voitures par une route accidentée
- ▶ excitation des électrons d'un atome par le champ électromagnétique (bleu du ciel, laser)
- ▶ excitation des marées par l'attraction gravitationnelle du soleil et de la lune (périodiques).

Exemples

on retrouve ce modèle dans de nombreux domaines :

- ▶ excitation de suspensions de voitures par une route accidentée
- ▶ excitation des électrons d'un atome par le champ électromagnétique (bleu du ciel, laser)
- ▶ excitation des marées par l'attraction gravitationnelle du soleil et de la lune (périodiques).
- ▶ excitation électrocinétique par une tension sinusoïdale,

Exemples

on retrouve ce modèle dans de nombreux domaines :

- ▶ excitation de suspensions de voitures par une route accidentée
- ▶ excitation des électrons d'un atome par le champ électromagnétique (bleu du ciel, laser)
- ▶ excitation des marées par l'attraction gravitationnelle du soleil et de la lune (périodiques).
- ▶ excitation électrocinétique par une tension sinusoïdale,
- ▶ excitation mécanique périodique (pousser une balançoire)

Exemples

on retrouve ce modèle dans de nombreux domaines :

- ▶ excitation de suspensions de voitures par une route accidentée
- ▶ excitation des électrons d'un atome par le champ électromagnétique (bleu du ciel, laser)
- ▶ excitation des marées par l'attraction gravitationnelle du soleil et de la lune (périodiques).
- ▶ excitation électrocinétique par une tension sinusoïdale,
- ▶ excitation mécanique périodique (pousser une balançoire)
- ▶ excitation mécanique par une onde sonore (verre d'eau/ diapason)



Exemples

on retrouve ce modèle dans de nombreux domaines :

- ▶ excitation de suspensions de voitures par une route accidentée
- ▶ excitation des électrons d'un atome par le champ électromagnétique (bleu du ciel, laser)
- ▶ excitation des marées par l'attraction gravitationnelle du soleil et de la lune (périodiques).
- ▶ excitation électrocinétique par une tension sinusoïdale,
- ▶ excitation mécanique périodique (pousser une balançoire)
- ▶ excitation mécanique par une onde sonore (verre d'eau/ diapason)



- ▶ couplage des deux + rétroaction (Larsen)

1. Oscillateur harmonique amorti par frottement visqueux

2. Régime libre

3. Régime sinusoïdal établi

4. Caractéristiques des réponses harmoniques

1. Oscillateur harmonique amorti par frottement visqueux

1.1 Exemples

1.2 Amortissement par frottement visqueux

2. Régime libre

3. Régime sinusoïdal établi

4. Caractéristiques des réponses harmoniques

Deux systèmes équivalents

point matériel lié à un ressort idéal, sans dissipation

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \rightarrow \text{élongation: } \Delta\ell \quad \text{pulsation: } \omega_0 = \sqrt{k/m}.$$

Deux systèmes équivalents

point matériel lié à un ressort idéal, sans dissipation

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \rightarrow \text{élongation: } \Delta\ell \quad \text{pulsation: } \omega_0 = \sqrt{k/m}.$$

circuit LC, sans dissipation

$$\frac{L\dot{q}^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \rightarrow \text{élongation: } q = Cu_C \quad \text{pulsation: } \omega_0 = 1/\sqrt{LC}.$$

Deux systèmes équivalents

point matériel lié à un ressort idéal, sans dissipation

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \rightarrow \text{élongation: } \Delta\ell \quad \text{pulsation: } \omega_0 = \sqrt{k/m}.$$

circuit LC, sans dissipation

$$\frac{L\dot{q}^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \rightarrow \text{élongation: } q = Cu_C \quad \text{pulsation: } \omega_0 = 1/\sqrt{LC}.$$

Deux systèmes équivalents

point matériel lié à un ressort idéal, sans dissipation

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \rightarrow \text{élongation: } \Delta\ell \quad \text{pulsation: } \omega_0 = \sqrt{k/m}.$$

circuit LC, sans dissipation

$$\frac{L\dot{q}^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \rightarrow \text{élongation: } q = Cu_C \quad \text{pulsation: } \omega_0 = 1/\sqrt{LC}.$$

phénomènes dissipatifs ► $\vec{F}_f = -\alpha \dot{X} \vec{e}_x$ en mécanique

Deux systèmes équivalents

point matériel lié à un ressort idéal, sans dissipation

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \rightarrow \text{élongation: } \Delta\ell \quad \text{pulsation: } \omega_0 = \sqrt{k/m}.$$

circuit LC, sans dissipation

$$\frac{L\dot{q}^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \rightarrow \text{élongation: } q = Cu_C \quad \text{pulsation: } \omega_0 = 1/\sqrt{LC}.$$

phénomènes dissipatifs

- ▶ $\vec{F}_f = -\alpha \dot{X} \vec{e}_x$ en mécanique
- ▶ $u_R = R\dot{q}$ en électrocinétique

Analogie électromécanique

Analogie électromécanique

On peut établir une **analogie mécanique/électrocinétique** entre un oscillateur harmonique mécanique et un oscillateur harmonique :

grandeur	mécanique	électrocinétique
élongation	X	q
vitesse	$\frac{dX}{dt}$	$i = \frac{dq}{dt}$
\mathcal{E}_{pot}	$\frac{1}{2}kx^2$	$\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$
raideur	k	$\frac{1}{C}$
\mathcal{E}_{cin}	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}Li^2$
masse inertielle	m	L
pulsation $\sqrt{\text{raideur}/\text{inertie}}$	$\sqrt{k/m}$	$\sqrt{1/(LC)}$
PFD	$F = -kX = m\dot{V}$	$-\frac{q}{C} = L \frac{di}{dt}$
frottement	$m \frac{d^2X}{dt^2} = -kX - \alpha\dot{X}$	$L \frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{q}{C} - R\dot{q}$

1. Oscillateur harmonique amorti par frottement visqueux

1.1 Exemples

1.2 Amortissement par frottement visqueux

2. Régime libre

3. Régime sinusoïdal établi

4. Caractéristiques des réponses harmoniques

Phénomènes dissipatifs

Amortissement des oscillations en présence de causes d'amortissement

Phénomènes dissipatifs

Amortissement des oscillations en présence de causes d'amortissement

- ▶ forces de frottement : $\vec{F}_f = -\alpha \dot{x} \vec{e}_x$

Phénomènes dissipatifs

Amortissement des oscillations en présence de causes d'amortissement

- ▶ forces de frottement : $\vec{F}_f = -\alpha \dot{x} \vec{e}_x$
- ▶ effet Joule : $u = -R\dot{q}$

Phénomènes dissipatifs

Définition (Équation canonique)

Un oscillateur harmonique d'élongation X et de pulsation propre ω_0 est dit **amorti par frottement visqueux** si X est solution de l'équation différentielle **canonique** :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = 0,$$

caractérisée par le facteur de qualité $Q > 0$, sans dimension.

Phénomènes dissipatifs

Définition (Équation canonique)

Un oscillateur harmonique d'élongation X et de pulsation propre ω_0 est dit **amorti par frottement visqueux** si X est solution de l'équation différentielle **canonique** :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = 0,$$

caractérisée par le facteur de qualité $Q > 0$, sans dimension.

mécanique $Q = k/(\alpha \omega_0) = \sqrt{km}/\alpha$

électrocinétique $Q = 1/(RC \omega_0) = \sqrt{(L/C)}/R$

1. Oscillateur harmonique amorti par frottement visqueux

2. Régime libre

3. Régime sinusoïdal établi

4. Caractéristiques des réponses harmoniques

1. Oscillateur harmonique amorti par frottement visqueux

2. Régime libre

2.1 Portrait de phase

2.2 Réponse à un échelon

2.3 Trois régimes de relaxation vers l'asymptote

2.4 Allure des courbes

2.5 Aspect énergétique

2.6 Exercice : charge d'un dipôle RLC série

3. Régime sinusoïdal établi

4. Caractéristiques des réponses harmoniques

En l'absence de dissipation

Trajectoires dans l'espace des phases

Les trajectoires dans l'espace des phases sont des cercles en coordonnées $(X; \dot{X}/\omega_0)$.

