Oscillateur amorti

Analogie électromécanique

Analogie électromécanique

On peut établir une ***analogie mécanique/électrocinétique*** entre un oscillateur harmonique mécanique et un oscillateur harmonique :

grandeur	mécanique	électrocinétique
élongation	X	q
vitesse	$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}$	$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$
$\mathcal{E}_{\text{pot}}$	$\frac{1}{2}kx^2$	$\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$
raideur	k	$\frac{1}{C}$
$\mathcal{E}_{\text{cin}}$	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}Li^2$
masse inertielle	m	L
pulsation $\sqrt{\text{raideur/inertie}}$	$\sqrt{k/m}$	$\sqrt{1/(LC)}$
PFD	$F = -kX = m\dot{V}$	$-\frac{q}{C} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$
frottement	$m\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2} = -kX - \alpha\dot{X}$	$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{q}{C} - R\dot{q}$
	α	R

Phénomènes dissipatifs

Définition : Équation canonique

Un oscillateur harmonique d'élongation X et de pulsation propre ω_0 est dit ***amorti par frottement visqueux*** si X est solution de l'équation différentielle ***canonique*** :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = 0,$$

caractérisée par le facteur de qualité $Q > 0$, sans dimension.

En l'absence de dissipation

Trajectoires dans l'espace des phases

Les trajectoires dans l'espace des phases sont des cercles en coordonnées $(X\,;\dot{X}/\omega_0)$.

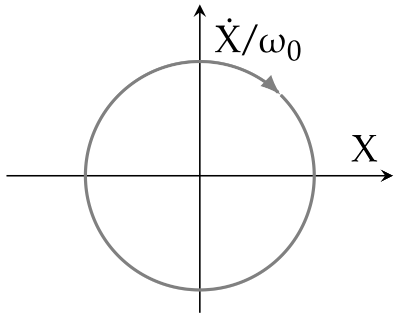


Illustration : régime pseudopériodique $Q = 5$

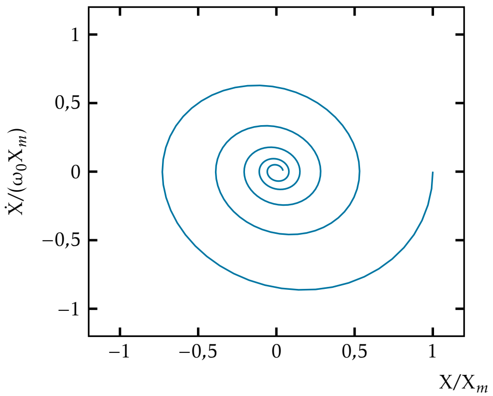
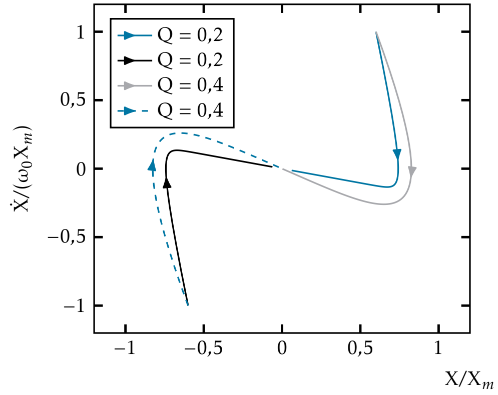
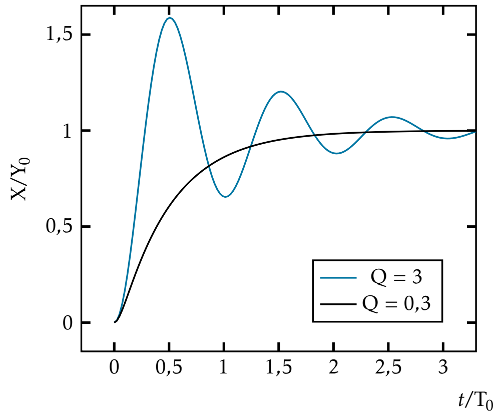
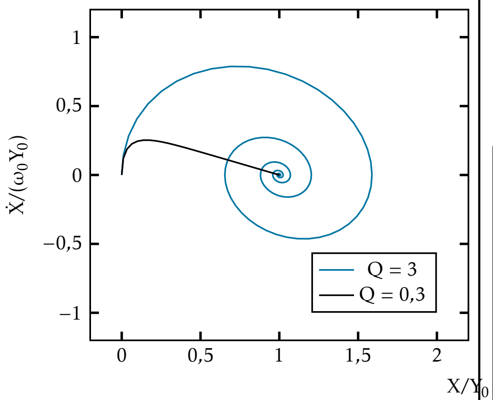


