Introduction

On présente une méthode de résolution de certaines équation différentielles du premier ordre, particulièrement utile dans le cas d'équations non linéaires.

I Méthode

On considère une équation différentielle que l'on a pu mettre sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y) \quad \text{avec la condition initiale: } y = y0 \quad \text{quand } x = x_0. \tag{1}$$

La fonction y dépend implicitement de x ; cependant, comme toujours en physique, on n'écrira pas « $y(x)$ » pour alléger les expressions et faciliter la résolution.

La méthode consiste à « séparer » les « variables » x et y de part et d'autre du signe égal. On écrit alors :

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{puis: } \int_{Y=y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}Y}{g(Y)} = \int_{X=x_0}^{x} f(X)\,\mathrm{d}X.$$

Remarque :

- Il est très important de prendre une paire de bornes correspondant aux conditions initiales : $(x_0\,, y_0)$.
- On a choisi de noter en lettres capitales $(X\,, Y)$ la variable muette d'intégration pour la distinguer de la variable $(x\,, y)$ des bornes d'intégration. Très souvent (et en particulier dans les exemples de la dernière partie), on ne prendra pas cette précaution et on conservera le même symbole pour les deux. On écrira donc :
$$\int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

En utilisant des primitives quelconques : $G(y)$ de $\frac{1}{g(y)}$ et $F(x)$ de $f(x)$, l'égalité précédente donne alors :

$$G(y) - G(y_0) = F(x) - F(x_0).$$

Si on peut maintenant extraire y de $G(y)$, on obtient la solution de l'équation différentielle vérifiant l'équation initiale donnée, unique d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz si f et g sont suffisamment « régulières ».

Remarque : On aurait pu se contenter de chercher les primitives $F(x)$ et $G(y)$ pour écrire $G(y) = F(x) + C$ avec C une constante à déterminer en considérant les conditions initiales. L'utilisation explicite des bornes initiales $(x_0\,, y_0)$ permet d'obtenir directement la solution sans passer par la constante C arbitraire.

II Justification

En abandonnant les notations de Leibniz pour écrire explicitement la fonction $y(x)$, l'équation 1 s'écrit :

$$\frac{y'(x)}{g\,(y(x))} = f(x) \quad \text{qu'on intègre selon: } \int_{x_0}^{x} \frac{Y'(X)\,\mathrm{d}X}{g\,(Y(X))} = \int_{x_0}^{x} f(X)\,\mathrm{d}X.$$

La technique du *changement de variable*, vue plus tard en cours de mathématiques assure alors que si $y(x)$ est assez « régulière » (et injective sur l'intervalle $[x_0\,, x]$) ce qu'on peut supposer a priori, et vérifier a posteriori, on a :

$$\int_{x_0}^{x} \frac{Y'(X)\,\mathrm{d}X}{g\,(Y(X))} = \int_{Y(X_0)}^{Y(X)} \frac{\mathrm{d}Y}{g(Y)} = \int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}Y}{g(Y)},$$

ce qui achève la démonstration.

III Exemple et exercices

Dans toute la suite, on utilisera le même symbole pour la variable muette d'intégration et pour la borne d'intégration.

- Soit à résoudre l'équation différentielle : $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 y$ avec la condition initiale $y(x=0) = 1$. On a :
$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = x^2\,\mathrm{d}x \quad \text{soit: } \int_1^y \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int_0^x x^2\,\mathrm{d}x \rightarrow \ln y - \ln 1 = \frac{x^3}{3} - 0 \qquad \text{soit: } y = \exp(x^3/3).$$
- Montrer, par la méthode de séparation des variables, que la solution de l'équation différentielle :
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v^2}{v_\infty \tau} = \frac{v_\infty}{\tau} \quad \text{avec la condition initiale } v(t=0) = 0 \quad \text{est:} v = v_\infty \tanh(t/\tau).$$
On rappelle que la fonction a pour réciproque argth, primitive de $\frac{1}{1-x^2}$
- Montrer, par la méthode de séparation des variables, que la solution de l'équation différentielle :
$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}V} = \frac{(1-\gamma)T}{V} \quad \text{avec la condition initiale } V = V_0, T = T_0 \quad \text{vérifie: } TV^{\gamma-1} = T_0 V_0^{\gamma-1}.$$
- La vitesse $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ d'une particule est donnée, quand la particule est à l'abscisse $x \in [-x_0\,, x_0]$ par
$$v = \omega\sqrt{x_0^2 - x^2}.$$
Déterminer le temps mis par la particule pour aller de $x = -x_0$ à $x = x_0$. Que retrouve-t-on ? On rappelle qu'une primitive de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est arcsin(x).