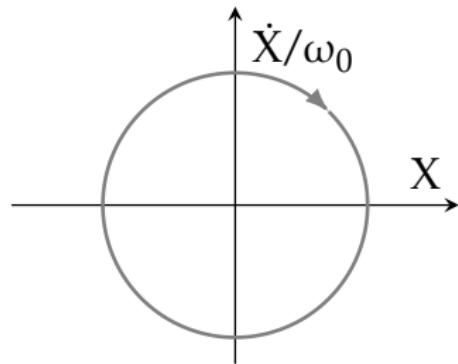
En l'absence de dissipation

Trajectoires dans l'espace des phases

Les trajectoires dans l'espace des phases sont des cercles en coordonnées $(X; \dot{X}/\omega_0)$.

La trajectoire est :

- ▶ q, i en électrocinétique, x, v en mécanique
- ▶ parcourue dans le sens **horaire**
- ▶ **symétrique** : le mouvement est **réversible**
(le film en sens inverse est aussi possible)
- ▶ **fermée** : le mouvement est **périodique**
- ▶ l'énergie mécanique (ou électrocinétique) est proportionnelle au carré de la distance au centre : constante en l'absence de dissipation

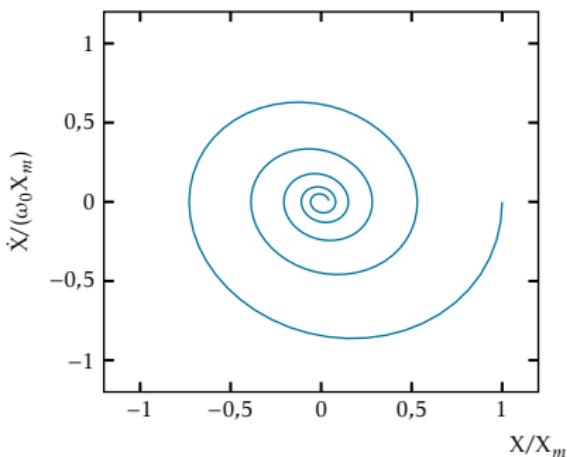


Oscillateur harmonique amorti par frottement visqueux
Régime libre
Régime sinusoïdal établi
Caractéristiques des réponses harmoniques

Portrait de phase
Réponse à un échelon
Trois régimes de relaxation vers l'asymptote
Allure des courbes
Aspect énergétique
Exercice: charge d'un dipôle RLC série.

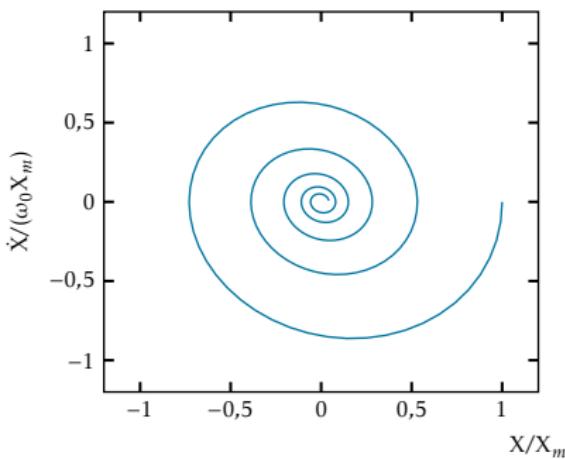
En présence de dissipation, **3** types d'évolution sont possibles, selon la valeur du facteur de qualité Q

Illustration : régime pseudopériodique $Q = 5$



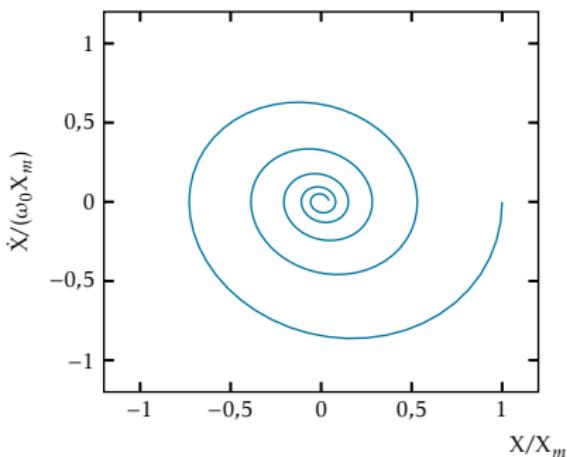
- ▶ l'écart à l'**attracteur** ($X = 0, \dot{X} = 0$) diminue,

Illustration : régime pseudopériodique $Q = 5$



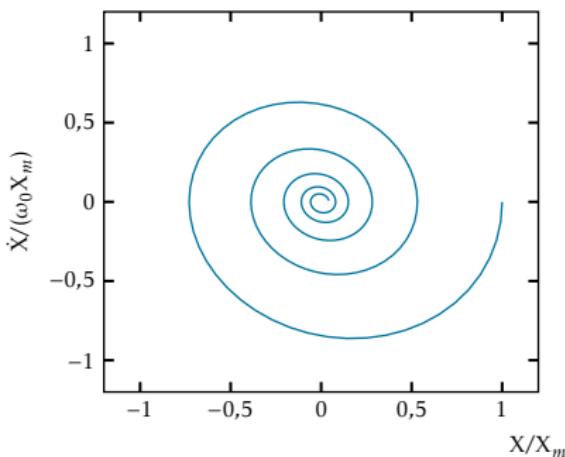
- ▶ l'écart à l'**attracteur** ($X = 0, \dot{X} = 0$) diminue,
- ▶ phénomène **irréversible**: courbe non symétrique, évolution non périodique

Illustration : régime pseudopériodique $Q = 5$



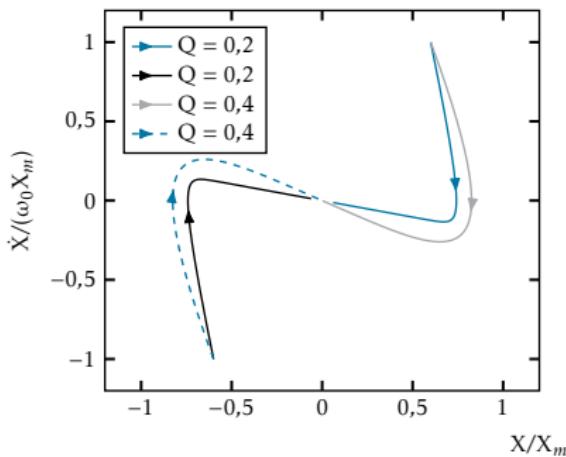
- ▶ l'écart à l'**attracteur** ($X = 0, \dot{X} = 0$) diminue,
- ▶ phénomène **irréversible** : courbe non symétrique, évolution non périodique
- ▶ nombre infini de « tours » (pseudopériode) avant l'équilibre,

Illustration : régime pseudopériodique $Q = 5$



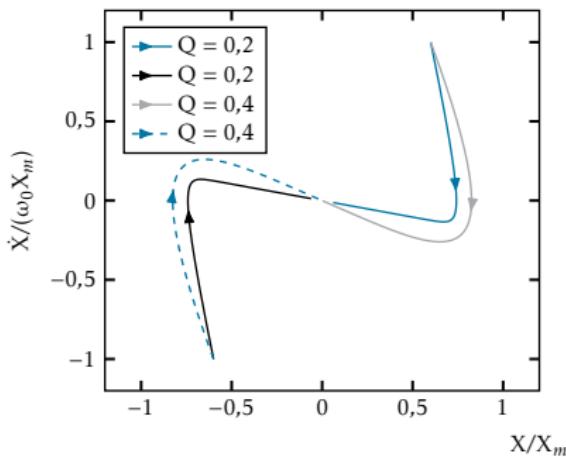
- ▶ l'écart à l'**attracteur** ($X = 0, \dot{X} = 0$) diminue,
- ▶ phénomène **irréversible** : courbe non symétrique, évolution non périodique
- ▶ nombre infini de « tours » (pseudopériode) avant l'équilibre,
- ▶ pour Q élevé, faible diminution relative d'énergie ($-\Delta\mathcal{E}_m/\mathcal{E}_m$) par tour