Illustration : régime apériodique $Q = 0{,}2$ et $Q = 0{,}4$



Réalisation





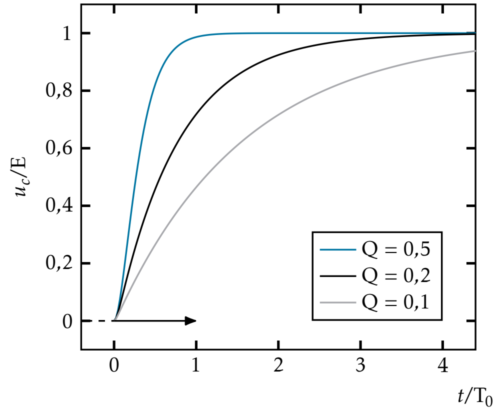
Régimes transitoires

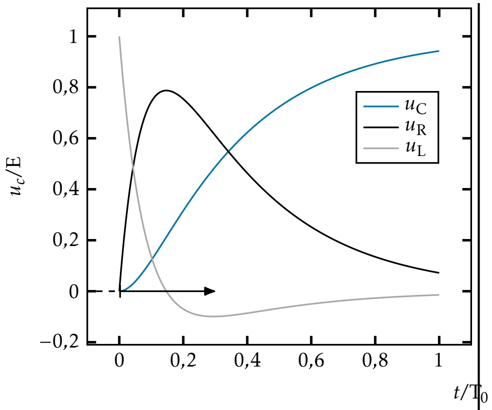
> ***Théorème : Régimes transitoires***
>
> On distingue trois régimes transitoires :
>
> **régime apériodique pour** $Q < \frac{1}{2}$
>
> $$x(t) = X_\infty + e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(X_1 \cosh \omega t + X_2 \sinh \omega t\right)$$
>
> **régime critique pour** $Q = \frac{1}{2}$
>
> $$x(t) = X_\infty + e^{-\omega_0 t}\left(X_1 + X_2 \omega_0 t\right)$$
>
> **régime pseudo-périodique amorti pour** $Q > \frac{1}{2}$
>
> $$x(t) = X_\infty + e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(X_1 \cos \omega t + X_2 \sin \omega t\right) = X_\infty + X e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \cos\left(\omega t + \varphi\right)$$
>
> avec :
>
> $$\omega \equiv \omega_0 \sqrt{\left|\frac{1}{4Q^2} - 1\right|} = \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{|4Q^2 - 1|}$$

Résistance et frottement critiques

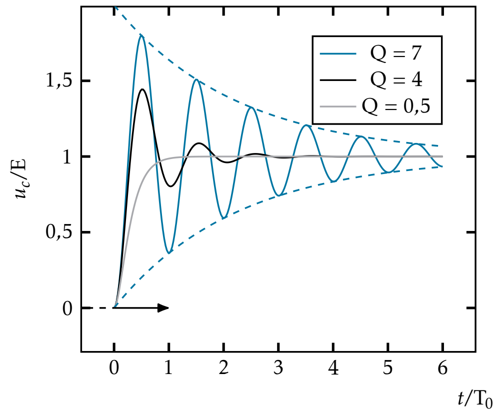
> **Résistance critique**
>
> Un dipôle RLC série est caractérisé par une ***résistance critique*** $R_c = 2\sqrt{L/C}$. Soumis à un échelon de tension, la nature de son évolution temporelle dépend de $R - R_c$. Elle est :
>
> **apériodique** pour les forts amortissements *ie* $R > R_c \leftrightarrow Q < \frac{1}{2}$,
>
> **critique** pour $R = R_c \leftrightarrow Q = \frac{1}{2}$,
>
> **pseudopériodique amorti** pour les faibles amortissements *ie* $R < R_c \leftrightarrow Q > \frac{1}{2}$.
>
> La « durée » du régime transitoire est minimale pour $R = R_c$, infinie pour $Q = 0$ *et* $Q \to \infty$.

