Méthode de séparation des variables

Julien Cubizolles

Lycée Louis le Grand

lundi 20 novembre 2017

Méthode de séparation des variables

Julien Cubizolles

Lycée Louis le Grand

lundi 20 novembre 2017

Cas d'application

- résolution de certaines équation différentielles non-linéaires du 1^{er}ordre[1]

1. on peut l'adapter pour des équations aux dérivées partielles d'ordre 2 et plus

Cas d'application

- résolution de certaines équation différentielles non-linéaires du 1er ordre[1]
- il faut pouvoir les mettre sous la forme :

1. on peut l'adapter pour des équations aux dérivées partielles d'ordre 2 et plus

Cas d'application

- résolution de certaines équation différentielles non-linéaires du 1^er^ordre[1]
- il faut pouvoir les mettre sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y),$$

ie produit d'une fonction de x seulement par une fonction de y seulement

1. on peut l'adapter pour des équations aux dérivées partielles d'ordre 2 et plus

Cas d'application

- résolution de certaines équation différentielles non-linéaires du 1^er^ordre[1]
- il faut pouvoir les mettre sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y),$$

ie produit d'une fonction de x seulement par une fonction de y seulement

1. on peut l'adapter pour des équations aux dérivées partielles d'ordre 2 et plus

Cas d'application

- résolution de certaines équation différentielles non-linéaires du 1^er^ordre[1]
- il faut pouvoir les mettre sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y),$$

ie produit d'une fonction de x seulement par une fonction de y seulement

on devrait (en maths) écrire :

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y(x))$$

1. on peut l'adapter pour des équations aux dérivées partielles d'ordre 2 et plus

Principe

- on sépare les « variables » x et y :

Principe

- on séparе les « variables » x et y :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y) \to \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x$$

Principe

- on séparer les « variables » x et y :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y) \to \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x$$

- on intègre ensuite en choisissant des bornes $(x_0\,, y_0)$ correspondantes $(y(x_0) = y_0)$:

Principe

- on séparе les « variables » x et y :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y) \to \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x$$

- on intègre ensuite en choisissant des bornes $(x_0\,, y_0)$ correspondantes $(y(x_0) = y_0)$:

$$\int_{Y=y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}Y}{g(Y)} = \int_{X=x_0}^{x} f(X)\,\mathrm{d}X$$

Principe

- on séparer les « variables » x et y :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y) \to \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x$$

- on intègre ensuite en choisissant des bornes $(x_0\,, y_0)$ correspondantes $(y(x_0) = y_0)$:

$$\int_{Y=y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}Y}{g(Y)} = \int_{X=x_0}^{x} f(X)\,\mathrm{d}X$$

- avec F et G des primitives respectives de f et $1/g$:

Principe

- on séparer les « variables » x et y :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y) \to \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x$$

- on intègre ensuite en choisissant des bornes $(x_0\,, y_0)$ correspondantes $(y(x_0) = y_0)$:

$$\int_{Y=y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}Y}{g(Y)} = \int_{X=x_0}^{x} f(X)\,\mathrm{d}X$$

- avec F et G des primitives respectives de f et $1/g$:

$$F(x) - F(x_0) = G(y) - G(y_0)$$

Remarques

- la difficulté consiste à trouver les primitives F et G

Remarques

- la difficulté consiste à trouver les primitives F et G
- on n'obtient pas nécessairement y en fonction de x mais $F(y)$ en termes de $G(x)$

Remarques

- la difficulté consiste à trouver les primitives F et G
- on n'obtient pas nécessairement y en fonction de x mais $F(y)$ en termes de $G(x)$
- on n'a pas ici de constante d'intégration à ajuster : le choix des bornes $(x_0\,, y_0)$ correspondantes joue le même rôle tout en étant plus parlant

Remarques

- la difficulté consiste à trouver les primitives F et G
- on n'obtient pas nécessairement y en fonction de x mais $F(y)$ en termes de $G(x)$
- on n'a pas ici de constante d'intégration à ajuster : le choix des bornes $(x_0\,, y_0)$ correspondantes joue le même rôle tout en étant plus parlant
- la méthode est justifiée par la méthode du *changement de variable* utilisable si les fonctions f et g sont injectives et « suffisamment régulières »…

Exemple

Résoudre l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 y$$

avec la condition initiale $y(x = 0) = 1$

Exemple

Résoudre l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 y$$

avec la condition initiale $y(x = 0) = 1$

Solution

$$y = \exp(x^3/3)$$

Vitesse d'un mouvement 1D pour un frottement dans l'air

Résoudre l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v^2}{v_\infty \tau} = \frac{v_\infty}{\tau}$$

avec la condition initiale $v(t = 0) = 0$

Vitesse d'un mouvement 1D pour un frottement dans l'air

Résoudre l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v^2}{v_\infty \tau} = \frac{v_\infty}{\tau}$$

avec la condition initiale $v(t = 0) = 0$

Solution

$$v = v_\infty \tanh(t/\tau)$$

Période d'un mouvement quand on connaît la vitesse en fonction de la position

La vitesse $v = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ d'une particule est donnée, quand la particule est à l'abscisse $x \in [-x_0\,, x_0]$ par

$$v = \omega\sqrt{x_0^2 - x^2}.$$

Déterminer le temps mis par la particule pour aller de $x = -x_0$ à $x = x_0$.

Solution

$$T = 2\pi/\omega$$

On retrouve le mouvement d'un oscillateur harmonique (ressort idéal).