Illustration : régime apériodique $Q = 0,2$ et $Q = 0,4$



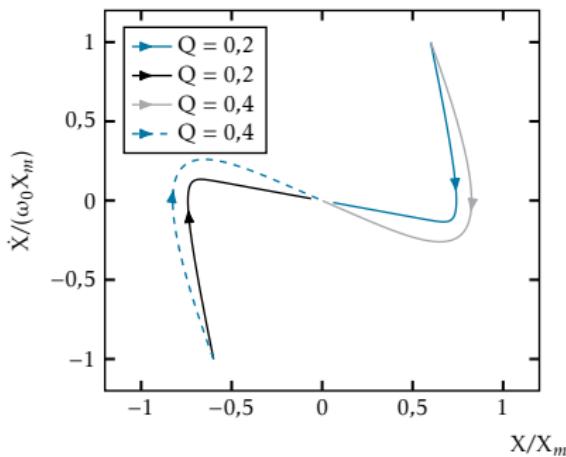
- ▶ la perte d'énergie est plus rapide

Illustration : régime apériodique $Q = 0,2$ et $Q = 0,4$



- ▶ la perte d'énergie est plus rapide
- ▶ la trajectoire ne fait plus le tour de l'attracteur

Illustration : régime apériodique $Q = 0,2$ et $Q = 0,4$



- ▶ la perte d'énergie est plus rapide
- ▶ la trajectoire ne fait plus le tour de l'attracteur
- ▶ on met toujours un temps infini pour se stabiliser à l'attracteur

1. Oscillateur harmonique amorti par frottement visqueux

2. Régime libre

- 2.1 Portrait de phase
- 2.2 Réponse à un échelon
- 2.3 Trois régimes de relaxation vers l'asymptote
- 2.4 Allure des courbes
- 2.5 Aspect énergétique
- 2.6 Exercice : charge d'un dipôle RLC série

3. Régime sinusoïdal établi

4. Caractéristiques des réponses harmoniques

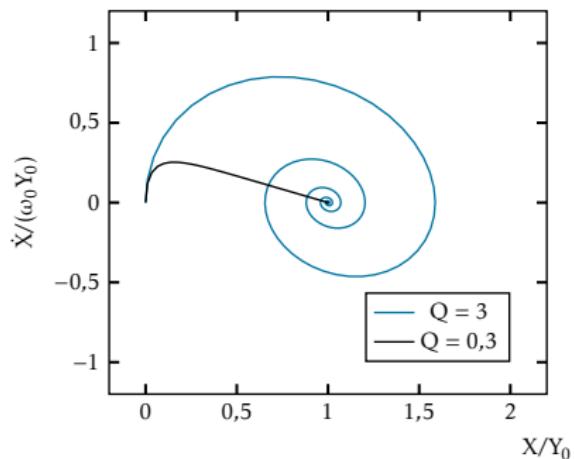
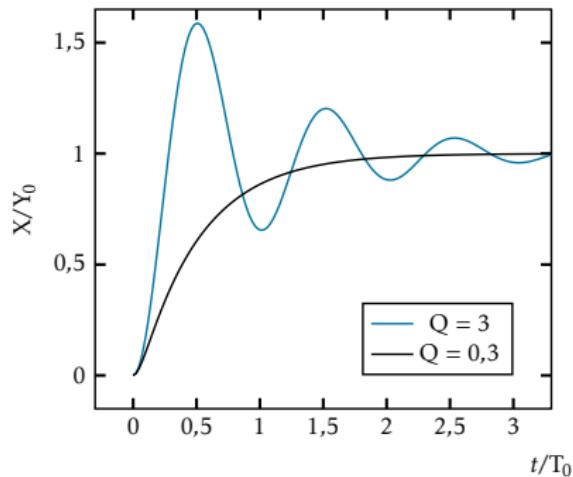
Réalisation

Excitation par une fonction de Heaviside : $Y(t) = Y_0H(t)$:

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 Y_0 H(t)$$

mécanique en lâchant la masse m initialement soutenue ou en déplaçant brutalement le point d'attache du ressort
electrocinétique en excitant le dipôle par un échelon de tension
le système évolue vers $X_\infty = Y_0$

Réalisation



1. Oscillateur harmonique amorti par frottement visqueux

2. Régime libre

- 2.1 Portrait de phase
- 2.2 Réponse à un échelon
- 2.3 Trois régimes de relaxation vers l'asymptote**
- 2.4 Allure des courbes
- 2.5 Aspect énergétique
- 2.6 Exercice : charge d'un dipôle RLC série

3. Régime sinusoïdal établi

4. Caractéristiques des réponses harmoniques

Régimes transitoires

Théorème (Régimes transitoires)

On distingue trois régimes transitoires :

régime apériodique pour $Q < \frac{1}{2}$

$$x(t) = X_\infty + e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} (X_1 \cosh \omega t + X_2 \sinh \omega t)$$

régime critique pour $Q = \frac{1}{2}$

$$x(t) = X_\infty + e^{-\omega_0 t} (X_1 + X_2 \omega_0 t)$$

régime pseudo-périodique amorti pour $Q > \frac{1}{2}$

$$x(t) = X_\infty + e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} (X_1 \cos \omega t + X_2 \sin \omega t) = X_\infty + X e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \cos (\omega t + \varphi)$$

avec :

$$\omega \equiv \omega_0 \sqrt{\left| \frac{1}{4Q^2} - 1 \right|} = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{|4Q^2 - 1|}$$

Caractéristiques

- ▶ l'écart à l'asymptote $x - X_\infty$ décroît exponentiellement en un temps de l'ordre de $\frac{\max(Q; 1/Q)}{\omega_0}$

Caractéristiques

- ▶ l'écart à l'asymptote $x - X_\infty$ décroît exponentiellement en un temps de l'ordre de $\frac{\max(Q; 1/Q)}{\omega_0}$
- ▶ quel que soit Q le régime transitoire dépend de deux paramètres (X_1, X_2) ou (X, φ) , **déterminés par les conditions initiales**

Caractéristiques

- ▶ l'écart à l'asymptote $x - X_\infty$ décroît exponentiellement en un temps de l'ordre de $\frac{\max(Q; 1/Q)}{\omega_0}$
- ▶ quel que soit Q le régime transitoire dépend de deux paramètres (X_1, X_2) ou (X, φ) , **déterminés par les conditions initiales**
- ▶ dans le cas $Q = 1/2$, on a **artificiellement** rajouté un ω_0 pour que les deux constantes X_1 et X_2 aient la même dimension, celle de X

Résistance et frottement critiques

Résistance critique

Un dipôle RLC série est caractérisé par une **résistance critique** $R_c = 2\sqrt{L/C}$. Soumis à un échelon de tension, la nature de son évolution temporelle dépend de $R - R_c$. Elle est :

apériodique pour les forts amortissements ie $R > R_c \leftrightarrow Q < \frac{1}{2}$,

critique pour $R = R_c \leftrightarrow Q = \frac{1}{2}$,

pseudopériodique amorti pour les faibles amortissements ie $R < R_c \leftrightarrow Q > \frac{1}{2}$.

La «durée» du régime transitoire est minimale pour $R = R_c$, infinie pour $Q = 0$ et $Q \rightarrow \infty$.

Résistance et frottement critiques

Résistance critique

Un dipôle RLC série est caractérisé par une **résistance critique** $R_c = 2\sqrt{L/C}$. Soumis à un échelon de tension, la nature de son évolution temporelle dépend de $R - R_c$. Elle est :

apériodique pour les forts amortissements ie $R > R_c \leftrightarrow Q < \frac{1}{2}$,

critique pour $R = R_c \leftrightarrow Q = \frac{1}{2}$,

pseudopériodique amorti pour les faibles amortissements ie $R < R_c \leftrightarrow Q > \frac{1}{2}$.

La «durée» du régime transitoire est minimale pour $R = R_c$, infinie pour $Q = 0$ et $Q \rightarrow \infty$.