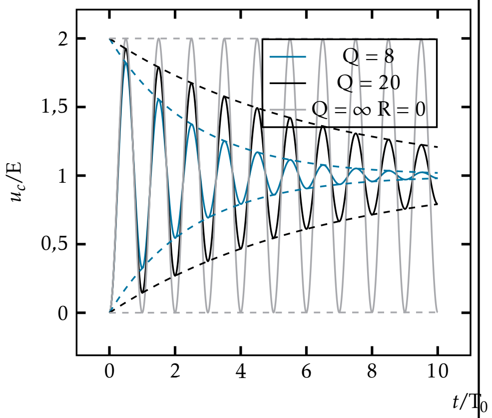
Régimes apériodique et critique





Régime pseudopériodique amorti





Décrément logarithmique

Enveloppe exponentielle

En régime pseudopériodique amorti :

- l'amplitude des oscillations est « enveloppée » par des exponentielles de constante de temps $2Q/\omega_0$.
- pour toute grandeur x, : la quantité $\ln \frac{x(t)-x_\infty}{x(t+2\pi/\omega)-x_\infty}$ est une constante, indépendante de t, nommée ***décrément logarithmique*** et notée δ. On a :

$$\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2-1}} \underset{Q\to\infty}{\simeq} \frac{\pi}{Q}$$

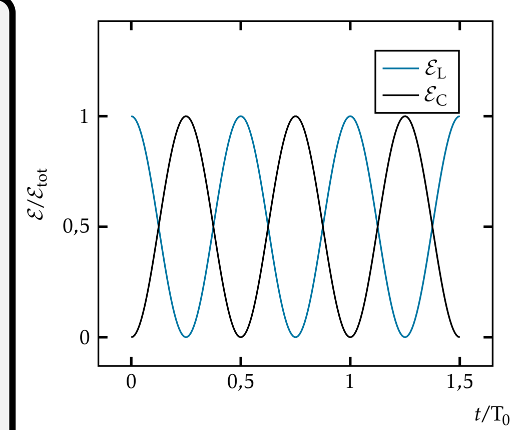
Circuit LC oscillant

Équipartition de l'énergie

La somme des énergies électrostatique et magnétique ***se conserve*** dans un circuit LC oscillant. Elle est ***périodiquement*** transférée de la forme magnétique à la forme électrostatique à la pulsation $2\,\omega_0$. En moyenne temporelle :

$$2\left\langle\mathcal{E}_{\text{élec}}\right\rangle = 2\left\langle\mathcal{E}_{\text{mag}}\right\rangle = \frac{Q_0^2}{2C} = \frac{LI_0^2}{2},$$

avec Q_0 la charge maximale du condensateur et I_0 l'intensité maximale du courant.



Avec amortissement

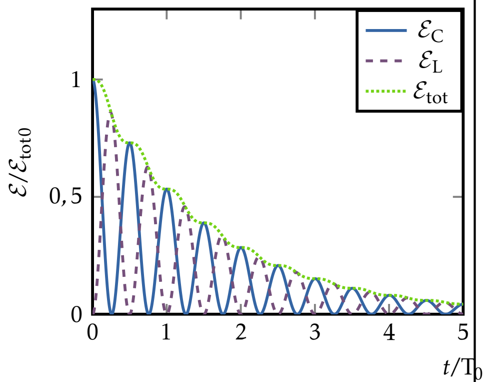
Décroissance de l'énergie

L'énergie mécanique $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}kX^2 + \frac{1}{2}m\dot{X}^2$ d'un oscillateur harmonique amorti par frottement visqueux décroît avec le temps jusqu'à un équilibre d'élongation nulle ($X = 0\,; \dot{X} = 0$).