- ▶ dans un oscillateur mécanique, c'est le coefficient de frottement $\alpha_c = 2m\omega_0$ qui jouera le rôle de R_c
- ▶ $R = 1\text{ k}\Omega$, $L = 10\text{ mH}$, $C = 1\text{ }\mu\text{F} \rightarrow f_0 \equiv \omega_0/(2\pi) = 1,5\text{ kHz}$ et $Q = 0,1$

1. Oscillateur harmonique amorti par frottement visqueux

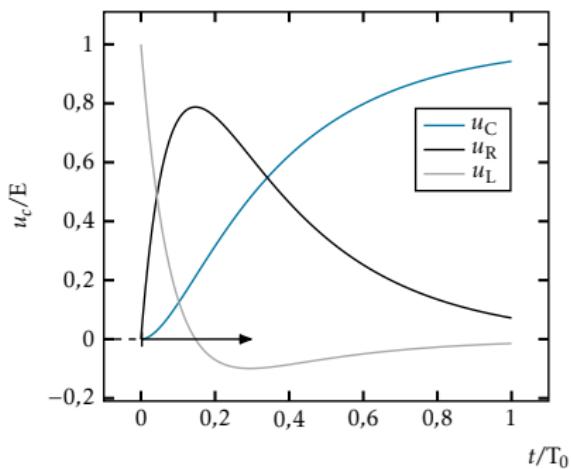
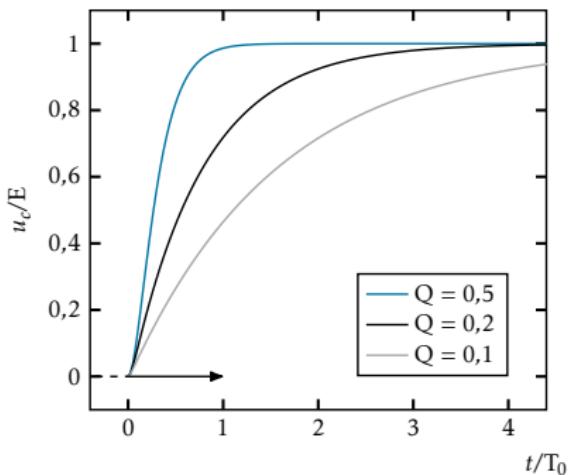
2. Régime libre

- 2.1 Portrait de phase
- 2.2 Réponse à un échelon
- 2.3 Trois régimes de relaxation vers l'asymptote
- 2.4 Allure des courbes**
- 2.5 Aspect énergétique
- 2.6 Exercice : charge d'un dipôle RLC série

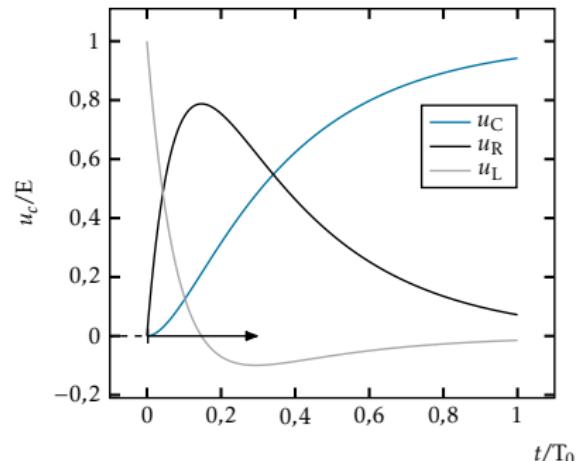
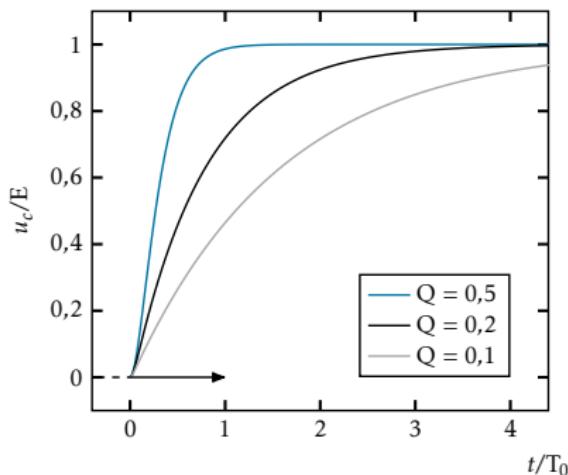
3. Régime sinusoïdal établi

4. Caractéristiques des réponses harmoniques

Régimes apériodique et critique

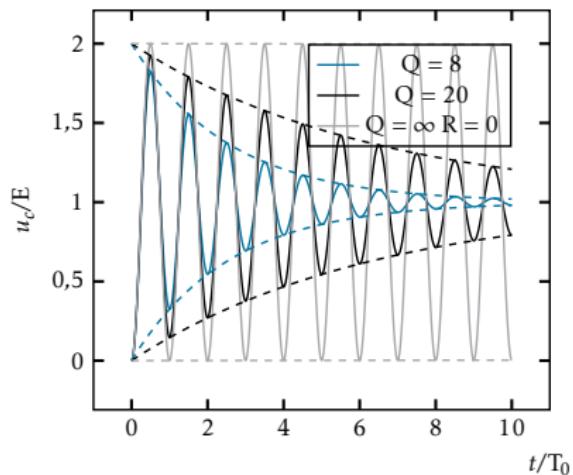
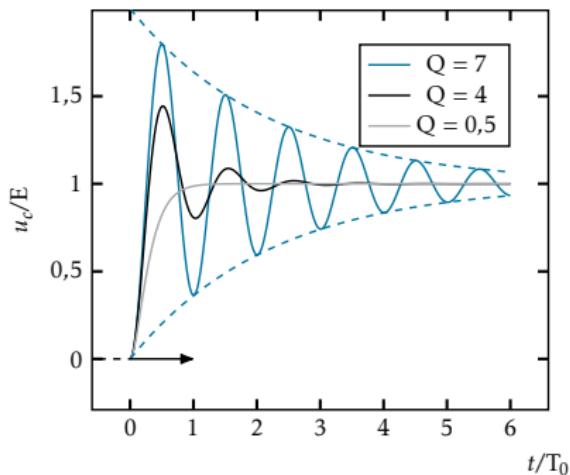


Régimes apériodique et critique

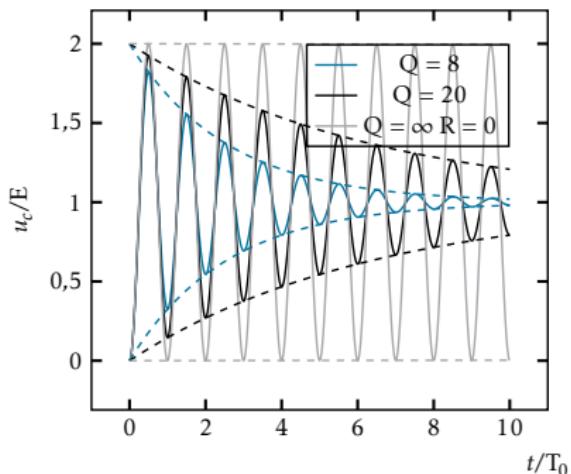
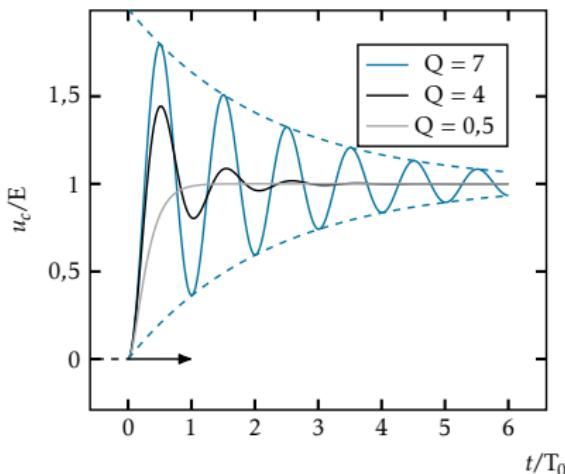


- ressemble à une exponentielle mais la tangente peut être nulle à l'origine
- un seul maximum ou minimum, dépasse au plus une fois l'asymptote (u_L et l'accélération)

Régime pseudopériodique amorti



Régime pseudopériodique amorti



- ▶ **pseudopériodique** car $x - X_\infty = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} f(t)$ avec $f(t)$ périodique de période $T = 2\pi/\omega$
- ▶ positions des maxima locaux dépendent de Q
- ▶ infinité de maxima locaux/ dépassement de x_∞
- ▶ $T > T_0 = 2\pi/\omega_0$ et $T \rightarrow T_0$ pour $Q \rightarrow \infty$

Décrément logarithmique

Enveloppe exponentielle

En régime pseudopériodique amorti :

- ▶ l'amplitude des oscillations est « enveloppée » par des exponentielles de constante de temps $2Q/\omega_0$.
- ▶ pour toute grandeur x , : la quantité $\ln \frac{x(t)-x_\infty}{x(t+2\pi/\omega)-x_\infty}$ est une constante, indépendante de t , nommée **décrément logarithmique** et notée δ . On a :

$$\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \underset{Q \rightarrow \infty}{\approx} \frac{\pi}{Q}$$

Décrément logarithmique

Enveloppe exponentielle

En régime pseudopériodique amorti :

- ▶ l'amplitude des oscillations est « enveloppée » par des exponentielles de constante de temps $2Q/\omega_0$.
- ▶ pour toute grandeur x , : la quantité $\ln \frac{x(t)-x_\infty}{x(t+2\pi/\omega)-x_\infty}$ est une constante, indépendante de t , nommée **décrément logarithmique** et notée δ . On a :

$$\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \underset{Q \rightarrow \infty}{\approx} \frac{\pi}{Q}$$

- ▶ l'enveloppe est atteinte avec une périodicité de $2\pi/\omega$, mais le contact n'est pas **exactement sur les maxima locaux**
- ▶ Q peut être déterminé :
 - ▶ par la constante de l'exponentielle (si Q est élevé)
 - ▶ ou le décrément logarithmique (si Q est faible)

1. Oscillateur harmonique amorti par frottement visqueux

2. Régime libre

- 2.1 Portrait de phase
- 2.2 Réponse à un échelon
- 2.3 Trois régimes de relaxation vers l'asymptote
- 2.4 Allure des courbes

2.5 Aspect énergétique

- 2.6 Exercice : charge d'un dipôle RLC série

3. Régime sinusoïdal établi

4. Caractéristiques des réponses harmoniques

Circuit LC oscillant

pas de source de dissipation, par analogie avec l'oscillateur mécanique :

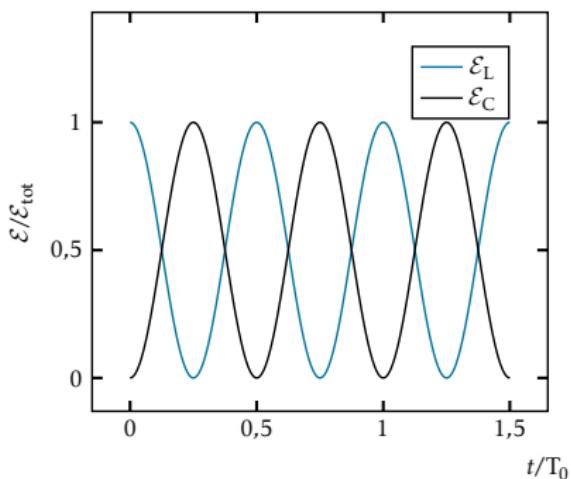
Circuit LC oscillant

Équipartition de l'énergie

La somme des énergies électrostatique et magnétique se conserve dans un circuit LC oscillant. Elle est périodiquement transférée de la forme magnétique à la forme électrostatique à la pulsation $2\omega_0$. En moyenne temporelle :

$$2 \langle \mathcal{E}_{\text{élec}} \rangle = 2 \langle \mathcal{E}_{\text{mag}} \rangle = \frac{Q_0^2}{2C} = \frac{LI_0^2}{2},$$

avec Q_0 la charge maximale du condensateur et I_0 l'intensité maximale du courant.



Oscillateur harmonique amorti par frottement visqueux
Régime libre
Régime sinusoïdal établi
Caractéristiques des réponses harmoniques

Portrait de phase
Réponse à un échelon
Trois régimes de relaxation vers l'asymptote
Allure des courbes
Aspect énergétique
Exercice: charge d'un diôde RLC série

Circuit LC oscillant

Circuit LC oscillant

- ▶ en particulier : pas d'état asymptotique

Circuit LC oscillant

- ▶ en particulier : pas d'état asymptotique
- ▶ les énergies oscillent deux fois plus rapidement que u et i

Avec amortissement

Décroissance de l'énergie

L'énergie mécanique $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}kX^2 + \frac{1}{2}m\dot{X}^2$ d'un oscillateur harmonique amorti par frottement visqueux décroît avec le temps jusqu'à un équilibre d'elongation nulle ($X = 0 ; \dot{X} = 0$).



$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_f) = -\alpha v^2 \leqslant 0 \quad \frac{d(\mathcal{E}_{\text{mag}} + \mathcal{E}_{\text{élec}})}{dt} = -Ri^2 \leqslant 0.$$

- ▶ $X = x - X_\infty$ dans le cas de la réponse à un échelon
- ▶ l'énergie est dissipée par effet Joule/ par frottement

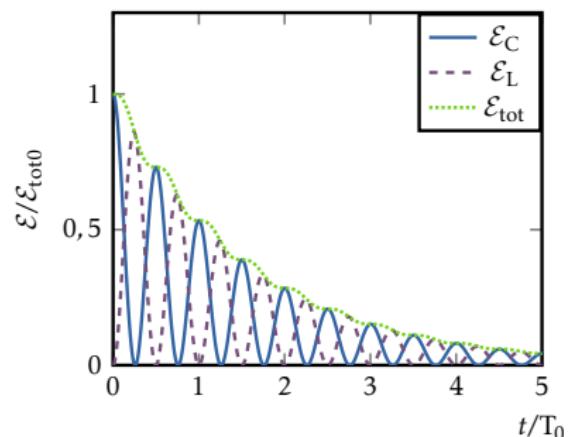
Régime très faiblement amorti $Q \gg 1$

en régime très faiblement amorti : $Q \gg 1$

Régime très faiblement amorti $Q \gg 1$

Décroissance quasi-exponentielle

- ▶ l'évolution de la somme des énergie magnétique et électrostatique est peu différente d'une décroissance exponentielle de temps caractéristique Q/ω_0
- ▶ la diminution relative d'énergie par effet Joule sur une pseudo-période est inversement proportionnelle à Q



1. Oscillateur harmonique amorti par frottement visqueux

2. Régime libre

- 2.1 Portrait de phase
- 2.2 Réponse à un échelon
- 2.3 Trois régimes de relaxation vers l'asymptote
- 2.4 Allure des courbes
- 2.5 Aspect énergétique
- 2.6 Exercice : charge d'un dipôle RLC série

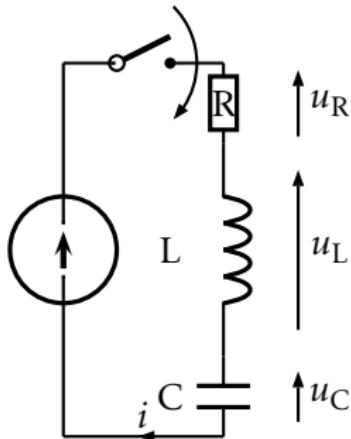
3. Régime sinusoïdal établi

4. Caractéristiques des réponses harmoniques

Conditions initiales et asymptotiques

On considère le circuit de la figure ci-contre. L'interrupteur est initialement ouvert et le condensateur déchargé. On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$.

- 1 a Établir les équations différentielles vérifiées par les tensions aux bornes de chacun des dipôles et le courant les traversant.
- b Exprimer de deux manières différentes le facteur de qualité en fonction de la pulsation caractéristique ω_0 du circuit et des constantes de temps des dipôles $R - C$ et $R - L$ série.



Conditions initiales et asymptotiques

- 2 a Quelles seront les valeurs pour $t \gg Q/\omega_0$ et pour $t = 0^+$ de la tension u_C , de l'intensité i_L et de la tension u_L ?
b En déduire les conditions initiales des équations différentielles vérifiées par u_C , u_R et u_L .
c En déduire, pour le régime pseudopériodique amorti, l' expression, pour $t > 0$ de la tension u_C , en fonction uniquement de E , Q et ω_0 .