Régime très faiblement amorti $Q \gg 1$

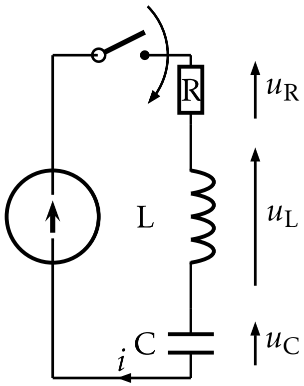
Décroissance quasi-exponentielle

- l'évolution de la somme des énergie magnétique et électrostatique est ***peu différente d'une décroissance exponentielle*** de temps caractéristique Q/ω_0
- la ***diminution relative*** d'énergie par effet Joule sur une pseudo-période est inversement proportionnelle à Q



Conditions initiales et asymptotiques

On considère le circuit de la figure ci-contre. L'interrupteur est initialement ouvert et le condensateur déchargé. On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$.



1. (a) Établir les équations différentielles vérifiées par les tensions aux bornes de chacun des dipôles et le courant les traversant.
   (b) Exprimer de deux manières différentes le facteur de qualité en fonction de la pulsation caractéristique ω_0 du circuit et des constantes de temps des dipôles $R-C$ et $R-L$ série.

Conditions initiales et asymptotiques

2. (a) Quelles seront les valeurs pour $t \gg Q/\omega_0$ et pour $t = 0^+$ de la tension u_C, de l'intensité i_L et de la tension u_L ?
   (b) En déduire les conditions initiales des équations différentielles vérifiées par u_C, u_R et u_L.
   (c) En déduire, pour le régime pseudopériodique amorti, l' expression, pour $t > 0$ de la tension u_C, en fonction uniquement de E, Q et ω_0.

Équation canonique

Définition : Équation canonique
L'équation canonique d'un oscillateur harmonique forcé est :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 Y(t),$$

avec $Y(t)$ le terme dit de ***forçage*** ou ***excitateur***.

Cadre mathématique

Théorème : Principe de superposition
L'élongation d'un oscillateur harmonique forcé est solution d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients réels constants et positifs et à second membre variable.

Les solutions vérifient donc le ***principe de superposition*** : si

$$\begin{cases} X_1(t) & \text{est une solution pour } Y_1(t) \\ X_2(t) & \text{est une solution pour } Y_2(t) \end{cases},$$

alors :

$$\lambda_1 X_1(t) + \lambda_2 X_2(t) \text{ sera une solution pour } \lambda_1 Y_1(t) + \lambda_2 Y_2(t),$$

quelles que soient les constantes λ_1 et λ_2.

Solution générale

Théorème : Solution générale
À un couple de conditions initiales $\left(X(t_0), \dot{X}(t_0)\right)$ correspond une unique solution (le problème est dit ***déterministe***). Cette solution sera la somme :

du régime transitoire un des régimes libres, solution de l'équation homogène $Y(t) = 0$.

- il peut être pseudopériodique amorti ($Q > \frac{1}{2}$), critique ($Q = \frac{1}{2}$) ou apériodique ($Q < \frac{1}{2}$),
- il s'amortit exponentiellement avec un temps caractéristique τ de l'ordre de max $(Q/\omega_0; 1/(Q\omega_0))$.

du régime forcé une solution particulière, prépondérante pour $t \gg \tau$.

Conditions initiales

Conditions initiales
On établira les conditions initiales en utilisant la continuité de l'élongation X et de la vitesse $\dot{X}$ assurées par les continuités :

mécanique de $\mathcal{E}_{\text{pot}} = \frac{1}{2}kx^2$ et $\mathcal{E}_{\text{c}} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$,

électrocinétique de $\mathcal{E}_{\text{élec}} = q^2/(2C)$ et $\mathcal{E}_{\text{mag}} = L\dot{q}^2/2$.