Correction

1 a

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = E \rightarrow \frac{d^2X}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = 0$$

b

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Q = \omega_0 \frac{L}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$$

2 a condensateur \leftrightarrow interrupteur ouvert, (bobine \leftrightarrow interrupteur fermé)

$$i = cste = 0 \rightarrow u_L = u_R = 0 \rightarrow u_C = E$$

b $i = cste = 0 \rightarrow u_L = u_R = 0 \rightarrow u_C = 0 : u_C(0) = 0, \frac{du_C}{dt}(0) = 0$

Correction : expressions générales

$$u_C(t) = E \left[1 - e^{-\omega_0 t / (2Q)} \left(\cos \left(\frac{\omega_0 t}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1} \right) + \frac{\sin \left(\frac{\omega_0 t}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1} \right)}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \right) \right]$$
$$i(t) = \frac{2E}{R} \frac{\sin \left(\frac{\omega_0 t}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1} \right)}{\sqrt{4Q^2 - 1}} e^{-\omega_0 t / (2Q)}$$
$$u_L(t) = E e^{-\omega_0 t / (2Q)} \left(\cos \left(\frac{\omega_0 t}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1} \right) - \frac{\sin \left(\frac{\omega_0 t}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1} \right)}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \right)$$

1. Oscillateur harmonique amorti par frottement visqueux
2. Régime libre
3. Régime sinusoïdal établi
4. Caractéristiques des réponses harmoniques

1. Oscillateur harmonique amorti par frottement visqueux

2. Régime libre

3. Régime sinusoïdal établi

3.1 Équation canonique

3.2 Cadre mathématique

3.3 Réponse harmonique

3.4 Détermination

4. Caractéristiques des réponses harmoniques

Exemple en mécanique

Point matériel M de masse m en mouvement unidimensionnel vertical soumis dans \mathcal{T} galiléen à :

- ▶ son poids $\vec{P} = m\vec{g}$
- ▶ une force de frottement visqueux $\vec{F}_f = -\alpha\dot{z}\vec{e}_z$
- ▶ la force de rappel d'un ressort dont l'autre extrémité A est mobile : $z_A(t)$

Exemple en mécanique

Point matériel M de masse m en mouvement unidimensionnel vertical soumis dans \mathcal{T} galiléen à :

- ▶ son poids $\vec{P} = m\vec{g}$
- ▶ une force de frottement visqueux $\vec{F}_f = -\alpha\dot{z}\vec{e}_z$
- ▶ la force de rappel d'un ressort dont l'autre extrémité A est mobile : $z_A(t)$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{dz}{dt} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}z_A(t).$$

Exemple en mécanique

Point matériel M de masse m en mouvement unidimensionnel vertical soumis dans \mathcal{T} galiléen à :

- ▶ son poids $\vec{P} = m\vec{g}$
- ▶ une force de frottement visqueux $\vec{F}_f = -\alpha\dot{z}\vec{e}_z$
- ▶ la force de rappel d'un ressort dont l'autre extrémité A est mobile : $z_A(t)$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{dz}{dt} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}z_A(t).$$

- ▶ 2^emembre variable $z_A(t)$
- ▶ équivalent à exercer directement sur M la force $\vec{F}_A = kz_A(t)$

Exemple en électrocinétique

circuit RLC série soumis à une tension excitatrice $u(t)$ variable

Exemple en électrocinétique

circuit RLC série soumis à une tension excitatrice $u(t)$ variable

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = \frac{u(t)}{LC}$$

Équation canonique

Définition (Équation canonique)

L'équation canonique d'un oscillateur harmonique forcé est :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 Y(t),$$

avec $Y(t)$ le terme dit de **forçage** ou **excitateur**.

Équation canonique

Définition (Équation canonique)

L'équation canonique d'un oscillateur harmonique forcé est :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 Y(t),$$

avec $Y(t)$ le terme dit de **forçage** ou **excitateur**.

on retrouve le régime libre et la réponse à un échelon pour $Y(t) = cste.$

1. Oscillateur harmonique amorti par frottement visqueux

2. Régime libre

3. Régime sinusoïdal établi

3.1 Équation canonique

3.2 Cadre mathématique

3.3 Réponse harmonique

3.4 Détermination

4. Caractéristiques des réponses harmoniques

Cadre mathématique

Théorème (Principe de superposition)

L'élongation d'un oscillateur harmonique forcé est solution d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients réels constants et positifs et à second membre variable.

Les solutions vérifient donc le principe de superposition : si

$$\begin{cases} X_1(t) & \text{est une solution pour } Y_1(t) \\ X_2(t) & \text{est une solution pour } Y_2(t) \end{cases},$$

alors :

$\lambda_1 X_1(t) + \lambda_2 X_2(t)$ sera une solution pour $\lambda_1 Y_1(t) + \lambda_2 Y_2(t)$,

quelles que soient les constantes λ_1 et λ_2 .

Solution générale

Théorème (Solution générale)

À un couple de conditions initiales $(X(t_0), \dot{X}(t_0))$ correspond une unique solution (le problème est dit **déterministe**). Cette solution sera la somme : du régime transitoire un des régimes libres, solution de l'équation homogène $Y(t) = 0$.

- ▶ il peut être pseudopériodique amorti ($Q > \frac{1}{2}$), critique ($Q = \frac{1}{2}$) ou apériodique ($Q < \frac{1}{2}$),
- ▶ il s'amortit exponentiellement avec un temps caractéristique τ de l'ordre de $\max(Q/\omega_0; 1/(Q\omega_0))$.

du régime forcé une solution particulière, prépondérante pour $t \gg \tau$.

Conditions initiales

Conditions initiales

On établira les conditions initiales en utilisant la continuité de l'élongation X et de la vitesse \dot{X} assurées par les continuités :

mécanique de $\mathcal{E}_{\text{pot}} = \frac{1}{2}kx^2$ et $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$,

électrocinétique de $\mathcal{E}_{\text{élec}} = q^2/(2C)$ et $\mathcal{E}_{\text{mag}} = L\dot{q}^2/2$.

1. Oscillateur harmonique amorti par frottement visqueux

2. Régime libre

3. Régime sinusoïdal établi

3.1 Équation canonique

3.2 Cadre mathématique

3.3 Réponse harmonique

3.4 Détermination

4. Caractéristiques des réponses harmoniques

Excitation sinusoïdale

Réponse harmonique

Le régime établi d'un oscillateur de pulsation ω_0 excité par un signal sinusoïdal à la pulsation ω :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 Y_m \cos \omega t,$$

est une fonction sinusoïdale de même pulsation ω :

$$X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi).$$

C'est la réponse harmonique du système, indépendante des conditions initiales.

Excitation sinusoïdale

Réponse harmonique

Le régime établi d'un oscillateur de pulsation ω_0 excité par un signal sinusoïdal à la pulsation ω :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 Y_m \cos \omega t,$$

est une fonction sinusoïdale de même pulsation ω :

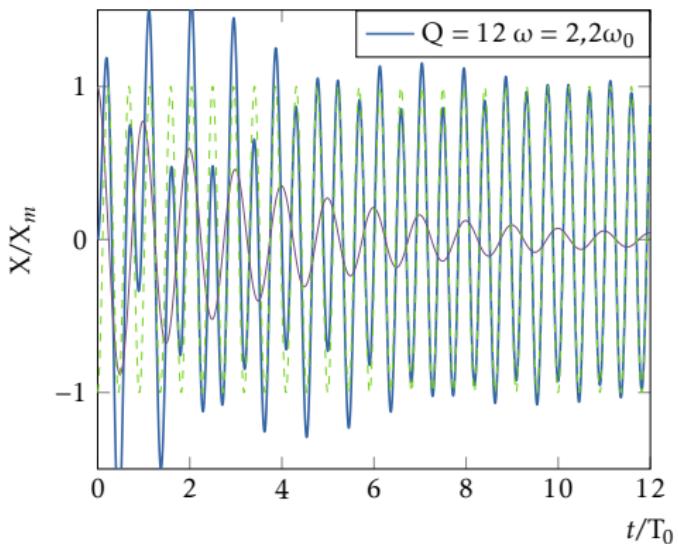
$$X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi).$$

C'est la réponse harmonique du système, indépendante des conditions initiales.

- ▶ caractérisée par son amplitude X_m et son déphasage φ , qui dépendent tous les deux de ω (X_m dépend aussi de Y_m)
- ▶ en régime établi, l'excitation sinusoïdale apporte par période exactement l'énergie perdue par le terme dissipatif pour que l'énergie mécanique moyenne soit constante.

Évolution temporelle

- ▶ pulsation propre ω_0 ,
- ▶ excitation à $\omega = 2,2\omega_0$
- ▶ $Q = 12$
- ▶
 - ▶ réponse en trait gras
 - ▶ régime établi en traits fins interrompus
 - ▶ régime transitoire en trait fin continu



1. Oscillateur harmonique amorti par frottement visqueux

2. Régime libre

3. Régime sinusoïdal établi

3.1 Équation canonique

3.2 Cadre mathématique

3.3 Réponse harmonique

3.4 Détermination

4. Caractéristiques des réponses harmoniques

Notation complexe

Définition (Forme exponentielle complexe)

La **forme exponentielle complexe** d'une fonction sinusoïdale réelle $X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ est :

$$\underline{X}(t) = X_m e^{j(\omega t + \varphi)} \text{ ou } \underline{X}_m e^{j(\omega t)} \text{ avec: } \underline{X}_m \equiv X_m e^{j\varphi}.$$

Notation complexe

Définition (Forme exponentielle complexe)

La forme exponentielle complexe d'une fonction sinusoïdale réelle $X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ est :

$$\underline{X}(t) = X_m e^{j(\omega t + \varphi)} \text{ ou } \underline{X}_m e^{j(\omega t)} \text{ avec: } \underline{X}_m \equiv X_m e^{j\varphi}.$$

Solutions complexe et réelle

Si $\underline{X}(t) = X_m e^{j(\omega t + \varphi)}$ est une solution complexe associée à $\omega_0^2 Y_m e^{j\omega t}$, alors $X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}(X_m e^{j(\omega t + \varphi)})$ est une solution réelle associée à $\omega_0^2 Y_m \cos(\omega t)$.

De l'équation différentielle à l'équation algébrique

- ▶ $\frac{d}{dt} \Leftrightarrow \times j\omega$ et $\frac{d^2}{dt^2} \Leftrightarrow \times -\omega^2$
- ▶ on transforme l'équation **définie** en équation **algébrique**

De l'équation différentielle à l'équation algébrique

- ▶ $\frac{d}{dt} \Leftrightarrow \times j\omega$ et $\frac{d^2}{dt^2} \Leftrightarrow \times -\omega^2$
- ▶ on transforme l'équation **définie** en équation **algébrique**

On calcule alors :

$$\underline{X}_m = \frac{Y_m}{(1-u^2+j\frac{u}{Q})} \quad \text{avec: } u \equiv \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\frac{\underline{X}_m}{Y_m} \equiv Re^{j\varphi} \quad \text{avec: } R = \sqrt{\frac{1}{(1-u^2)^2 + (\frac{u}{Q})^2}} ; \varphi = -\arg\left(1 - u^2 + j\frac{u}{Q}\right)$$

On obtient alors la fonction **réelle**

$$X(t) = RY_m \cos(\omega t + \varphi)$$

1. Oscillateur harmonique amorti par frottement visqueux
2. Régime libre
3. Régime sinusoïdal établi
4. Caractéristiques des réponses harmoniques

1. Oscillateur harmonique amorti par frottement visqueux

2. Régime libre

3. Régime sinusoïdal établi

4. Caractéristiques des réponses harmoniques

4.1 Réponse en élongation

4.2 Réponse en vitesse

Réponse en élongation

Définition (Réponse harmonique en élongation)

Le quotient $R(u) \equiv X_m(\omega)/Y_m$ des amplitudes de l'élongation du régime du régime sinusoïdal et du signal exciteur est nommé **réponse harmonique en élongation** du système.

Réponse en élongation

Définition (Réponse harmonique en élongation)

Le quotient $R(u) \equiv X_m(\omega)/Y_m$ des amplitudes de l'élongation du régime du régime sinusoïdal et du signal exciteur est nommé **réponse harmonique en élongation** du système.

Comportements asymptotiques

Réponse en élongation

Définition (Réponse harmonique en élongation)

Le quotient $R(u) \equiv X_m(\omega)/Y_m$ des amplitudes de l'élongation du régime du régime sinusoïdal et du signal excitateur est nommé **réponse harmonique en élongation** du système.

Comportements asymptotiques

- ▶ $u \ll 1 : R(u) \rightarrow 1$: la réponse suit exactement l'excitation.

Réponse en élongation

Comportements asymptotiques

- ▶ $u \ll 1 : R(u) \rightarrow 1$: la réponse suit exactement l'excitation.
- ▶ $u \gg 1 : R(u) \rightarrow 0$: l'excitation est trop rapide pour être suivie.

Réponse en élongation

Définition (Résonance en élongation)

La réponse harmonique en élongation d'un oscillateur harmonique amorti par frottement visqueux forcé à la pulsation ω présente un maximum pour $Q > 1/\sqrt{2}$. Il est dans ce cas atteint en :

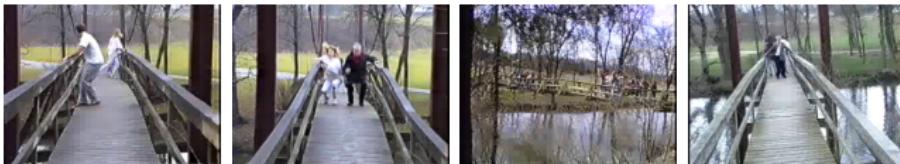
$$\omega_{res} = \omega_0 \sqrt{1 - 1/(2Q^2)} \xrightarrow[Q \rightarrow \infty]{} \omega_0,$$

où il vaut: $R_{\max} = \frac{X_m(\omega_{res})}{Y_m} = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \underset{Q \rightarrow \infty}{\sim} Q.$

On dit qu'on observe alors une résonance en élongation.

Réponse en élongation

- ▶ l'amplitude de l'oscillateur devient très supérieure à celle de l'excitation



Variations de la phase φ

- ▶  : $\text{Re}(\underline{R})$ peut changer de signe, on calculera φ selon :

$$\varphi = -\arg \left[1 - u^2 + j \frac{u}{Q} \right] = -\arg [j(j(u^2 - 1) + u/Q)] = -\pi/2 - \arctan \left(\frac{Q(u^2 - 1)}{u} \right)$$

- ▶ on peut également la déterminer par construction de Fresnel

Variations de la phase φ

- ▶  : $\text{Re}(\underline{R})$ peut changer de signe, on calculera φ selon :

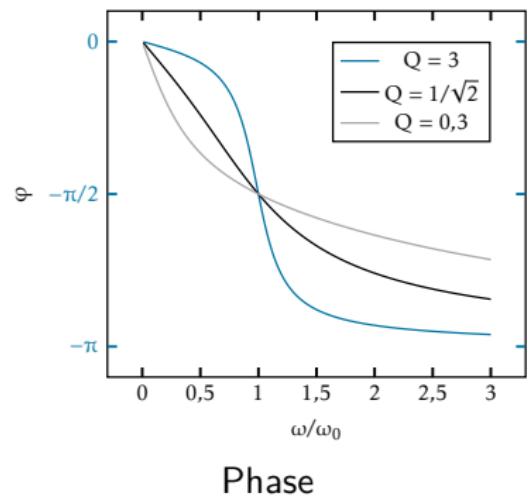
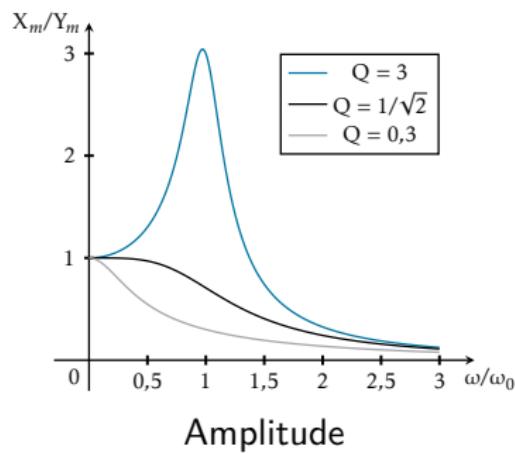
$$\varphi = -\arg \left[1 - u^2 + j \frac{u}{Q} \right] = -\arg \left[j(j(u^2 - 1) + u/Q) \right] = -\pi/2 - \arctan \left(\frac{Q(u^2 - 1)}{u} \right)$$

- ▶ on peut également la déterminer par construction de Fresnel

Comportements asymptotiques de φ

- ▶ $u \ll 1 \rightarrow \varphi = 0$: la réponse est **en phase** avec l'excitation
- ▶ $u \gg 1 \rightarrow \varphi = -\pi$: la réponse est en **opposition de phase**
- ▶ $u = 1 \rightarrow \varphi = -\pi/2$: l'élongation est en **quadrature retard**.
L'excitation est en particulier maximale quand l'élongation est nulle et vice-versa.