Excitation sinusoïdale

Réponse harmonique
Le régime établi d'un oscillateur de pulsation ω_0 excité par un signal ***sinusoïdal*** à la pulsation ω :

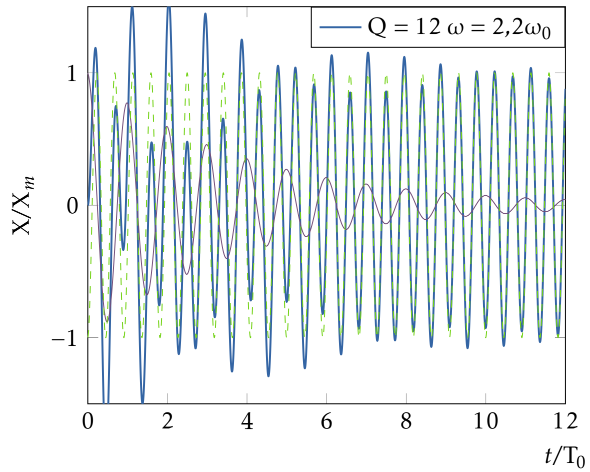
$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 Y_m \cos\omega t,$$

est une fonction sinusoïdale de ***même*** pulsation ω :

$$X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi).$$

C'est la ***réponse harmonique du système, indépendante des conditions initiales***.

Évolution temporelle



Notation complexe

Définition : Forme exponentielle complexe
La ***forme exponentielle complexe*** d'une fonction sinusoïdale réelle $X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ est :

$$\underline{X}(t) = X_m e^{j(\omega t + \varphi)} \text{ ou } \underline{X_m} e^{j(\omega t)} \text{ avec: } \underline{X_m} \equiv X_m e^{j\varphi}.$$

Réponse en élongation

Définition : Réponse harmonique en élongation
Le quotient $R(u) \equiv X_m(\omega)/Y_m$ des amplitudes de l'élongation du régime du régime sinusoïdal et du signal excitateur est nommé ***réponse harmonique en élongation*** du système.

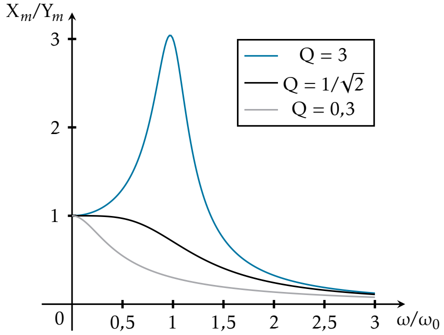
Définition : Résonance en élongation
La réponse harmonique en élongation d'un oscillateur harmonique amorti par frottement visqueux forcé à la pulsation ω présente un maximum pour $Q > 1/\sqrt{2}$. Il est dans ce cas atteint en :

$$\omega_{res} = \omega_0\sqrt{1 - 1/(2Q^2)} \underset{Q\to\infty}{\longrightarrow} \omega_0,$$

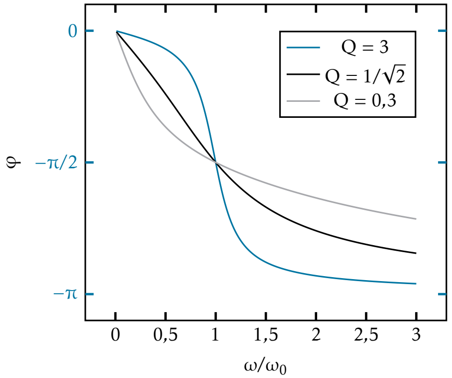
$$\text{où il vaut:} \quad R\max = \frac{X_m(\omega_{res})}{Y_m} = \frac{Q}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} \underset{Q\to\infty}{\sim} Q.$$

On dit qu'on observe alors une ***résonance en élongation***.

Courbes des réponses en élongation



Amplitude



Phase

Réponse en vitesse

Réponse harmonique en vitesse
En notant la notation complexe de la dérivée temporelle $V(t) = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}(t)$ de l'élongation (vitesse) selon $\underline{V}(t) = V_m e^{j(\omega t+\varphi_V)}$. On a :

$$V_m = \omega X_m \quad \text{et} \quad \varphi_V(\omega) = \varphi(\omega) + \pi/2.$$

La vitesse est en ***quadrature avance*** par rapport à l'élongation.