Courbes des réponses en élongation



Limitation de l'amplitude

- ▶ $R_{\max} \rightarrow \infty$ quand $Q \rightarrow \infty$
- ▶ dans un système réel, la force de rappel ne varie plus en $-kX$ pour les élongations X trop importantes
- ▶ pour les trop grandes valeurs de X l'évolution peut ne plus être réversible, on peut même détruire le système (verre qui éclate, pont qui s'écroule...)

1. Oscillateur harmonique amorti par frottement visqueux
2. Régime libre
3. Régime sinusoïdal établi
- 4. Caractéristiques des réponses harmoniques**
 - 4.1 Réponse en élongation
 - 4.2 Réponse en vitesse

Réponse en vitesse

Réponse harmonique en vitesse

En notant la notation complexe de la dérivée temporelle $V(t) = \frac{dX}{dt}(t)$ de l'élongation (vitesse) selon $\underline{V}(t) = V_m e^{j(\omega t + \varphi_V)}$. On a :

$$V_m = \omega X_m \quad \text{et} \quad \varphi_V(\omega) = \varphi(\omega) + \pi/2.$$

La vitesse est en **quadrature avance** par rapport à l'élongation.

Le quotient $V_m(\omega) / (\omega_0 Y_m) = R_V(u)$ est nommé **réponse harmonique en vitesse** du système.

Réponse en vitesse

Réponse harmonique en vitesse

En notant la notation complexe de la dérivée temporelle $V(t) = \frac{dX}{dt}(t)$ de l'élongation (vitesse) selon $\underline{V}(t) = V_m e^{j(\omega t + \varphi_V)}$. On a :

$$V_m = \omega X_m \quad \text{et} \quad \varphi_V(\omega) = \varphi(\omega) + \pi/2.$$

La vitesse est en **quadrature avance** par rapport à l'élongation.

Le quotient $V_m(\omega) / (\omega_0 Y_m) = R_V(u)$ est nommé **réponse harmonique en vitesse** du système.

Réponse en vitesse

Réponse harmonique en vitesse

En notant la notation complexe de la dérivée temporelle $V(t) = \frac{dX}{dt}(t)$ de l'élongation (vitesse) selon $\underline{V}(t) = V_m e^{j(\omega t + \varphi_V)}$. On a :

$$V_m = \omega X_m \quad \text{et} \quad \varphi_V(\omega) = \varphi(\omega) + \pi/2.$$

La vitesse est en **quadrature avance** par rapport à l'élongation.

Le quotient $V_m(\omega) / (\omega_0 Y_m) = R_V(u)$ est nommé **réponse harmonique en vitesse** du système.

- ▶ $u \ll 1 : R_V(u) \rightarrow 0$ car les oscillations sont de fréquence très faible.

Réponse en vitesse

Réponse harmonique en vitesse

En notant la notation complexe de la dérivée temporelle $V(t) = \frac{dX}{dt}(t)$ de l'élongation (vitesse) selon $\underline{V}(t) = V_m e^{j(\omega t + \varphi_V)}$. On a :

$$V_m = \omega X_m \quad \text{et} \quad \varphi_V(\omega) = \varphi(\omega) + \pi/2.$$

La vitesse est en **quadrature avance** par rapport à l'élongation.

Le quotient $V_m(\omega) / (\omega_0 Y_m) = R_V(u)$ est nommé **réponse harmonique en vitesse** du système.

- ▶ $u \ll 1 : R_V(u) \rightarrow 0$ car les oscillations sont de fréquence très faible.
- ▶ $u \gg 1 : R_V(u) \rightarrow 0$ car l'amplitude des oscillations tend vers 0 plus vite que leur fréquence ne tend vers l'infini.

Résonance en vitesse

Résonance en vitesse

La réponse harmonique en vitesse d'un oscillateur harmonique amorti par frottement visqueux présente un maximum pour $\omega = \omega_0$. On a :

$$\frac{V_m(\omega_0)}{\omega_0 Y_m} = Q.$$

Résonance en vitesse

Résonance en vitesse

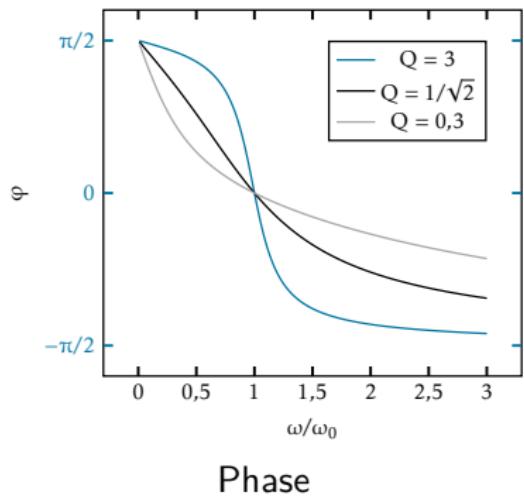
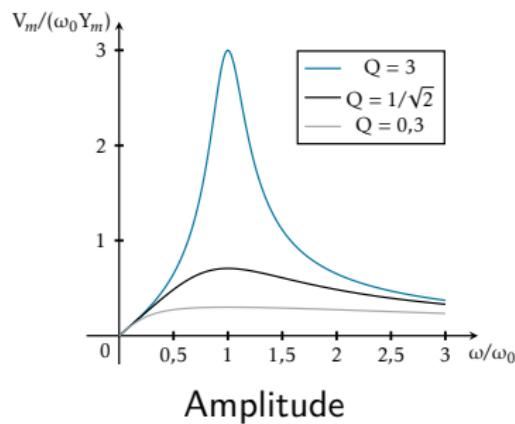
La réponse harmonique en vitesse d'un oscillateur harmonique amorti par frottement visqueux présente un maximum pour $\omega = \omega_0$. On a :

$$\frac{V_m(\omega_0)}{\omega_0 Y_m} = Q.$$

contrairement à la réponse en élongation :

- ▶ il y a résonance quel que soit Q ,
- ▶ la résonance est toujours pour $\omega = \omega_0$

Courbes des réponses en vitesse



Indispensable

- ▶ équations canoniques avec Q , ω_0
- ▶ déterminations des régimes asymptotiques avec les équivalents (interrupteurs ouverts ou fermés)
- ▶ forme générale de la solution du 1^{er}ordre et sa courbe
- ▶ régime du deuxième ordre non amorti
- ▶ les 3 régimes du deuxième ordre amorti et les caractéristiques de leurs courbes
- ▶ l'enveloppe exponentielle
- ▶ le régime très faiblement amorti $Q \gg 1$
- ▶ les interprétations énergétiques

Oscillateur harmonique amorti par frottement visqueux
Régime libre
Régime sinusoïdal établi
Caractéristiques des réponses harmoniques

Réponse en élongation
Réponse en vitesse

Effondrement du pont de Tacoma



Exemple de code python I

Intégration numérique du mouvement d'un oscillateur harmonique amorti en régime sinusoïdal forcé

```
import numpy as np
import scipy as sp
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
def eqdiff(w, t):
    x, v = w
    #  $dx/dt = v$ 
    #  $dv/dt = -\omega_0^2 * x - Q*x/\omega_0$ 
    return [v,-(omega0**2*x)-((omega0/Q)*v)+omega0**2*np.cos(omega*t)]
# Période propre (en s)
T0 = 1
# Pulsation propre (en rad/s)
omega0 = 2 * np.pi / T0
omega = 2.2*omega0
# Date de fin et nombre de pas d'intégration
datefin, numpoints = 12, 10000
```

Exemple de code python II

```
t = np.linspace(0, datefin, numpoints)
plt.axis([0,datefin,-1.5,1.5])
index = 1
Q= 12
coeff = 1/np.sqrt((1-(omega/omega0)**2)**2 + (omega/(omega0*Q))**2)
CI = [0,0]
wsol = odeint(eqdiff, CI, t)
x = wsol[:,0]; v = wsol[:,1]
reponse = x/ coeff
dataReponse = [[t[i],reponse[i]] for i in range(len(t))]
# Affichage
plt.plot(t, reponse, 'b-', label = 'x (m)')
plt.legend()
plt.xlabel('t')
plt.show()
fichierNom = "oscillo-harmonique-force.csv"
index += 1
np.savetxt(fichierNom, dataReponse, delimiter="")
```