Le quotient $V_m(\omega)/(\omega_0 Y_m) = R_V(u)$ est nommé ***réponse harmonique en vitesse*** du système.

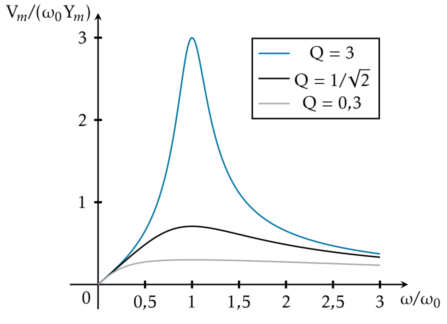
- $u \ll 1$: $R_V(u) \to 0$ car les oscillations sont de fréquence très faible.
- $u \gg 1$: $R_V(u) \to 0$ car l'amplitude des oscillations tend vers 0 plus vite que leur fréquence ne tend vers l'infini.

Résonance en vitesse

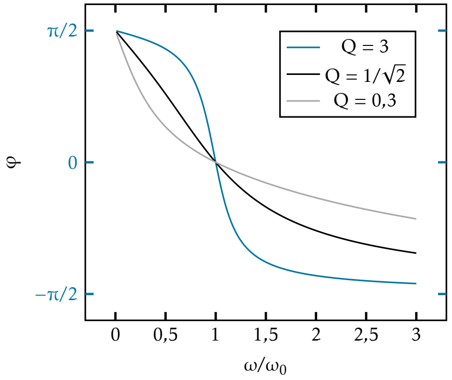
Résonance en vitesse
La réponse harmonique en vitesse d'un oscillateur harmonique amorti par frottement visqueux présente un maximum pour $\omega = \omega_0$. On a :

$$\frac{V_m(\omega_0)}{\omega_0 Y_m} = Q.$$

Courbes des réponses en vitesse



Amplitude



Phase

Indispensable

Indispensable

- équations canoniques avec Q, ω_0
- déterminations des régimes asymptotiques avec les équivalents (interrupteurs ouverts ou fermés)
- forme générale de la solution du 1$^{\text{er}}$ordre et sa courbe
- régime du deuxième ordre non amorti
- les 3 régimes du deuxième ordre amorti et les caractéristiques de leurs courbes
- l'enveloppe exponentielle
- le régime très faiblement amorti $Q \gg 1$
- les interprétations énergétiques

Exemple de code python

Intégration numérique du mouvement d'un oscillateur harmonique amorti en régime sinusoïdal forcé

```python
import numpy as np
import scipy as sp
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
def eqdiff(w, t):
    x, v = w
    # dx/dt = v
    # dv/dt = -omega0**2 * x - Q*x/omega0
    return [v,-(omega0**2*x)-((omega0/Q)*v)+omega0**2*np.cos(omega*t)]
# Periode propre (en s)
T0 = 1
# Pulsation propre (en rad/s)
omega0 = 2 * np.pi / T0
omega = 2.2*omega0
# Date de fin et nombre de pas d'intégration
datefin, numpoints = 12, 10000
t = np.linspace(0, datefin, numpoints)
plt.axis([0,datefin,-1.5,1.5])
index = 1
Q= 12
coeff = 1/np.sqrt((1-(omega/omega0)**2)**2 + (omega/(omega0*Q))**2)
CI = [0,0]
wsol = odeint(eqdiff, CI, t)
x = wsol[:,0]; v = wsol[:,1]
reponse = x/ coeff
dataReponse = [[t[i],reponse[i]] for i in range(len(t))]
# Affichage
plt.plot(t, reponse, 'b-', label = 'x (m)')
plt.legend()
plt.xlabel('t')
plt.show()
fichierNom = "oscillo-harmonique-force.csv"
index += 1
np.savetxt(fichierNom, dataReponse, delimiter="    ")
```